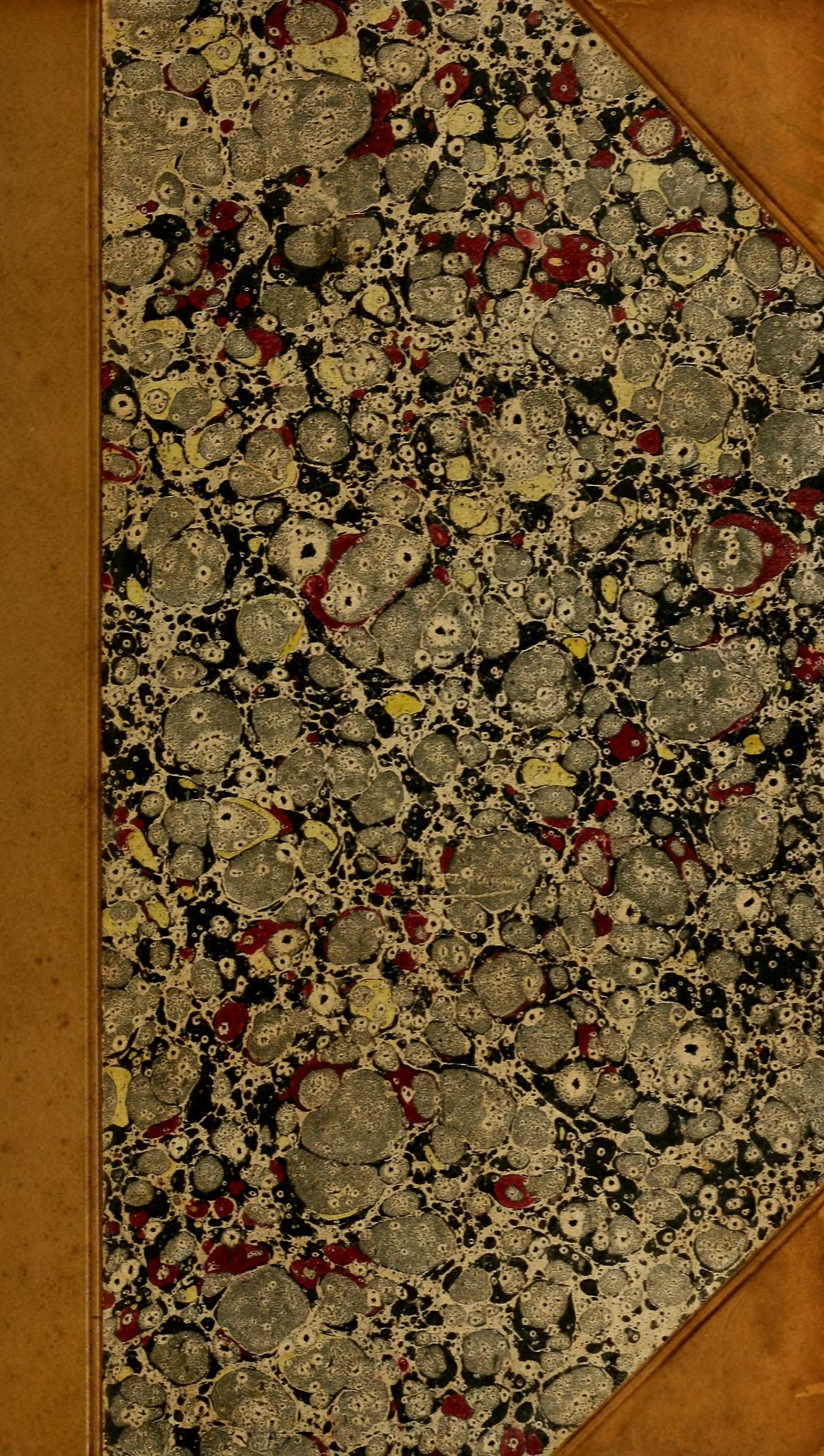
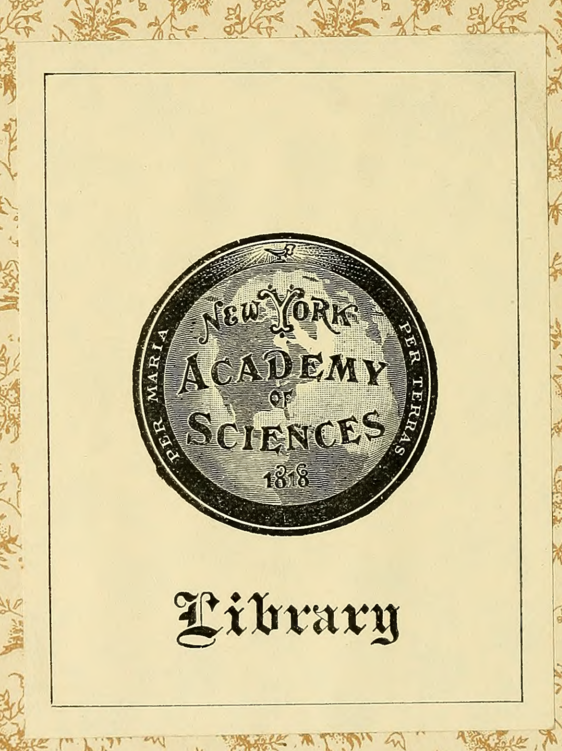
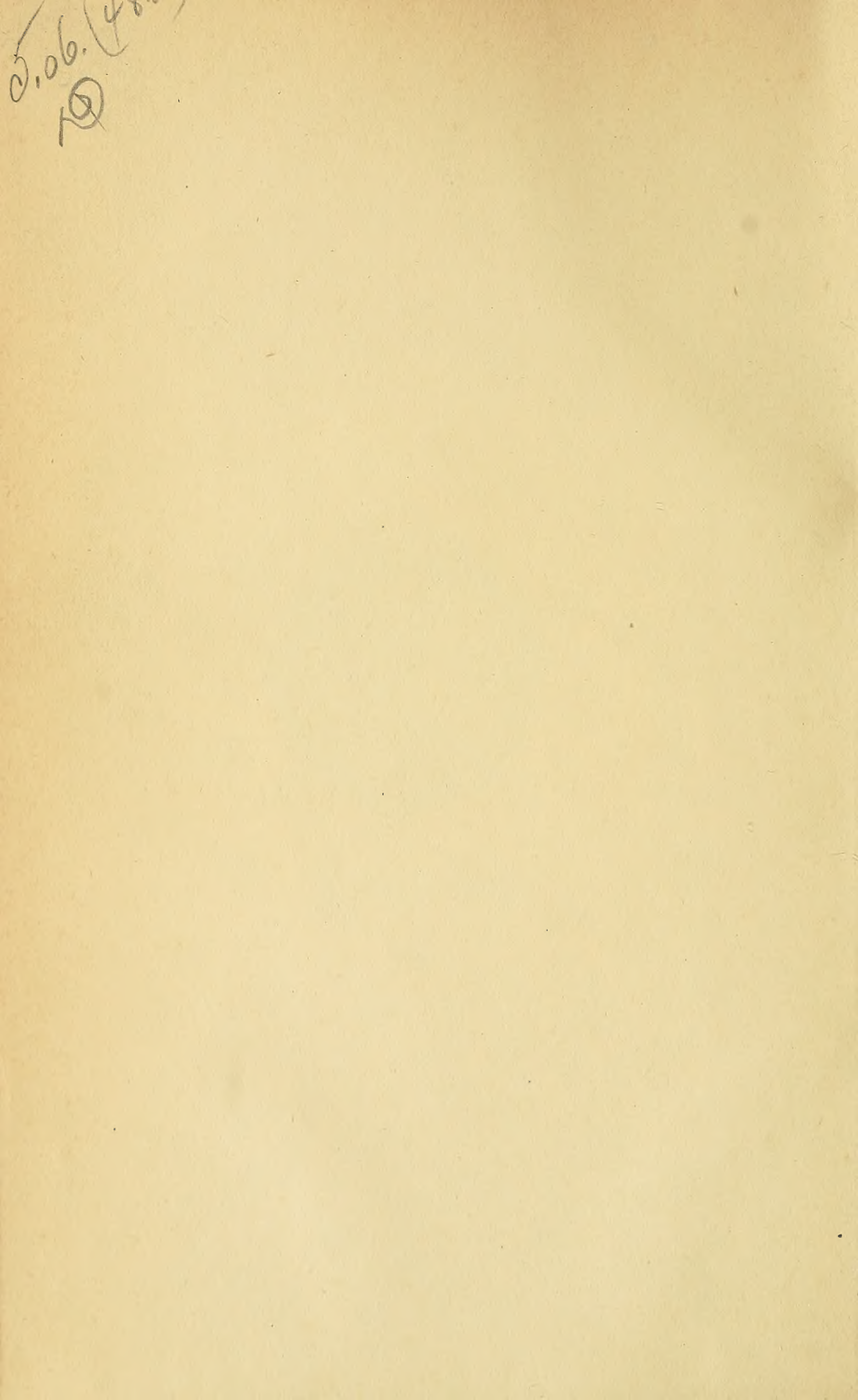



NEW YORK
ACADEMY
OF
SCIENCES
1818
PER MARIA
PER TERRAS
Library









ÖFVERSIGT

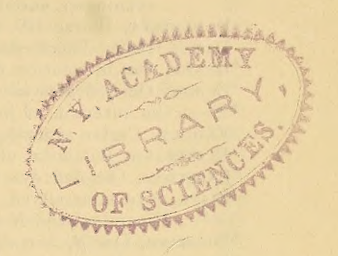
AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

FYRATIONDESJUNDE ÅRGÅNGEN.

1890.

STOCKHOLM, 1890, 1891.
KONGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.



INNEHÅLL.

Utförliga uppsatser äro betecknade med en asterisk.

———

———

Rättelser:

Sid. 70, rad 10 nedifrån: *står* splanichus, *läs* splanchnicus.
» 164, » 8 uppifrån: Afhandling af P. AF BJERKÉN (se Bihang etc.) utgår, emedan afhandlingen blifvit återtagen af författaren.
» 329, Innehåll rad 4 uppifrån: *står* Bievens, *läs* Bierens.

——— ———

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 1.

Onsdagen den 8 Januari.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot, Professorn vid K. Tekniska Högskolan FREDRIK LAURENTS EKMAN med döden afgått.

Berättelser om vetenskapliga resor, som under sistlidne sommar blifvit med understöd af Akademien inom landet utförda, hade afgifvits af Docenten A. WIRÉN, som vid Kristinebergs zoologiska station anställt undersökningar öfver lägre hafsdjurs byggnad och utveckling; af Docenten C. AURIVILLIUS, som, äfven vid Kristineberg, gjort forskningar öfver krustacéer; af Filos. Kandidaten L. ROMELL, som studerat Ombergstraktens svampflora; af Filos. Kandidaten G. ANDERSSON, som undersökt de olika växtformationerna och deras fördelning och utbredning på de svenska torfmossarne; och af Filos. Kandidaten H. SCHÖTT, som inom Jemtlands fjelltrakter idkat studier öfver insektgruppen Collembola.

Amanuensen vid Akademiens Observatorium C. V. L. CHARLIER hade ingifvit berättelse om de undersökningar, som han med understöd från Wallmarkska fonden utfört rörande fotografiens användning till bestämning af fixstjernors lägen och ljusstyrka.

Med anledning af en genom H. Exc. Utrikesministern till Akademien öfverlemnad skrifvelse från svensk-norske Konsuln i Melbourne angående en derstädes sedan flera år afhandlad plan att utrusta en expedition till de sydliga polartrakterna och bästa utsigten att få denna plan förverkligad genom att expeditionen blefve ett gemensamt svenskt-australiskt företag, meddelade Frih. NORDENSKIÖLD, att Frih. O. DICKSON och han sjelf, som ansågo det önskvärdt, att de forskningar, som från Sverige utförts öfver de arktiska trakternas naturförhållanden, äfven utsträcktes till de antarktiska, voro villiga att, med bidrag jemväl från Australien, utrusta en dylik expedition, som skulle afgå från Sverige under loppet af år 1891.

Hr LINDSTRÖM meddelade en uppsats af Professorn W. DAMES i Berlin: »Ueber Vogelreste aus dem Saltholmskalke bei Limhamn in Schonen» (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr CLEVE redogjorde för undersökningar, som blifvit af Filos. Kandidaten D. HECTOR utförda på Upsala kemiska laboratorium öfver oiazotiolföreningar.

Sekreteraren öfverlemnade följande inkomna uppsatser: 1:o) »Om digestionssekretionen i mellantarmen och några dermed sammanhängande fenomen hos insekter och myriopoder», af Filos. Dr G. ADLERZ (se Bihang etc.); 2:o) »Ueber Jurassische Hölzer von Green Harbour auf Spitzbergen», af Professorn vid universitetet i Leipzig A. SCHENK*.

Årsräntan af Edlundska donationen beslöt Akademien öfverlemna till Docenten C. A. MEBIUS såsom understöd för undersökningar af elektricitetens fortplantning genom gaser och dermed sammanhängande fenomen, samt till anskaffande af derför erforderligt starkt elektriskt batteri.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiella statistik. 25 band och häften. 1888—89. 4:o.

— *Generalstaben.*
Karta öfver Sverige. $^1/_{100000}$. N:o 23, 72, 110. 1889. Tvfol.
» » Norrbottens län. $^1/_{200000}$. N:o 8—10. 1889. Tv. 4:o.
— *Stadsfullmäktige.*
Berättelse angående Stockholms kommunalförvaltning. Årg. 20(1887). 8:o.
— *Svenska akademien.*
Handlingar från 1886. D. 3(1888). 8:o.
— *Entomologiska föreningen.*
Entomologisk tidskrift. Årg. 7(1886)—9(1888). 8:o.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. Årg. 8(1888): H. 1—6. 8:o.
— *Svenska jägarförbundet.*
Ny tidskrift. Årg. 27(1889): H. 1—4. 8:o.

Adelaide. *Library, museum and art gallery.*
Report. Year 1888/89. st. 4:o.

Belfast. *Belfast natural history & philosophical society.*
Report and proceedings. Session 1888/89. 8:o.

Bologna. *R. Accademia delle scienze dell'istituto di Bologna.*
Memorie. (4) T. 9. 1888. 4:o.
Nouveaux progrès de la question du calendrier universel et du méridien universel. Rapport de la commission de l'unification du calendrier. 1889. 1. 4:o.
TONDINI DI QUARENGHI, C., La question de l'heure universelle devant l'association Britannique. Paris 1888. 8:o.

Bruxelles. *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 32(1888). 8:o.
— *Société R. malacologique de Belgique.*
Annales. T. 23(1888). 8:o.
Procès-verbaux des séances. T. 17(1887): Pag. 81—141; 18(1888): 1—124; 19(1889): 1—132. 8:o.

Calcutta. *Indian museum.*
DISTANT, W. L., A monograph of Oriental Cicadidæ. P. 1. London 1889. 4:o.

Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Year 6(1889): P. 1. 8:o.

Glasgow. *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 20(1888/89). 8:o.

Halle. *K. Deutsche Akademie der Naturforscher.*
Nova acta. T. 53. 1889. 4:o.
Katalog der Bibliothek. Lief. 2. 1889. 8:o.

Hamburg. *Mathematische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd. 2, 1: Festschrift anlässlich ihres 200-jährigen Jubelfestes 1890. Lpz. 1890. 8:o.
— *Naturhistorisches Museum.*
Mittheilungen. Jahrg. 6(1888). 8:o.

Helsingfors. *K. Universitetet.*
Akademiskt tryck. År 1888/89. 18 häften. 4:o & 8:o.

Kalocsa. *Haynald-Observatorium.*
Közleményei. Füzet 3(1887)—4(1888). 8:o.
Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. (6) Naturv. og math. Afd. Bd. 5: 1–2. 1889. 4:o.
» » Hist. og filos. » Bd. 2: 6. 4:o.
Oversigt over Forhandlingerne. Aarg. 1889: N:o 2. 8:o.
London. *K. Storbritanniska regeringen.*
Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger, 1873—1876. Zoology. Vol. 32. 1889. 4:o.
— *R. Geographical society.*
Proceedings. Vol. 11 (1889): N:o 1–12. 8:o.
— *R. Microscopical society.*
Journal. Year 1889: N:o 68–73. 8:o.
Minnesota, U. S. *Geological and natural history survey.*
Annual report. 16 (1887). 8:o.
New York. *New York state agricultural society.*
Transactions. Vol. 34 (1883—86). 8:o.
North America, United States. *American association for the advancement of science.*
Proceedings. Meeting 37 (1888). Cleveland. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 3 (1889): F. 1–6. 8:o.
Paris. *Académie des sciences.*
Comptes rendus hebdomadaires des séances. Année 1889. T. 108: N:o 1–25; 109: 1–27. 4:o.
— *Société philomatique.*
Bulletin. (7) T. 12: N:o 3. 1888. 8:o.
Rom. *Direzione generale della statistica.*
Publikationer. 16 band. Fol. & 8:o.
Venezia. *R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Atti. (3) T. 7 (1888/89): Disp. 3–10. 8:o.
Washington, U. S. *National museum.*
Proceedings. Vol. 11 (1889). 8:o.
Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math.-naturw. Klasse. Bd. 51. 1889. 4:o.
Sitzungsberichte. » » » Abth. **1.** Bd. 97: H. 6–10; 98: 1–3; **2a.** Bd. 97: 8–10; 98: 1–3; **2b.** Bd. 97: 8–10; 98: 1–3; **3.** Bd. 97: 7–10; 98: 1–4. 1888—89. Register 12 zu Bd. 91—96. 8:o.
» Philos.-hist. » Bd. 117(1888)—118(1889). 8:o.
Almanach. Jahrg. 39 (1889). 1. 8:o.
Archiv für Oesterreichische Geschichte. Bd. 74: H. 1–2. 1889. 8:o.
Mittheilungen aus dem Vaticanischen Archive. Bd. 1—2. 1889. 8:o.
Venezianische Depeschen vom Kaiserhofe. Bd. 1. 1889. 8:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 34 (1889): H. 1–2. 8:o.

(Forts. å sid. 11.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 1.
Stockholm.

Jurassische Hölzer von Green Harbour auf Spitzbergen.

Von Professor Dr. A. SCHENK,
in Leipzig.

[Mitgetheilt den 8. Januar 1890 durch A. G. NATHORST.]

In dem ersten Bande der Flora fossilis arctica von HEER werden von Professor Dr. CRAMER in Zürich drei Coniferenhölzer beschrieben: *Pinites latiporosus* CRAMER, *P. pauciporosus* CRAMER und *P. cavernosus* CRAMER, pag. 175 ff. und Tafel 32 Fig. 3, 4; Tafel 40; 41; 42, Fig. 1—10 abgebildet. Nach der tabellarischen Übersicht der Miocenflora Spitzbergens in dem gleichen Bande pag. 162 gehören diese Hölzer nach HEER dem Miocän an und ist pag. 35 auf dem Profile der Fundstelle die kohlenführende Bildung ebenfalls als tertiär bezeichnet.

Diese Hölzer bieten ein mehrfaches Interesse. Abgesehen, dass sie die Existenz einer baumartigen Vegetation in so hoher Breite (78° n. Br.) nachweisen, lassen wenigstens zwei auf eine andere Stammpflanze schliessen und steht eines von ihnen einem dem Culm Schlesien's angehörigem Holze nahe, hinsichtlich dessen in neuerer Zeit eine von der bisherigen Anschauung abweichende Meinung geäussert worden ist.

Der liebenswürdigen Zuvorkommenheit Professor Dr. NATHORST's verdanke ich die Möglichkeit die in der phytopalæontologischen Abtheilung des Reichsmuseums zu Stockholm befindlichen Originale CRAMER's untersuchen zu können und beginne ich meine Besprechung mit *Pinites latiporosus* CRAMER.

Dass unter diesem Namen beschriebene Holz hat die Aufmerksamkeit auch anderer Beobachter auf sich gezogen und finden wir es von KRAUS zu der Gruppe der Nadelhölzer mit Araucarienähnlichem Bau, zu *Araucarioxylon* gebracht[1]), während SCHRÖTER ihm seinen Platz bei *Cedroxylon* KRAUS anweist[2]), da dasselbe weder Harzgänge noch Harzparenchym besitzt. Diese Annahme SCHRÖTER's ist unzulässig, denn auch die Hölzer von *Dammara* und *Araucaria* entbehren dieses Gewebe oder besitzen es sehr selten, so dass es auf Schliffen vermisst werden kann. Ausgezeichnet ist das Holz und darin liegt das Characteristische desselben durch die sich berührenden einreihigen Hoftüpfel der Radialwände der Tracheiden, am oberen und unteren Rande abgeplattet, die seitlichen Ränder convex, wie dies bei den einreihigen Hoftüpfeln der beiden genannten recenten Gattungen vorkömmt. Auch die von CRAMER vorgeschlagene Einreihung bei *Pinites* ist unzulässig, da 1868 nicht allein GÖPPERT, sondern auch KRAUS, der erstere Hölzer mit Araucarienstructur als *Araucarites* unterschied und unter *Pinites* Hölzer mit kreisrunden Tüpfeln mit und ohne Harzgänge unterschied, der letztere die Hölzer mit Harzgängen als *Pityoxylon*, ohne solche als *Cedroxylon* bezeichnete. Da GÖPPERT zwei Gruppen von *Pinites*, je nach dem Vorkommen von Harzgängen oder Harzparenchym unterscheidet, so passt das Holz weder zur einen noch zur anderen, da beide Gewebe fehlen. Nach der Abplattung der Tüpfel, deren Umriss allein massgebend ist, müssen wir, wie dies KRAUS gethan, das Holz zu *Araucarioxylon* stellen. Das Vorkommen eines Holzes mit dem gleichen Baue kennen wir übrigens auch noch von anderen Fundorten. Von CONWENTZ wird[3]) ein fossiles Holz als *Araucarioxylon latiporosum* vom Gallberge bei Salzgitter, Hannover, aus dem mittleren Lias angeführt. FELIX beschrieb[4]) aus Korea von Phyöng-Yang im

---

[1]) SCHIMPER, Traité, Tom. II, pag. 384.

[2]) Fossile Hölzer der arctischen Zone. Zürich, 1882.

[3]) Fossile Hölzer aus der Sammlung der geol. Landesuntersuchung. Berlin, 1882.

[4]) Untersuchungen über fossile Hölzer. 3:tes Stück. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch., Jahrg. 1887, p. 518.

Nordwesten der Halbinsel eine von GOTTSCHE »im Tertiär oder in der Trias» gesammeltes Holz als *Araucarioxylon Koreanum*. Durch die freundliche Mittheilung von Dr. FELIX habe ich dessen Originale gesehen, sie stimmen vollständig mit dem Holze aus Spitzbergen überein. Das Holz hat also einen grossen Verbreitungsbezirk, von Salzgitter bis 78° n. Br. (Spitzbergen) und von da nach Korea. Es ist dies allerdings eine sehr lückenhafte Verbreitung, sie deutet aber darauf hin, dass in den dazwischen liegenden Regionen das Holz oder die dazu gehörige Conifere vorkommen wird, wie ja Jurabildungen in Sibirien nicht fehlen. Etwas Auffallendes hat diese Verbreitung deshalb nicht, weil eine nicht geringe Anzahl von Jurapflanzen über einen grossen Theil oder über die ganze nördliche Halbkugel verbreitet ist. Es frägt sich nun, mit welcher der aus der arctischen Region bekannten Coniferen das Holz in Verbindung gebracht werden kann. Die Fundstelle des Holzes gehört nach brieflicher Mittheilung Professor Dr NATHORST's nicht dem Tertiär, sondern der oberjurassischen Schichtenfolge von Cap Staratschin und Green Harbour an. Aus dieser Schichtenfolge sind bekannt: *Araucarites Nordenskiöldi* HEER, *Sequoia Reichenbachi* HEER, *S. rigida* HEER, *S. fastigiata* HEER, *Pinus Peterseni* HEER, *P. Quenstedti* HEER und *P. Staratschini* HEER, von HEER als der Kreide angehörig betrachtet. Dass in einer jurassischen Bildung Hölzer mit Araucarienstructur vorkommen, ist nicht auffallend, beweist indess Nichts für das Vorkommen von *Araucaria*, da unter den recenten Gattungen *Dammara*, unter den fossilen noch andere Gattungen den gleichen Bau besitzen. Nun kommt in den gleichaltrigen Lagern bei Green Harbour ein Zapfen vor, welcher zwar schlecht erhalten doch einen Araucarienzapfen vermuthen lässt und NATHORST hat am Cap Staratschin Zweige mit noch anhaftenden Zapfen der muthmasslichen *Sequoia Reichenbachi* HEER (non GEINITZ) gefunden, welche darlegen dass HEER's Bestimmung unrichtig war und die betreffende Conifere entweder einer *Araucaria* oder einer damit nahe

verwandten Conifere gehören dürfte[1]), wie ich selbst dies für die sibirischen *Elatides* ausgesprochen habe. Sodann ist es bekannt dass Araucarien dem Jura nicht fehlen. In diesem Falle würden wir in *Araucarioxylon latiporosum* KRAUS das Holz einer *Araucaria* haben. Was die ausserdem angegebenen *Pinus*-Arten betrifft, so ist es nicht möglich nach dem dürftigen Erhaltungszustand sicher über die Gattung zu urtheilen, die Reste besagen weiter Nichts als dass es lineare Blätter sind. Dergleichen Blätter kommen auch anderen jurassischen Gattungen an.

Den vorausgehenden Erörterungen ist noch beizufügen, dass das Holz von Green Harbour eine Æhnlichkeit mit *Protopitys* zeigt. Ich habe diese in GÖPPERT'schen Originalen untersucht und halte sie im Gegensatz zu SOLMS und KRAUS, welche beide geneigt sind sie als das Holz einer Archegoniate anzusehen, für ein Coniferenholz und zwar für ein solches von ziemlich schlechter Erhaltung, wie es auch *Araucarioxylon latiporosum* ist. Dass das Holz von Spitzbergen ebenfalls zu den weniger gut erhaltenen gehört, ergiebt sich aus den zahlreichen kleineren oder grösseren Lücken des Gewebes, der Isolirung und Unvollständigkeit zahlreicher Tracheiden, die zum Theile unveränderten an dem oberen und unteren Rande abgeplatteten Tüpfel neben den quergezogenen, den grossen Tüpfeln der Zellen des Strahlenparenchyms, welche meist die ganze Tracheidenbreite einnehmen. Zu All' Diesem kommt dann noch die dünnwandige Beschaffenheit der Gewebe. Ich bezweifle nicht, dass die quergezogenen Tüpfel von *Protopitys* einem gleichen Erhaltungszustand entsprechen, ebenso die dünnen Wände und was ebenfalls dafür spricht die zahlreichen Gewebelücken und Stellen weit gehender Zerstörung. Wie bei den Coniferen der Radialmesser der Zellen des Strahlenparenchyms grösser als der senkrechte ist, so ist dies auch bei *Protopitys* der Fall.

Ein zweites Holz ist von CRAMER als *Pinites cavernosus* beschrieben. Nach CRAMER's Anschauung zeichnet sich das-

[1]) A. G. NATHORST, Redogörelse för den tillsammans med G. DE GEER år 1882 företagna geologiska expeditionen till Spetsbergen. Bihang till K. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Bd 9, N:o 2, pag. 32.

selbe durch eigenthümliche, kurze cylindrische Harzbehälter aus, von welchen auch der Name geschöpft ist. Die Radialtüpfel der Tracheiden sind kreisrund, sie stehen einzeln oder paarweise und opponirt, die Tüpfel der Zellen des Strahlenparenchyms rundlich, zu drei bis vier auf die Breite der Tracheide. Bei der Auffassung der Lücken als Harzlücken musste CRAMER die Bezeichnung *Pinites* GÖPPERT anwenden und das Holz jenem der Fichten, Lärchen und Kiefern analog betrachten, welche sämmtlich Harzgänge führen. Die von CRAMER angenommene Deutung der Gewebelücken kann ich nicht theilen, die verschiedene Grösse, ihre Wände, welche keine Spur der Auskleidung solcher Secretbehälter besitzen, sprechen gegen eine solche Deutung, ich sehe in ihnen durch Fäulniss entstandene Lücken, zu welchen auch die ungleiche Grösse passt. Harzführendes Parenchym wird von CRAMER nicht angegeben, ich habe keines gefunden. Das Fehlen von Harzgängen, von Harz führendem Parenchym oder ihr sparsames Vorkommen, die kreisrunden, meist einreihigen Tüpfel sprechen für ein Holz aus den Gruppen der Tannen, Cedern und Balsamtannen und würde demnach das Holz zur Gruppe *Cedroxylon* KRAUS gehören. Die von HEER beschriebenen *Pinus*-Arten könnten immerhin mit dem Holze in Zusammenhang stehen, wenn überhaupt aus den Nadeln ein sicherer Schluss zu ziehen wäre. Von NATHORST sind im oberen Jura von Cap Staratschin und Advent Bay Zapfen von *Schizolepis* und *Cedrus*-ähnliche Kurztriebe gefunden, deren Nadeln, wenn fragmentarisch und isolirt, wohl für *Pinus*-Nadeln gehalten werden können. Da Hölzer mit dem Baue von *Cedroxylon* schon im Rhät auftreten und durch den Jura vorkommen, so wäre es desshalb immerhin möglich, dass *Cedroxylon cavernosum* das Holz von *Schizolepis* ist. Die schlechte Erhaltung des Holzes verräth sich durch eine ähnliche Beschaffenheit der Gewebe wie bei der vorhergehenden Art, die Tüpfel sind meist nicht sichtbar oder nur leicht contourit, sämmtliche Wände sehr dünn auch jene des Herbstholzes, welche mehr durch den geringen Radialmesser, als durch die Wanddicke erkannt werden, endlich durch vielfache

Störungen in der Anordnung der Gewebe. Schwerlich wird das Holz von dem folgenden zu trennen sein.

Die dritte von CRAMER unterschiedene Art, *Pinites pauciporosus*, ist gleichfalls nicht besonders gut erhalten. Die Radialtüpfel sind kreisrund, einreihig, ziemlich entfernt stehend, die Markstrahlen zwei bis sieben Zellen hoch. Harzführende Zellen und Harzgänge fehlen. Das Holz wird, insofern der Erhaltungszustand ein Urtheil zulässt, von *Cedroxylon* nicht zu trennen sein. Dabei lässt sich allerdings nichts Näheres über die mit ihm zusammengehörige Conifere sagen, wir sind auf die oben verzeichneten Reste beschränkt. Der Artenname, welchen CRAMER dem Holze gab, ist Erhaltungszustand oder bedingt durch die locale Vertheilung der Radialtüpfel, welche bei allen Coniferen auf den Tracheidenwänden ungleich vertheilt vorkommen, an einzelnen Stellen reichlich, an anderen fehlen oder sparsam vorhanden sind. Seine Erhaltung ist dieselbe wie bei den übrigen und lässt vermuthen, dass schon vor dem Versteinungsprocesse die Zerstörung Fortschritte gemacht hatte. Welchen Theilen der Stammpflanzen die Hölzer angehört haben ist mit Sicherheit kaum zu bestimmen, da die Gewebe durch Verrottung alterirt sind. Indess würde ich doch sämmtliche für Wurzelhölzer halten, da die Zahl der Herbstholzzellreihen bei allen eine sehr geringe ist und mehr als fünf Reihen von mir nicht gesehen sind. Die Dicke der Wände kann aus dem angegebenen Grunde Nichts entscheiden. Der verschiedene Durchmesser der einzelnen Stücke lässt auf die Herkunft von Stammtheilen verschiedenen Alters, einzelne verzweigte Stücke lassen auf die Abstammung von Verzweigungen schliessen.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 4.)

Utgifvarne.

Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. (2) 3 (1889): 1—4. Sthm. 8:o.

American journal of science, ed. by J. D. and E. S. DANA. (3) Vol. 37: N:o 217—222; 38: 223-228. (1889). New Haven. 8:o.

Författarne.

CHARLIER, C. V. L., Über die Anwendung der Sternphotographie zu Helligkeitsmessungen der Sterne. Lpz. 1889. 4:o.

ENESTRÖM, G., Bibliographie Suédoise de l'histoire des mathématiques. 1667—1888. Sthm 1889. 8:o.

LJUNGMAN, J. W., De stora hafsfiskena, betraktade från nationalekonomisk synpunkt. Sthm 1889. 8:o.

SJÖGREN, A., Om utsigterna för den svenska jernhandteringen. Filipstad 1889. 12:o.

WITTROCK, V. & NORDSTEDT, O., Algæ aquæ dulcis exsiccatæ præcipue Scandinavicæ . . . Fasc. 21. Holmiæ 1889. 8:o.

CONIEL, J., Coordonnées héliocentriques de Jupiter. Paris 1889. 8:o.

DRZEWICKI, G., Les oiseaux considerés comme aëroplanes animés. Clermont 1889. 8:o.

FREDERICQ, L., Travaux du laboratoire de L. Fredericq. T. 2 (1887/88). Liège. 1888. 8:o.

PETERSEN, C. G. J., Det videnskabelige Udbytte af Kanonbaaden »Hauchs» Togter i de Danske Have indenfor Skagen, 1883/86. 2: Text & Atlas. Kjöbenh. 1889. 4:o & Fol.

WEYER, G. D. E., Prüfung der Poisson'schen Deviationstheorie für die Schiffskompasse durch Beobachtungen. Berlin 1889. 4:o.

Stockholm 1890. Kongl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 2.

Onsdagen den 12 Februari.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot, f. d. Professorn vid Upsala universitet PEHR ERIK BERGFALK, samt utländske ledamoten Civilingeniören GUSTAVE ADOLPHE HIRN med döden afgått.

Enligt tillstyrkan af utsedde komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar: 1:o) »Bidrag till sydöstra Sveriges (Smålands, Östergötlands och Gotlands) Hieracium-flora. I. Piloselloidea», af Hr HUGO DAHLSTEDT; 2:o) »Ueber die Reste eines Brotfruchtbaums (Artocarpus) aus den cenomanen Kreideablagerungen Grönlands», af Prof. A. G. NATHORST.

Reseberättelser hade inkommit från hortikultören C. V. HARTMAN, hvilken såsom byzantinsk stipendiat i Tyskland, Frankrike och Amerika studerat ciderberedning, fruktkonserve-

ring och fröodling, samt af Dr F. LAURELL, som, med understöd af Akademien, idkat dendrologiska studier i Östergötland, på Gotland, i Skåne och trakten af Göteborg.

Hr WITTROCK dels redogjorde för innehållet af hortikultören HARTMANS reseberättelse och af Hr DAHLSTEDTS ofvannämnda afhandling, dels meddelade en uppsats af Läroverksadjunkten P. J. HELLBOM: »Bornholms Laf-flora» (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.), samt dels förevisade och förklarade fasciklarne 13—21 af exsiccatverket »Algæ aquæ dulcis exsiccatæ» af V. B. WITTROCK och O. NORDSTEDT.

Hr DUNÉR refererade innehållet af en af honom sjelf författad uppsats om resultaten af de undersökningar öfver solens rotation, hvilka han under åren 1887—1889 utfört på Lunds observatorium med ett af stiftelsen »Lars Hjertas minne» bekostadt diffraktionsspektroskop.*

Hr GYLDÉN meddelade en uppsats af Docenten C. V. L. CHARLIER: »Om expositionstidens inflytande vid uppkomsten af den fotografiska bilden af en stjerna».*

Sekreteraren öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar och uppsatser: 1:o) »Détermination expérimentale des éléments principaux d'une lentille divergente», af Docenten C. A. MEBIUS*; 2:o) »Derivat af svafvelurinämnen. II», af Filos. Kandidaten A. D. HECTOR*; 3:o) »Om $\beta_1 = \alpha_1$-bromnaftalinsulfonsyran, samt om konstitutionen hos de syror, som bildas vid inverkan af koncentrerad svafvelsyra på β-naftylamin», af Filos. Kandidaten S. FORSLING*; 4:o) »Försök öfver den atmosferiska luftens fuktighet», af Läroverksadjunkten K. H. SOHLBERG*; 5:o) »Anatomiska studier öfver de florala axlarne hos diklina fanerogamer», af Filos. Kandidaten A. Y. GREVILLIUS (se Bihang etc.).

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfullt originalarbete beslöt Akademien öfverlemna åt Professor T. THORELL för hans under nästlidne år i Genua utgifna arbete: »Aracnidi Artrogastri Birmani, raccolti da L. Fea nel 1885—1887».

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfull öfversättning till svenska språket tillerkändes Professor A. G. NATHORST för den af honom under förra året utgifna bearbetade öfversättningen af M. NEUMAYRS »Erdgeschichte» med särskild hänsyn till Nordens urverld.

De *Letterstedtska* räntemedlen för maktpåliggande undersökningar skulle ställas till Professor P. G. ROSÉNS förfogande för anställande af pendel-iakttagelser i Sala grufva.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

H. MAJ:T KONUNGEN.
MARTIUS, C. F., EICHLER, A. G., URBAN, J., Flora Brasiliensis. Fasc. 105—107. Lipsiæ 1889—90. Fol.

Stockholm. *K. Vitterhets-, historie- och antiqvitets-akademien.*
Antiqvarisk tidskrift. D. 10: H. 5. 1889. 8:o.

— *Geologiska föreningen.*
Förhandlingar. Bd 11 (1889). 8:o.

Sachsen. Geologische Landesuntersuchung.
Geologische Specialkarte, bearbeitet unter Leitung von H. CREDNER. Bl. 16—17, 32, 48, 102—103, 130, nebst Erläuterungen. 1889. Fol. & 8:o
Die geologische Landesuntersuchung des Königreiches Sachsen im Jahre 1889. Lpz. 8:o.
Småskrifter. 36 st. 8:o.

Kristiania. *Justervæsenet.*
Aarsberetning. 13 (1889). 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahr 1889: 22—38. 8:o.

Bruxelles. *Société Belge de géologie, de paléontologie & d'hydrologie.*
Bulletin. T. 1(1887)—2(1888). 8:o.

— *Société Belge de microscopie.*
Bulletin. Année 14(1887/89)—15(1889/90): N:o 1—11. 8:o.

Cambridge, U. S. *Museum of comparative zoology at Harvard college.*
Bulletin. Vol. 16: N:o 6; 17: 6. 1889. 8:o.
Annual report. Year 1888/89. 8:o.

— *Cambridge entomological club.*
Psyche, a journal of entomology. Vol. 5: N:o 153—164. 1889. 8:o.

Edinburgh. *R. Physical society.*
Proceedings. Vol. 10: P. 1(1888/89). 8:o.

Frankfurt a/M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Bericht. Jahr 1889. 8:o.

Freiburg i/B. *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd. 1—2: H. 1—4; 3: 1—2; 4: 1—5. 1886—89. 8:o.

Hamburg. *Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung.*
Verhandlungen. Bd. 6(1883/85). 8:o.

Helsingfors. *Societas pro fauna & flora Fennica.*
Acta. Vol. 5: P. 1. 1888. 8:o.
Meddelanden. H. 15. 1888—89. 8:o.
Herbarium musei Fennici. Ed. 2. P. 1. 1889. 8:o.
Hjelt, H., Notæ conspectus floræ Fennicæ. Hforsiæ 1888. 8:o.

Innspruck. *Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg.*
Zeitschrift. (3) H. 33(1889). 8:o.

Kharkow. *Société des naturalistes à l'université Impériale.*
Trudi. — Travaux. T. 17(1883)—22(1888). 8:o.
Gornitschki, K. S., Spisok . . . — Förteckning öfver Ryska och några främmande växtnamn. Kharkow 1887. 8:o.
— Sametki . . . — Anteckningar om nyttan af några vilda och odlade växter i den Ukränska floran. Kharkow 1887. 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. — Comptes rendus des séances. Année 1889: N:o 1, 3—6, 8—10.

Leipzig. *Verein für Erdkunde.*
Mittheilungen. Jahr 1886: H. 1—3; 1887—1888. 8:o.

London. *Chemical society.*
Journal. Vol. 55—56(1889): N:o 315—326: a, b. 8:o.
Abstracts of the proceedings. Vol. 5(1889): N:o 61—75. 8:o.
List of officers and fellows. 1889. 8:o.

Melbourne. *Government observatory.*
Results of astronomical observations made in the years 1881—1884. 1888. 8:o.

Newcastle upon Tyne. *Natural history society of Northumberland, Durham and Newcastle upon Tyne.*
Natural history transactions. Vol. 8: P. 3. 1889. 8:o.

Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Jahresbericht 1888 und Abhandlungen. Bd. 8: Bogen 5—7. 1889. 8:o.

Paris. *Comité international des poids & mesures.*
Conférence générale 1889 Sept. 1889. 4:o.
— *Ministère des travaux publics.*
Annales des mines. (8) T. 14: L. 1—3; 15: 1—3. 1888—89. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 9(1888): Trim. 1—4. 8:o.
Compte rendu des séances. Année 1889: N:o 1—17. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
Bulletin. Année 9(1886/87): Sem. 1—2; 10—11: 1—2; 12(1889/90): 1. 8:o.
Feuille des jeunes naturalistes. Année 17(1886/87)—19: N:o 217—228; 20(1889/90): 229—232 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 1—7. 1887—89. 8:o.
— *Société Linnéenne.*
Bulletin mensuel. N:o 95—97; 100. 1888—89. 8:o.

(Forts. å sid. 22.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 2.
Stockholm.

Sur la rotation du Soleil.

Par N.-C. DUNÉR.

[Note communiquée le 12 Février 1890.]

Pendant les étés de 1887, 1888 et 1889, j'ai fait des recherches sur la rotation du soleil, à l'aide d'un spectroscope à réseaux de diffraction de ROWLAND[1]), appliqué au réfracteur de l'observatoire de Lund. Ce spectroscope est d'une si grande puissance optique, qu'on peut, à son aide, déterminer la différence en longueur d'onde de deux raies voisines du spectre solaire, avec une telle exactitude, que l'erreur probable du résultat, obtenu pendant un été, n'atteigne pas 0,0000000002 millimètre. Par conséquent, on pourrait bien espérer d'obtenir, par une recherche soignée du déplacement des raies spectrales, sur des points opposés du bord solaire, des valeurs de la vitesse avec laquelle ces points s'approchent ou s'éloignent de la terre, assez exactes pour parvenir à la connaissance des lois de la rotation du soleil, même dans les latitudes héliocentriques élevées où l'on n'a jamais vu de tache. Je crois ne pas trop dire, en prétendant que cet espoir s'est réalisé. Je publierai autre part les détails complets de ces observations; ici, je n'en communique que les résultats.

Il me faut, cependant, dire quelques mots sur la méthode dont je me suis servi pour trouver le déplacement des raies

---

[1]) Je dois cet instrument à la fondation »Lars Hjertas Minne» à Stockholm dont le conseil d'administration a mis, en 1884, une somme d'environ 5000 francs à ma disposition, pour être employée à sa construction.

spectrales. Vu l'exactitude supérieure qu'on obtient en général par des observations différentielles, j'ai arrangé mes observations de la sorte, que je n'aie pas eu à faire que des mesures micrométriques entre des raies spectrales dont les longueurs d'onde ne diffèrent que d'une unité d'ÅNGSTRÖM à peu près. C'est que j'ai mesuré, sur des points opposés du bord solaire, les distances entre les raies spectrales suivantes, appartenantes au groupe α du spectre solaire:

Longueurs d'onde:		Origine des raies:
d'après DUNÉR	d'après CORNU	
6301,72	6300,10	Fer, solaire,
6302,21	6300,66	Oxygène, tellurique,
6302,72	6301,11	Fer, solaire,
6302,97	6301,43	Oxygène, tellurique.

A ces observations, j'avais calculé d'avance les différences en déclinaison entre les bords solaires, boréal ou austral, et les points sur lesquels devaient se porter mes mesures, et j'ai dirigé sur eux l'instrument, en me servant des microscopes du cercle de déclinaison. Pour trouver le facteur, à l'aide duquel on réduit en longueurs d'onde les différences, exprimées en parties des tours de la vis micrométrique, qu'on obtient immédiatement par l'observation, j'ai mesuré aussi les distances entre 11 raies, situées entre 6252 et 6338 et dont les longueurs d'onde ont été très exactement déterminées par M. le prof. H. ROWLAND à Baltimore.

Les résultats de mes mesures sont donnés dans la table suivante où φ est la latitude héliocentrique des points sur le bord solaire, v la vitesse en kilomètres avec laquelle le point sur le bord est se rapproche de la terre, e l'erreur probable de v, et n le nombre des series de mesures que j'ai prises dans les années différentes.

φ	v	e	n	*An.*
0,3	1,90	± 0,018	49	1888
0,4	2,05	± 0,028	24	1889
0,6	1,99	± 0,020	34	1887
14,9	1,85	± 0,024	37	1887
15,0	1,92	± 0,021	24	1889
15,2	1,77	± 0,021	43	1888
29,9	1,55	± 0,020	51	1888
30,0	1,56	± 0,026	29	1887
30,1	1,64	± 0,027	24	1889
44,9	1,16	± 0,021	49	1888
44,9	1,19	± 0,024	24	1889
45,3	1,21	± 0,030	33	1887
59,9	0,70	± 0,017	46	1888
60,0	0,77	± 0,023	38	1887
60,0	0,74	± 0,025	23	1889
74,7	0,32	± 0,029	37	1887
74,8	0,39	± 0,014	47	1888
75,0	0,32	± 0,025	23	1889.

Quand même les erreurs probables de ces moyennes ont des grandeurs assez différentes, je n'ai pas cru devoir les prendre en considération à la formation des positions normales, les erreurs systématiques dans les années particulières étant plus fortes que les erreurs accidentelles. En attribuant à toutes les moyennes le même poids, j'ai trouvé les suivantes valeurs normales de v, de ξ Cos φ et de ξ, ξ étant l'angle de rotation en 24 heures:

φ	v	ξ Cos φ	ξ	n
0°,4	1,98	14°,14	14°,14	107
15 ,0	1,85	13 ,19	13 ,66	104
30 ,0	1,58	11 ,31	13 ,06	104
45 ,0	1,19	8 ,48	11 ,99	106
60 ,0	0,74	5 ,31	10 ,62	107
74 ,8	0,34	2 ,45	9 ,34	107

Ces valeurs de ξ, déduites des observations spectroscopiques, confirment assurément ce qu'avaient révelé les observations sur

les taches, à savoir que le temps de rotation des différentes zones de la surface solaire n'est pas le même, mais que la zone équatoriale fait un tour entier dans le temps le plus court, et que le temps de rotation augmente avec la latitude. Mais tandis que les taches qu'on a pu observer pendant plus d'une révolution, et qui par conséquent se prètent avec avantage aux recherches sur la rotation du soleil, ne se sont présentées que tout exceptionnellement au delà de 35° de latitude et jamais au delà de 45°, et que la latitude la plus élevée où l'on a vu une tache n'atteigne pas les 55°, et que par conséquent on n'a jusqu' à présent su rien sur la rotation des deux calottes entre 55° et les poles, mes observations étendent notre connaissance de ces faits jusqu'à la latitude de 75°, donc jusqu'au voisinage immédiat des poles.

J'ai employé les valeurs des $\xi \operatorname{Cos} \varphi$ pour déduire des formules qui donnent les valeurs de l'angle de rotation en fonction de la latitude héliocentrique. On sait que M. FAYE a, dans les recherches qu'il a faites sur ce sujet, adopté la forme

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [a - b \operatorname{Sin} \varphi^2] \operatorname{Cos} \varphi,$$

ou ce qui revient au même:

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [a' + b' \operatorname{Cos} \varphi^2] \operatorname{Cos} \varphi,$$

tandis que M. SPÖRER donne la préférence à la très simple forme

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [a + b \operatorname{Cos} \varphi] \operatorname{Cos} \varphi,$$

déjà proposée par M. C.-H.-F. PETERS. Mais en outre M. SPÖRER a employé la forme

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [a + b \operatorname{Cos} \varphi + c \operatorname{Sin} \varphi] \operatorname{Cos} \varphi,$$

ou bien

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [a + b \operatorname{Cos} \varphi] \operatorname{Cos} \varphi + c' \operatorname{Sin} 2\varphi.$$

J'ai fait application de toutes ces trois formes aux valeurs de $\xi \operatorname{Cos} \varphi$, fournies par mes observations, et j'ai trouvé, par la méthode des moindres carrés:

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [14°,077 - 4°,535 \operatorname{Sin} \varphi^2] \operatorname{Cos} \varphi \qquad \text{(I)}$$

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [7°,286 + 6°,723 \operatorname{Cos} \varphi] \operatorname{Cos} \varphi \qquad \text{(II)}$$

$$\xi \operatorname{Cos} \varphi = [8°,596 + 5°,522 \operatorname{Cos} \varphi - 0°,759 \operatorname{Sin} \varphi] \operatorname{Cos} \varphi \qquad \text{(III)}$$

En comparant ces formules avec les observations, on obtient les erreurs résiduelles suivantes, e', e'', e'''.

φ	e'	e''	e'''
0°,4	+ 0°,06	+ 0°,13	+ 0°,03
15 ,0	— 0 ,12	— 0 ,12	— 0 ,07
30 ,0	+ 0 ,09	— 0 ,04	+ 0 ,05
45 ,0	+ 0 ,12	— 0 ,03	+ 0 ,02
60 ,0	— 0 ,03	— 0 ,01	— 0 ,04
74 ,8	— 0 ,13	+ 0 ,08	+ 0 ,01.

La somme des carrés de ces erreurs résiduelles est resp. 0°,0583, 0°,0403 et 0°,0104. L'accord de la formule III avec les observations est donc considérablement meilleur que celui des deux autres formules. Cependant, il faut avouer, que les erreurs résiduelles de la formule II et même celles de la formule I ne surpassent guère les erreurs probables des observations. La comparaison entre les observations spectroscopiques et les observations sur les taches montre que celles-la donnent une vitesse de rotation un peu plus petite que celles-ci.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 16.)

Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1889: P. 2. 8:o.

Prag. *K. K. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen. Jahrg. 46—48: Appendix. 4:o.

S:t Petersburg. *Société Imp. géographique de Russie.*
Isvestia. T. 23(1887): V. 6; 24(1888): 1–6; 25(1889): 1–6. 8:o.
Otschetie. 1887—1888. 8:o.

Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 50(1889): N:o 1–12. 8:o.

Stuttgart. *K. Öffentliche Bibliothek.*
Wirttembergisches Urkundenbuch. Bd. 5. 1889. 4:o.

Tokio. *Imp. university of Japan.*
Journal of the college of science. Vol. 3: P. 3. 1889. 4:o.

Wien. *Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 39(1889): Qv. 3–4. 8:o.

Utgifvarne.

HÖPKEN, A. J., Skrifter, utg. af C. SILFVERSTOLPE. Bd. 1. Sthm. 1890. 8:o.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Hrsg. von K. GÖBEL. Jahrg. 72(1889): H. 1–5. Marburg. 8:o.

Författarne.

BERGSTRAND, C. E., Om undersökningen af landtbruksprodukter .... Sthm 1889. 8:o.

KROK, TH. O. B. N., Svensk botanisk literatur. 1888. Lund 1889. 8:o.

LECHE, W., H. G. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreichs. Bd. 6: Abth. 5. Mammalia. Fortgesetzt von W. L. L. 32–34. Heidelb. 1889. 8:o.

NILSON, L. F. & PETTERSSON, O., Die Molekulargrösse des Aluminiumchlorids. Lpz. 1889. 8:o.

— Småskrifter. 12 st. 8:o.

BURMEISTER, H., Los caballos fossiles de la pampa Argentina. Suplemento. Buenos Aires 1889. Fol.

CONWENTZ, H., Die phytopaläontologische Abtheilung des naturhistorischen Reichsmuseums in Stockholm. Lpz. 1889. 8:o.

HERMITE, C., Sur la transformation de l'intégral elliptique de seconde espèce. Paris 1889. 4:o.

— Småskrifter. 2 st.

v. MÜLLER, F., Fragmenta phytographiæ Australicæ. Vol. 4. Melbourne 1863. 8:o.

— Records of observations on Sir WILLIAM MAC GREGOR's higland-plants from New Guinea. 1889. 4:o.

SCHLUMBERGER, L. G., Sur un nouveaux Pentellina. Paris 1883. 8:o.

— Småskrifter. 6 st.

SCHWARZ, L., Eine Studie auf dem Gebiete der practischen Astronomie. Dorpat 1889. 4:o.

STRUWE, L., Bestimmung des Mondhalbmessers aus den während der totalen Mondfinsterniss 1884 $^{4}/_{10}$ beobachteten Sternbedeckungen. Dorpat 1889. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 2.
Stockholm.

Om expositionstidens inflytande vid uppkomsten af den fotografiska bilden af en stjerna.

Af C. V. L. Charlier.

[Meddeladt den 12 Februari 1890 genom H. Gyldén.]

Det sätt, på hvilket bilden af en stjerna på en fotografisk plåt tillväxer med expositionstiden, är af stor vigt att lära känna för fotografins användning inom astronomin.

Jag tänker härvid ej blott på det teoretiska intresset att få kännedom om ljusets verkningssätt vid den fotografiska (stjern)-bildens uppkomst, utan ock på de konsekvenser, som med stjernfotografins hjelp en gång skola dragas angående himlakropparnes fördelning i den oss närmast liggande delen af universum.

Emellertid synes frågan ej vara så lätt att lösa. Bond i Amerika fann 1858 att diametern till bilden af en stjerna växer proportionelt mot kvadratroten ur expositionstiden. Prof. Pritchard i Oxford fann 4:de roten i stället för kvadratroten. Samma resultat lemnade observationer gjorda vid Stockholms observatorium. Deremot fann M. Turner ur observationer utförda vid observatoriet i Greenwich att diametern syntes tillväxa närmast såsom 3:e roten ur expositionstiden (t). Dessa exempel hafva dock alla gemensamt, att diametern växer proportionelt mot någon bruten potens af t.

Men ej heller detta är alltid fallet. Så t. ex. visa de plejad-fotografier, som Dr Scheiner i Potsdam har uppmätt, och hvilka blifvit utförda dels der och dels på privatobservatoriet

Herény i Ungern, ej någon dylik enkel lag för diameterns tillväxt med expositionstiden.

Då frågan om den fotografiska bildens beroende på expositionstiden sålunda synes vara i temligen outredt skick, tror jag att följande undersökniug ej skall sakna sitt intresse.

I en afhandling i »Publicationen der astronomischen Gesellschaft» har jag sökt visa att det existerar ett enkelt samband mellan storleken af en stjernas fotografiska bild och stjernans ljusstyrka. Nämligen så att om m betecknar stjernans »storhetsordning» och D bildens diameter, så är

$$m = a - b \log D.$$

Här beteckna a och b vissa tal, som äro, för en viss expositionstid, bestämda och lika för alla stjernor på *samma* plåt.

Rigtigheten af denna formel (naturligtvis betraktad som en första approximation till den rigtiga) tror jag vara tillräckligt säkert ådagalagd, så väl genom de experiment, som ligga till grund för nämnda afhandling, som ock genom användning på observationer från annat håll. Deremot är det sätt, på hvilket a och b variera med expositionstiden, ej tillräckligt fullständigt utredt. Jag fann ur observationer här att

$$a = a_0 + 1{,}69 \log t$$
$$b = \text{konstant}.$$

Men dels voro de här använda plåtarna ej tagna särskildt med hänsyn till utrönande af den inverkan en förändring af expositionstiden utöfvar på värdet af dessa konstanter, utan voro fastmera afsedda att styrka att de verkligen för hvarje plåt voro konstanta. Och dels behöfdes det för bevisande af rigtigheten af dessa formler (framför allt $b =$ konstant) en jemförelse med observationer på annat håll, enär de här använda plåtarne möjligen kunde hafva någon egenskap, som skymde den allmänna karakteren hos dessa tal.

För att åtminstone provisoriskt komplettera dessa undersökningar, har jag beräknat a och b för de förut omnämnda mätningarna af Dr SCHEINER. Jag sammanstälde de af honom beräknade diametervärdena i 4 grupper, sammanfallande med de

fyra första grupperna p. 53 hos SCHEINER (A. N., N:o 2884). För dessa grupper erhöllos medeltal för stjernstorleken enligt mina värden för plejadstjernornas ljusstyrka i »Über die Anwendung der Sternphotographie etc.» Jag erhöll sålunda följande system af värden på stjernstorleken (m) och diametern D:

	m	D_1	D_2	D_4	D_8	D_{16}
I	8,44	8,9	12,1	13,7	16,8	18,9
II	7,66	12,5	15,5	16,8	20,1	21,8
III	6,77	16,6	19,8	20,3	23,2	25,0
IV	5,95	21,2	23,2	24,9	27,7	29,5.

Index vid D betecknar expositionstiden i minuter, så att t. ex. under D_8 stå de diametervärden som erhöllos i medeltal för de olika grupperna vid 8 minuters expositionstid.

För hvarje värde af expositionstiden (t) beräknades nu konstanterna a och b i formeln

$$m = a - b \log D$$

och erhölls dervid

t	a	b
1	14,96	6,76
2	17,91	8,69
4	19,75	9,91
8	23,34	12,11
16	25,43	13,30.

Man finner sålunda att såväl a som b förändras för dessa plattor. Nu är det antagligt att för a gäller formeln

$$a = a_0 + \lambda \log t,$$

och samma formel kan ock användas för utjemning af b-värdena

$$b = b_0 + \mu \log t;$$

man finner nu

$$a_0 = 14,80 \qquad \lambda = 9,10$$
$$b_0 = 6,76 \qquad \mu = 5,64.$$

Dervid erhöllos för de olika expositionstiderna följande värden på a_0 och b_0, hvilka anges för att ge ett uttryck för bestämningens noggranhet:

a_0	$-b_0$
14,96	6,76
15,17	6,79
14,27	6,51
15,12	7,01
14,47	6,53.

Måhända af en tillfällighet utkom värdet på b_0 nära identiskt med det värde på b, som jag erhöll för de i Stockholm använda plattorna.

Af den erhållna formeln för m får man den lag, enligt hvilken D varierar med expositionstiden, nämligen

$$D = 10^{\frac{a_0 + \lambda \log t - m}{b_0 + \mu \log t}}, \tag{2}$$

som vi ock kunna skrifva under formen

$$D = D_1 \, 10^{\frac{r \log t}{1 + s \log t}}, \tag{3}$$

der D_1 betecknar stjernans diameter efter en minuts expositionstid, samt r och s bero på a_0, λ etc.

Naturligtvis kan man ej på grund af ofvanstående tal vara viss på denna formels rigtighet, bland annat derföre att de erhållna värdena på a och b kunna utjemnas medels andra formler än dem vi antagit; men ofvanstående formel har den fördelen att den innefattar alla hittills gjorda försök att matematiskt uttrycka expositionstidens inflytande på bildens storlek.

I sjelfva verket är det tydligt att då μ är litet i förhållande till b_0 — och observationerna här i Stockholm visa att åtminstone för de här använda plattorna detta synes vara fallet — så kan man för korta expositionstider utveckla efter potenser af $\mu \log t$ och man erhåller då

$$D = D_1 t^k, \tag{4}$$

d. v. s. för kortare expositionstider, *om μ är litet*, tillväxer D prop. mot någon potens af expositionstiden. Detta var ju ock hvad som de flesta undersökningar gifvit vid handen. Men är μ stort, eger detta förhållande ej rum. Och då för de SCHEINER-

ska plattorna μ var nästan lika stort som b_0, så må det ej förvåna att (under förutsättning att (2) är rigtig) man ej för desamma kunde finna någon lag af formen (4).

Af (2) följer att D med växande expositionstid ej ökas obegränsadt, utan närmar sig gränsvärdet

$$D_{\text{max.}} = 10^{\frac{\lambda}{\mu}},$$

hvilket värde enligt (3) också kan uttryckas genom

$$D_{\text{max.}} = D_1\, 10^{\frac{r}{s}}.$$

För de SCHEINER'ska plattorna är det maximivärde, som sålunda fås $D_m = 40$ säkerligen för litet. Men med den ringa noggranhet, som ofvanstående observationsdata medgifva, kan man ej begära att värdena på λ och μ skola vara mycket säkert bestämda, och i sjelfva verket behöfs endast en obetydlig förändring i endera af dessa konstanter för att gifva t. ex. ett dubbelt så stort värde på $D_{\text{max.}}$.

Det är emellertid för en annan fråga, som värdena på λ och μ få sin största betydelse. Nämligen huru mycket skall man förlänga expositionstiden, för att erhålla stjernor t. ex. en storhetsklass svagare än man för en viss annan tid erhållit.

Det är klart att svaret på denna fråga är afgörande för bestämningen af plåtarnes så att säga astronomiska känslighet.

Antag då, att en stjerna, hvars storhetsordning är m_1 efter en expositionstid af t_1 minuter, på den fotografiska plåten gifvit upphof till en cirkelrund bild med D mm. diameter. Enligt (1) måste då mellan dessa kvantiteter existera relationerna

$$m_1 = a_0 + \lambda \log t_1 - (b_0 + \mu \log t_1) \log D.$$

Vi skola då söka den expositionstid t_2, som erfordras för att en annan stjerna af storleken m_2 skall erhålla *samma* diameter D. Då är

$$m_2 = a_0 + \lambda \log t_2 - (b_0 + \mu \log t_2) \log D.$$

och häraf

$$\log \frac{t_2}{t_1} = \frac{m_2 - m_1}{\lambda - \mu \log D}.$$

Således är denna expositionstid beroende på D samt dessutom af konstanterna λ och μ.

Nu är det tydligt att plåtarne äro till astronomiskt bruk bättre ju mindre expositionstiden behöfver ökas för att ytterligare erhålla en storhetsklass.

Om nu såsom vid Dr SCHEINERS plattor λ och μ äro positiva, så äro plattorna således i genomsnitt bättre ju större λ och ju mindre μ är.

Vidare blir kvoten $\frac{t_2}{t_1}$ uppenbarligen större ju större värde D har.

Hvad som emellertid här har det största intresset, är att känna $\frac{t_2}{t_1}$, då D har det minsta värde det öfverhufvud kan hafva för att en stjerna skall blifva synlig. Kalla detta D_0, så är

$$\frac{t_2}{t_1} = 10^{\frac{1}{\lambda - \mu \log D_0}}$$

det uttryck, som ger oss expositionstidens förökning för att på plåten skall framträda stjernor en storhetsklass svagare än för tiden t_1. Och vi se att detta förhållande blir konstant.

För de GOTHARD'ska plattorna skulle man t. ex. enligt ofvanstående värden på λ och μ och med antagande af $D_0 = 10$, erhålla

$$t_2 = 1{,}95\, t_1,$$

d. v. s. om t fördubblas erhåller man en storhetsklass mera. Detta visar att dessa plattor äro mycket »känsliga», enär man på grund af definitionen på storhetsklass skulle vänta att t_2 vore minst 2,5 gånger större än t_1.

Det synes mig ej omöjligt att kunna härleda lagen för stjernbildens uppkomst ur rent teoretiska (mekaniska) förutsättningar. Och hoppas jag en annan gång få återkomma till denna fråga.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 2.
Stockholm.

Détermination expérimentale des éléments principaux d'une lentille divergente.

Par C. A. Mebius.

[Présenté à l'Acad. Roy. des Sciences de Suède le 12 Février 1890 par R. Rubenson.]

Des méthodes pour déterminer expérimentalement la distance focale principale et la position des plans principaux d'une lentille se trouvent en assez grand nombre. Nous pouvons citer les méthodes de Silbermann[1]), Moser[2]), Merz[3]), Webb[4]), Valérius[5]), Donders[6]), Meyerstein[7]), Hoppe[8]), Cornu[9]), Kerber[10]), Pscheidl[11]), Hasselberg[12]). Quelques-unes de ces méthodes ne se rapportent qu'aux lentilles infiniment minces; la plupart sont exclusivement ou de préférence applicables aux lentilles convergentes.

---

1) Silbermann: Cours de physique par Jamin et Bouty, III: 2, p. 123. 1881.
2) Moser: Pogg. Ann. Bd. 63, p. 39, 1844.
3) Merz: Pogg. Ann. Bd. 64, p. 321, 1845.
4) Webb: Fortschritte der Physik Bd. XIII, 1859.
5) Valérius: Fortschr. d. Physik Bd. XIX, 1865.
6) Donders: Fortschr. d. Physik Bd. XXI, 1868.
7) Meyerstein: Carls Rep. XIV, 363. Wied. Ann. Bd. 1, p. 315, 1877.
8) Hoppe: Pogg. Ann. Bd. 160, p. 169, 1876.
9) Cornu: Journal de physique Ser. I, T. 6, p. 276, 308, 1877.
10) Kerber: Z. S. für Inst. kd. I, p. 67.
11) Pscheidl: Sitzungsb. d. Wiener Academie 94, p. 66, 1886. Beiblätter 11, 1887.
12) Hasselberg: Bull. de l'Ac. des Sc. de St.-Péterb. 32, p. 412, 1888. Beiblätter 12, 1888.

Celle de M. CORNU se distingue par sa grande simplicité et sa grande rigueur. Celle que je vais exposer s'en rapproche assez pour n'en être qu'une modification. Je dois d'abord rappeler en quelques mots celle de M. CORNU.

Sur le milieu des surfaces de la lentille on trace avec de l'encre de Chine des petits traits H et K (fig. 1), et on la place de facon à ce que son axe soit parallèle à une regle divisée. Le long de celle-ci glisse un microscope M, dont l'axe optique

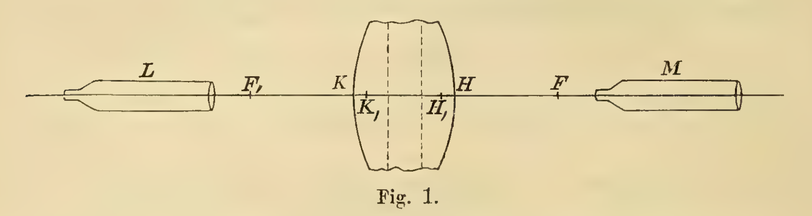


Fig. 1.

est parallèle à celui de la lentille, et avec lequel on peut viser les traits. On fait tomber sur la lentille des rayons parallèles à son axe, et cela de la manière suivante. Ou braque une lunette L, munie d'un réticule sur un objet infiniment distant, de manière à ce qu'il n'y ait point de parallaxe. Le réticule se trouve alors dans le plan focal de l'objectif. La lunette L est placée de façon à avoir son axe parallèle à celui de la lentille et son objectif tourné vers la lentille (fig. 1). Si l'on éclaire l'oculaire, le réticule émet des rayons, qui par la réfraction dans l'objectif émergent parallèlement à l'axe de la lentille. Si la lentille est convergente, le réticule donne une image réelle au foyer F. Avec le microscope on vise successivement le foyer F, le trait H et l'image K_1 du trait opposé K. Le déplacement du microscope indique ainsi les distances $FH = d$ et $HK_1 = e$. Ensuite on retourne la lentille, le réticule donne alors une image sur l'autre foyer F_1 et on détermine par le déplacement du microscope les distances $F_1K = d_1$ et $KH_1 = e_1$, où H_1 désigne l'image du trait H. D'après la formule de NEWTON on a alors

$$f^2 = d(d_1 + e) = d_1(d + e)$$

d'où l'on déduit la valeur de la distance focale principale f.

Si la lentille est divergente, il ne se produit pas d'image du réticule sur le côté de la lentille tourné vers le microscope. Le réticule donne au contraire une image virtuelle au foyer F_1. Si, dans ce cas, la distance focale principale est assez petite, on peut avec le microscope viser cette image virtuelle et la méthode est applicable comme pour les lentilles convergentes. En général il faudra cependant, dans ce cas prendre l'agrandissement du microscope plus faible que pour une lentille convergente, et par cela la précision est diminuée. Si la distance focale principale de la lentille est telle que la distance F_1H du foyer à la surface antérieure de la lentille est plus grande que la distance où il faut placer l'objet pour bien le voir au microscope, la méthode est visiblement inapplicable. Pour mesurer aussi en ce cas avec précision la distance focale principale de la lentille j'ai fait les arrangements suivants.

Le long d'une règle divisée glissent une lunette, un microscope, la lentille divergente à étudier, une lentille convergente auxiliaire et un objet lumineux. Pour ce dernier, on peut prendre par exemple une règle graduée en verre éclairée par une flamme de gaz. Tous les axes optiques sont parallèles à la règle divisée et coïncidents. Les instruments sont solidement fixés aux petits chariots, qu'on peut à volonté enlever de la règle. La lentille auxiliaire P (fig. 2) est placée de manière à

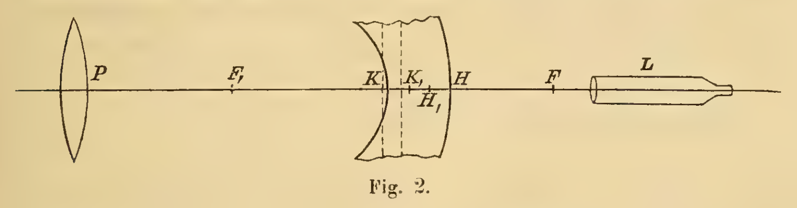


Fig. 2.

ce que l'objet lumineux donne une image réelle en F; la distance PF on peut toujours faire suffisamment grande. La lentille divergente KH est placée entre P et F et on la déplace jusqu'à ce que les rayons émergents soient parallèles. Le foyer de la lentille divergente se trouve alors aussi en F. On s'assure que cette condition est bien remplie au moyen de la lunette L.

après avoir enlevé le microscope. La lunette est munie d'un réticule et vise sans parallaxe à l'infini. Lorsque la lentille est bien installée, on voit dans la lunette une image nette de l'objet, et il n'y a pas de parallaxe. Après avoir enlevé la lunette on place le microscope sur la règle graduée. La lentille à étudier est munie de deux faibles marques à l'encre de Chine l'une K au côté postérieur (vers la lentille auxiliaire) et une autre H au côté antérieur. On note les positions du microscope, lorsqu'on voit distinctement l'image K_1 de K et la marque H. Le déplacement du microscope donne la distance $K_1H = e$. On enlève alors la lentille à étudier et l'on amène le plan de visée du microscope au point F, où se trouve l'image réelle. Alors on voit dans le microscope une image distincte de l'objet lumineux. La différence des lectures du chariot dans les deux dernières positions donne la longueur $HF = d$, c. a. d. la distance entre la surface de la lentille et le foyer.

Après avoir retourné la lentille, on recommence les mêmes opérations. Le trait H est maintenant en face de la lentille auxiliaire, et trois lectures consécutives donnent les longueurs $H_1K = e_1$ et $KF_1 = d_1$. (Si la lentille auxiliaire et l'objet sont restés fixes, on connait déjà la troisième lecture.)

Si l'on mesure en outre l'épaisseur t de la lentille on est en état de calculer les éléments principaux de celle-ci.

La précision de la mésure est considérablement augmentée si le microscope est muni d'un réticule ou d'un micromètre oculaire. L'abscence de parallaxe assure un bon ajustage.

D'après la formule de NEWTON

$$xy = f^2,$$

où x désigne la distance de l'objet à l'un foyer et y celle de l'image à l'autre, on a pour le trait H,

$$x = d_1 + t \text{ et } y = d + t - e_1;$$

et pour le trait K

$$x = d + t \text{ et } y = d_1 + t - e,$$

donc

$$f^2 = (d_1 + t)(d + t - e_1)$$

et

$$f^2 = (d + t)(d_1 + t - e).$$

Les distances des plans principaux à la surface de la lentille devant laquelle se trouve le foyer correspondant, sont

$$p = f - d \text{ et } q = f - d_1.$$

Les plans principaux se trouvent à la distance

$$r = 2f - (d + t + d_1)$$

l'un de l'autre.

Je cite un exemple numérique. Des mesures furent prises sur une lentille convexo-concave, orientée comme le montre la figure 2. On obtenait

$$d = 272{,}7 \text{ mm.} \qquad e = 1{,}1 \text{ mm.}$$
$$d_1 = 274{,}0 \text{ mm.} \qquad e_1 = 1{,}1 \text{ mm.}$$
$$t = 1{,}7 \text{ mm.}$$

On en déduit

$$f^2 = 274{,}4 \times 274{,}6 \text{ et } f^2 = 275{,}7 \times 273{,}3$$

et par suite les deux valeurs

$$f = 274{,}50 \text{ mm. et } f = 274{,}50 \text{ mm.}$$

enfin

$$p = 1{,}8 \text{ mm.} \qquad q = 0{,}5 \text{ mm.}$$
$$r = 0{,}6 \text{ mm.}$$

L'un des plans principaux se trouve donc en dehors de la lentille et à 0,1 mm de la surface concave; l'autre est situé dans l'intérieur de la lentille et à 0,5 mm de cette même surface.



Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 2.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

176. Om derivat af svafvelurinämnen. II.

Af D. S. Hector.

[Meddeladt den 12 Februari 1890 genom P. T. Cleve.]

I föregående meddelande[1]) nämde jag mig hafva för afsigt att undersöka ortotolyl- och *m*-xylyl-svafvelurinämnes förhållande till vätesuperoxid. Denna undersökning är nu afslutad och har deraf framgått, att äfven dessa till den aromatiska serien hörande svafvelurinämnen vid inverkan af vätesuperoxid gifva upphof till oiaztiolderivat enligt den förut anförda reaktionsformeln.

Di-ortotolyl-diamido-oiaztiol,

$$\begin{array}{ccc} & N\text{---}N & \\ & \| \quad\quad \| & \\ C_7H_7NH\text{---}C & & C\text{---}NHC_7H_7\,, \\ & \diagdown\; S \;\diagup & \end{array}$$

erhålles, om ortotolylsvafvelurinämne löses i en blandning af vatten och alkohol, hvarefter några droppar klorvätesyra och den beräknade mängden vätesuperoxid tillsättas och vätskan kokas några minuter. Lösningen befrias medelst filtrering från afskildt svafvel samt fälles kall med ammoniak, då ortotolylbasen utfaller som en hvit fällning, som bakar ihop sig till en klump, om lösningen är varm. Basen är mycket lättlöslig i alkohol, benzol och aceton, hvarför den är mycket svår att få kristalliserad. Vid lösningarnas frivilliga afdunstning qvarstannar den i form af en stelnad, gul olja. Analyserna utfördes derför

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 10.

å substans, flera gånger löst i klorvätesyra och fäld med ammoniak. Fällningen smälte vid 135°. Den torkades vid omkring 80°.

	Beräknadt.	Funnet.		
		I.	II.	III.
C	64,87	64,35	—	—
H	5,41	5,64	—	—
N	18,92	—	18,48	—
S	10,81	—	—	10,86.

Klorhydratet,

$C_{16}H_{16}N_4S$, $HCl + H_2O$,

kristalliserar ur vatten i kristalliniska, gråaktigt färgade druser, som vid långvarig upphettning till 110° förlora 1 mol. kristallvatten. Föreningen smälter vid 219°.

	Beräknadt.	Funnet.
H_2O	5,14	5,11
Cl	10,03	10,13.

Kloroplatinatet,

$(C_{16}H_{16}N_4S, HCl)_2 . PtCl_4$,

är kristalliniskt och till färgen gulbrunt. Det innehåller icke kristallvatten och smälter vid 192°.

	Beräknadt	Funnet.
Pt	19,46	19,65.

Silfvernitratföreningen,

$C_{16}H_{16}N_4S . AgNO_3$,

erhålles vid tillsats af silfvernitratlösning till en lösning af ortotolylbasen i alkohol som en hvit kristallinisk fällning, svårlöslig äfven i kokande alkohol. Föreningen svärtas af solljuset samt förpuffar vid upphettning.

	Beräknadt.	Funnet.
Ag	23,18	23,30.

Qvicksilfverkloridsaltet,

$(C_{16}H_{16}N_4S, HCl)_2 . HgCl_2$,

erhålles som en hvit fällning, om en koncentrerad lösning af qvicksilfverklorid nedhälles i en lösning af ortotolylbasen i klorvätesyra. Föreningen är lättlöslig i alkokol, hvarur den kristalliserar i nålar, som smälta vid 232°.

	Beräknadt.	Funnet.
Cl	15,14	15,08.

Pikratet,

$C_{16}H_{16}N_4S . C_6H_2(NO_2)_3OH$,

som erhålles, om en alkoholisk lösning af ortotolylbasn blandas med en beräknad mängd af en alkoholisk pikrinsyrelösning, hvarefter blandningen lemnas att afdunsta, kristalliserar i vackert gula kristaller, som vid 201° smälta till en mörkbrun vätska.

	Beräknadt.	Funnet.
N	18,67	18,62.

Acetyl-di-ortotolyl-diamido-oiaztiol,

```
            N——N
            ‖    ‖     /C7H7
C7H7NH—C    C—N<
            \  /       \C2H3O ,
             S
```

som erhålles på vanligt sätt af ortotolylbasen och ättiksyreanhydrid, kristalliserar ur alkohol i vackra nålar, som smälta vid 221°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	16,57	16,88.

Benzoyl-di-ortotolyl-diamido-oiaztiol,

```
            N——N
            ‖    ‖     /C7H7
C7H7NH—C    C—N<
            \  /       \C7H5O ,
             S
```

framstäld af ortotolylbasen och benzoylklorid, kristalliserar ur alkohol i fina, hvita, hopfiltade nålar, som smälta vid 214°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	14,00	13,93.

Di-ortotolyl-diamido-oiaztiol-cyanid,

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_7H_7 & & & \\
 & & & | & & & \\
N & = & C & — N — & C & = & NH \\
| & & \rangle S & & | & & \\
N & = & C & — N — & C & = & NH, \\
 & & & | & & & \\
 & & & C_7H_7 & & &
\end{array}
$$

framställes genom att leda cyangas genom en alkoholisk lösning af ortotolylbasen. Vid alkoholens afdunstning qvarblir föreningen i form af en olja. Den är ytterst lättlöslig i vanliga lösningsmedel och derför svår att erhålla kristalliserad. Ur en blandning af alkohol och vatten erhöllos otydliga kristaller, som blefvo tjockflytande och började smälta vid 89°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	24,14	23,90.

Nitroso-diortotolyl-diamido-oiaztiol,

$$
\begin{array}{c}
N — N \\
\| \quad\quad \| \\
C_7H_7NH—C \quad\quad C—N\langle^{C_7H_7}_{NO}, \\
\diagdown S \diagup
\end{array}
$$

erhålles, om ortotolylbasen löses i med klorvätesyra försatt vatten samt i lösningen nedhälles en beräknad mängd kaliumnitritlösning. Nitrosoföreningen utfaller då som en gul fällning, hvilken löses i alkohol, hvari den är lättlöslig och hvarur den kristalliserar i bruna kristaller, som vid rifning blifva gula med en dragning i grönt. Föreningen smälter vid 135°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	21,54	21,47.

Di-metaxylyl-diamido-oiaztiol,

$$\begin{array}{ccc} & N\text{——}N & \\ & \| \quad\quad \| & \\ C_8H_9NH\text{—}C & \quad & C\text{—}NHC_8H_9, \\ & \diagdown_{S}\diagup & \end{array}$$

erhålles af asym. *m*-xylylsvafvelurinämne och vätesuperoxid på alldeles liknande sätt som den redan beskrifna ortotolylbasen, hvilken den fullkomligt liknar. Som äfven de båda basernas derivat fullkomligt öfverensstämma, hvad framställningssättet vidkommer, så upprepar jag här ej detta vid hvarje särskildt derivat, utan hänvisar till motsvarande derivat af ortotolylbasen, der framställningssättet är utförligare beskrifvet.

m-xylylsvafvelurinämnet, hvarom inga upplysningar stå att finna i de kemiska handböckerna och derför hittills icke synes vara framställdt, erhölls af rodanammonium och klorvätesyrad *m*-xylidin enligt CLERMONT's metod[1]). Det är lösligt i kokande vatten, lättlösligt i alkohol. Kristalliseradt ur alkohol, smälte det vid 176°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	15,56	15,77.

Den ur *m*-xylylsvafvelurinämnet framstälda metaxylylbasen är ytterst lättlöslig i vanliga lösningsmedel, utom vatten, hvarför det är svårt att erhålla den kristalliserad. Vid lösningsmedlens afdunstning qvarstannar den i form af en gul stelnad olja, som smälter vid 79°.

	Beräknadt.	Funnet.	
		I.	II.
C	66,67	66,20	—
H	6,17	6,49	—
N	17,28	—	17,06
S	9,88	—	—

[1]) Bull. soc. chim. XXV, 242.

Basens *klorvätesalt* är ytterst lättlösligt i vatten och qvarblir efter dettas afdunstning i form af en olja. *Qvicksilfverklorid*-föreningen är mycket lättlöslig i alkohol.

Kloroplatinatet,

$(C_{18}H_{20}N_4S,\ HCl)_2 . PtCl_4$,

är kristalliniskt och till färgen gulbrunt. Det börjar sönderdelas vid 214—217°.

	Beräknadt.	Funnet.
Pt	18,43	18,66.

Silfvernitratföreningen,

$C_{18}H_{20}N_4S . AgNO_3$,

är svårlöslig äfven i kokande alkohol. Föreningen svärtas i solljuset och förpuffar vid upphettning.

	Beräknadt.	Funnet.
Ag	21,86	21,66.

Pikratet,

$C_{18}H_{20}N_4S . C_6H_2(NO_2)_3OH$,

är lättlösligt i alkohol, hvarur det erhålles i rätt stora, gula, vackra kristaller, som smälta vid 218°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	17,72	17,93.

Acetyl-di-metaxylyl-diamido-oiaztiol.

```
             N——N
             ‖    ‖        /C8H9
C8H9NH—C    C—N<
             \  /          \C2H3O ,
              S
```

kristalliserar ur alkohol i nålar.

	Beräknadt.	Funnet.
N	15,30	15,28.

Benzoyl-di-metaxylyl-diamido-oiaztiol,

$$\begin{array}{ccccc} & N & - & N & \\ & \| & & \| & \\ C_8H_9NH- & C & & C & -N\begin{cases} C_8H_9 \\ C_7H_5O \end{cases}, \\ & \diagdown & S & \diagup & \end{array}$$

kristalliserar ur alkohol i små fina nålar, som smälta vid 211 —212°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	13,46	13,68.

Di-metaxylyl-diamido-oiaztiol-cyanid,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_8H_9 & & & \\ & & & | & & & \\ N & = & C & - N - & C & = & NH \\ | & & & \rangle S & | & & \\ N & = & C & - N - & C & = & NH, \\ & & & | & & & \\ & & & C_8H_9 & & & \end{array}$$

är mycket lättlöslig i de vanliga lösningsmedlen och derför svår att erhålla kristalliserad. Den erhålles i otydliga kristaller ur en blandning af benzol och gasolja. De smälta vid 103°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	22,34	22,21.

Nitroso-di-metaxylyl-diamido-oiaztiol,

$$\begin{array}{ccccc} & N & - & N & \\ & \| & & \| & \\ C_8H_9NH- & C & & C & -N\begin{cases} C_8H_9 \\ NO \end{cases}, \\ & \diagdown & S & \diagup & \end{array}$$

är lättlöslig i alkohol, hvarur den kristalliserar i brunaktiga kristallgyttringar, som vid rifning blifva gula. De smälta vid 146°.

	Beräknadt.	Funnet.
N	19,83	19,79.



Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 2.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

177. Om $\beta_1=\alpha_1$-bromnaftalinsulfonsyran, samt om konstitutionen hos de syror, som bildas vid inverkan af koncentrerad svafvelsyra på β-naftylamin.

Af S. Forsling.

[Meddeladt den 12 Februari 1890 genom P. T. Cleve.]

$\beta_1=\alpha_1$-Bromnaftalinsulfonsyra.

De mot denna syra svarande *amido-*, *klor-* och *oxy-*naftalinsulfonsyrorna äro redan framställda och karaktäriserade. Likaså äro motsvarande diklornaftalin och dioxynaftalin kända. Oxynaftalinsulfonsyran, den så kallade Bayer'ska naftolsulfonsyran[1]), har blifvit framställd genom sulfonering af β-naftol. Amidonaftalinsulfonsyran är en af de syror, jag erhållit vid inverkan af konc. svafvelsyra på β-naftylamin[2]). Klornaftalinsulfonsyran erhölls af Arnell genom sulfonering af β-klornaftalin[3]), dessutom har jag erhållit den genom att öfverföra amidosulfonsyran till klornaftalinsulfonsyra[2]).

Däremot har det ej varit bekant, hvilken dibromnaftalin svarade mot dessa föreningar. Motsvarande bromnaftalinsulfonsyra har varit föremål för undersökning af Armstrong[4]). Denna bromnaftalinsulfonsyra har jag framställt ur ofvannämnda amido-

---

[1]) Berichte d. Deutsch. chem. Ges. 1882, s. 1352 och 1884, s. 149 R.
[2]) Bihang till K. Vet.-Akad. Handl. 1888, N:o 2.
[3]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 5.
[4]) Report of the committee for investigating isomeric naphtalene derivatives.

naftalinsulfonsyra (amidonaftalinsulfonsyra 1) på samma sätt, som användts för öfverförande af BRÖNNER'ska syran till bromnaftalinsulfonsyra[1]).

Kaliumsaltet — $C_{10}H_6BrSO_3K + H_2O$ — kristalliserar ur vattenlösning i hvita mikrokristalliniska penslar af små nålar. Upphettadt till 150° C. förlorar saltet 1 mol. kristallvatten, som ej bortgår vid torkning öfver svafvelsyra.

Analys: I procent

	Funnet.	Beräknadt.
K	11,38	11,42
H_2O	5,31	5,25.

Bromnaftalinsulfonbromiden — $C_{10}H_6BrSO_2Br$ — framställdes på vanligt sätt af kaliumsaltet med fosforpentabromid, och renades genom kristallisering ur en blandning af benzol och gasolja. Den är lättlöslig i benzol och kloroform. I gasolja och eter är den däremot svårlöslig. Ur gasolja kristalliserar den i fasta aggregat af små nålar, ur kloroform i breda nålar. Smpt 151° C.

Analys: I procent

	Funnet.	Beräknadt.
Br	46,00	45,71.

Bromnaftalinsulfonkloriden — $C_{10}H_6BrSO_2Cl$ — har blifvit framställd af ARMSTRONG[2]). Han uppger dess smältpunkt till 147° C.

Dibromnaftalin — $C_{10}H_6Br_2$ — erhölls af bromiden genom destillering med fosforpentabromid. Den så erhållna dibromnaftalin kristalliserades ur alkohol och destillerades därefter med vattenånga. I alkohol är den tämligen svårlöslig. I eter och kloroform löser den sig lätt. Den kristalliserar i hvita nålar. Smpt 75° C.

Analys: I procent

	Funnet.	Beräknadt.
Br	55,50	55,94.

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandlingar 1889, N:o 2.

[2]) Report of the committee for investigating isomeric naphtalene deriv.

Denna dibromnaftalin är förut framställd af MELDOLA[1]) samt af DAMSTÄDTER och WICKELHAUS[2]). JOLIN[3]) kallar denna dibromnaftalin η-dibromnaftalin och antager som dess motsvarande diklornaftalin η-diklornaftalin (smpt 48°). Detta antagande är emellertid origtigt, ty den diklornaftalin, jag erhållit ur β-amidonaftalinsulfonsyra 1, har smpt 62° C.[4]).

Den mot diklornaftalin, smpt 62°, och dibromnaftalin, smpt 75°, svarande dioxynaftalin är framställd af EMMERT[5]) ur dinatriumsaltet till BAYER'ska naftolsulfonsyran. Smpt 178° C. Dessa derivat äro heteronucleala. MELDOLA[1]) har nämligen genom oxidation af ofvannämnda dibromnaftalin erhållit en monobromftalsyra. Och sedermera har ERDMAN[6]) visat att den heteronucleala diklornaftalin med smältpunkt 61°,5 är ett $\alpha=\beta$-derivat, antagligast $\alpha_1=\beta_1$.

I en föregående uppsats har jag på där uppgifna grunder antagit konstitutionen för dessa föreningar att vara homonucleal. Detta antagande är emellertid origtigt, då det nu visat sig att den af mig erhållna diklornaftalin (smpt 62°) ej är den homonucleala diklornaftalin utan den heteronucleala med samma smältpunkt.

Konstitutionen på bromnaftalinsulfonsyran och dibromnaftalin, smpt 75°, blir sålunda:

SO_3H ... —Br och Br ... —Br.

I en föregående uppsats[7]) har jag beskrifvit kloriden till $\beta_1=\alpha_1$-klornaftalinsulfonsyran. För erhållande af fullständig

[1]) Journ. of the Chem. Soc. 1885, 487.
[2]) Ann. Chem. Pharm. 152, 298.
[3]) Acta Soc. Reg. Ups. 1877.
[4]) Bihang till K. Vet.-Akad. Handl. 1888, N:o 2.
[5]) Liebigs Ann. 241, sid. 371.
[6]) Liebigs Ann. 247.
[7]) Bihang till K. Vet.-Akad. Handl. 1888, N:r 2.

analogi mellan brom- och klornaftalinsulfonsyrorna af ställningen $\beta_1 = \alpha_1$ har jag nu framställt bromiden af denna klorsulfonsyra.

$\beta_1 = \alpha_1$-Klornaftalinsulfonbromid — $C_{10}H_6ClSO_2Br$ — framställdes på analogt sätt med den förut[1]) beskrifna kloriden till samma syra. Bromiden är lättlöslig i kloroform, hvarur den kristalliserar i små nålar. Smpt 139° C.

Analysen på klor och brom gaf i procent:

	Funnet.	Beräknadt.
Cl + Br	38,00	37,77.

Smältpunkterna till de båda klor- och bromsulfonsyrornas klorider och bromider, samt till motsvarande diklornaftalin, dibromnaftalin och dioxynaftalin äro:

$C_{10}H_6ClSO_2Cl$	129°
$C_{10}H_6ClSO_2Br$	139°
$C_{10}H_6BrSO_2Cl$	147°
$C_{10}H_6BrSO_2Br$	151°
$C_{10}H_6Cl_2$	62°
$C_{10}H_6Br_2$	75°
$C_{10}H_6(OH)_2$	178°.

Konstitutionen hos de 4 syror, som bildas vid inverkan af svafvelsyra på β-naftylamin.

Vid sulfonering af β-naftylamin med konc. svafvelsyra vid en temp. af omkring 140° C. bildas 4 isomera monosulfonsyror[1]). Af dessa har jag undersökt och närmare karaktäriserat 3:ne. Den 4:de syran har under mitt arbetes fortgång undersökts å flere håll. Första omnämnandet af densamma gjordes af FR. BAYER och C. DUISBERG[2]). De erhöllo den genom upphettning

[1]) Bihang till K. Vet.-Akad. Handl. 1888, N:o 2.

[2]) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. 1887, s. 1426.

af β-naftylamin med konc. svafvelsyra till 150° C. Sedermera har A. WEINBERG[1]) visat, att de af mig framställda amidonaftalinsulfonsyrorna 1 och 2 (DAHL'ska syrorna 1 och 3) vid upphettning till 160° C. lätt omlagras till BRÖNNER'ska syran och ofvannämnda BAYER's syra, den så kallade δ-syran. Häraf följer att den af mig erhållna 4:de syran måste vara identisk med BAYER's och DUISBERG's δ-syra. Af denna δ-syra erhöllo BAYER och DUISBERG en diklornaftalin med smältpunkt 114° C. Denna diklornaftalin är heteronucleal med kloratomerna i β-ställning.

De fyra syror, som bildas vid inverkan af svafvelsyra på β-naftylamin, äro sålunda alla heteronucleala. Vid låg temperatur bildas nästan uteslutande de, som hafva sulfongruppen i α-ställning.[2]) Dessa öfvergå dock vid fortsatt upphettning med svafvelsyra till de 2:ne öfriga, som ha sulfongruppen i β-ställning. I literaturen antages för närvarande konstitutionen hos dessa fyra syror vara:

amidonaftalinsulfonsyran 1: amidonaftalinsulfonsyran 2:

SO_3H $-NH_2$ $-NH_2$ SO_3H

BRÖNNER'ska syran: samt δ-sulfonsyran:

$-NH_2$ SO_3H- SO_3H- $-NH_2$

[1]) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. 1887, s. 3353.

[2]) SCHULTZ, Die Chemie d. Steinkohlentheers sid. 519 och 522.



Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 2.
Stockholm.

Försök öfver den atmosferiska luftens fuktighet.

Af K. H. Sohlberg.

[Meddeladt den 12 Februari 1890 genom R. Rubenson.]

Vid fullföljande af de preliminära undersökningarne öfver fuktigheten i atmosferen, som omnämnas i Öfversigt af K. V. A:ns handlingar 1887, n:o 7, önskade jag genom någon ny bestämningsmetod kontrollera de differenser vid fuktighetsbestämningar, som ofta erhållas genom användande af den kemiska metoden och daggpunktsmetoden med hjelp af den Regnaultska hygrometern. Jag ansåg för detta ändamål lämpligt att indraga prof af den yttre luft, på hvilken undersökning skall ega rum, genom ett längre metallrör, som på lämpligt sätt uppvärmes, in i en hygrometer »à condensation interieure» och der undersöka, om den genom uppvärmningen af möjligen för handen varande fasta eller fluida vattenpartiklar erhölle en högre daggpunkt, än som medelst den Regnaultska hygrometern kunde hos den yttre luften direkt iakttagas.

På samma jernarm, som uppbar denna senare apparat, fäste jag derför den öppna änden af ett blyrör, hvars inre diameter var $2^1/_4$ mm. och som med cirka 1 m. sträckte sig utanför operationsfönstret, medan ungefär 10 m. deraf dels lades i ringlar på arbetsbordet, dels upplindades i spiral omkring glaset af en fotogenlampa för att uppvärmas. I de första försöken uppvärmdes sålunda en spiral af 470 cm:s längd, men då detta ej syntes tillräckligt, upplade jag — jag talar här till en början

närmast om *försök, som anstäldes i januari 1888* — af de förut fritt på bordet liggande ringlarne ytterligare en spiral på cirka 300 cm., som på samma sätt som den andra spiralen medelst en brinnande fotogenlampa bragtes till en temperatur af cirka 50° eller något mer. Blyrörets andra ände fästades vid kondensationsröret till en hygrometer à condensation interieure, som åt andra sidan förenades med en vattenaspirator, som insög den yttre luften genom hela rörledningen. Denna aspirator var, då aspiration ej egde rum, skild från kondensationsröret genom en stängd kran.

Till hygrometer à condensation interieure användes en af Vetenskapsakademiens instrumentmakare efter meddelad beskrifning förfärdigad CROVAS hygrometer. Kondensationsröret var 14 1/2 cm. långt och 17 mm. i inre diameter samt omslöts, vattentätt, af en eterfyld parallelipipedisk låda, utom i sina yttersta ändar, som sålunda blefvo något utstående. Etermassan genomdrogs vid användningen af luft genom aspirationsrör, som ini lådan voro stälda diametralt, och den insugna luftströmmen omspolade kondensationsrörets nedre och midtersta del, då den uppträngde genom etermassan. Kondens.rörets utstående ändar tillslötos af plana glas, 2 i hvardera, anordnade såsom ett slags dubbelfönster, för att hindra värmeledning utifrån och minska eller till och med upphäfva is-afsättning utanpå, då temperaturen neddrefs något djupare under 0°. Vid försök som anstäldes i januari 1889 omhöljdes tillika eterlådan noga med bomull, som sedan i sin ordning insveptes i ett ylleöfverdrag. Slutligen fick den till eteraspiration afsedda luften först passera en svafvelsyreflaska för torkning och sedan i spiralformigt rör genom en köldblandning af — 16° till — 20°. Härigenom kunde jag äfven i det uppvärmda operationsrummet utan svårighet nedbringa kondens.rörets temp. ända till — 10° eller lägre. Dock var eteråtgången härvid betydlig, och tid efter annan under försökets lopp måste påfyllning af eter ega rum, alltefter som eterytan, som utifrån genom ett glas på sidan kunde iakttagas, sjönk för djupt i lådan.

För att bemöta de invändningar mot den Regnaultska hygrometerns tillförlitlighet, som grunda sig derpå att, då en starkare vind blåser, det berörande luftlagret ej hinner under den korta tid beröringen varar antaga hygrometerns temperatur, placerade jag denna i en sluten bur af metalltråd (16 st. trådar på cm.), 32 cm. i både längd, bredd och höjd, som uthängdes i stadig ställning på en dubbelböjd jernarm utanför det fönster, innanför hvilket jag placerade mig för observation. Buren täcktes af ett likadant lock, som efter behof kunde hållas mer eller mindre öppet, hvarjemte jag i burens botten, rätt under hygrometern, klippte upp en qvadratisk lucka af $7^1/_2$ cm:s sida, för att sålunda, då det behöfdes, motverka luftens allt för stora stagnation i buren. På burens åt fönstret vända sida anbragte jag ett annat, cirkelformigt, hål af $7^1/_2$ cm:s diameter, för att derigenom kunna inifrån observationsrummet iakttaga hygrometern i buren. Genom att bakom hygrometern sätta en svartmålad bleckplåtskärm, mot hvilken ringaste fällning på det cylindriska hygrometerröret på det skarpaste kontrasterade, bragte jag observationsmetoden till hög grad af noggrannhet, med säkerhet $^1/_{10}$ grad, då ej någon gång oförmånlig dager, fläck på hygrometerns glascylinder eller dylikt orsakade svårighet att se qvicksilfverpelarens i termometern ände.

Till aspirator vid den yttre luftens insugning i de kemiska absorptionsrören använde jag en större glasflaska på 11,79 liter med ständigt orubbad, lufttätt slutande propp, hvilken flaska både fyldes och tömdes medelst ett till bottnen gående häfvertrör. Närmast denna sattes en 3-halsad flaska med conc. svafvelsyra att tjena de framför stående absorptionsrören till skydd, medan ett från den midtersta halsen utgående och i en öppen skål med nämda slags syra nedböjdt rör tjenstgjorde såsom manometer beträffande den i aspiratorn indragna luftens tryck. Till absorptionen användes 2:ne efter hvarandra stälda och med asbest och fosforsyreanhydrid fylda rör. De hade begge form af en cylinder, 18 mm. i diameter och $15^1/_2$ cm. lång, som fortsattes af en sferisk kula af cirka 4 c:ms diameter och slutade med ett

knäböjdt smalare rör, 12 cm. långt. Luften indrogs genom ett cirka 72 cm. långt glasrör, som utstacks genom ett hål i fönstret. Såväl detta senare som det, der hygrometerobservationerna gjordes, låg åt söder, begge helt nära hvarandra. Iakttagelserna gjordes först sedan solen undanskymts och fönstren kommit i skuggan.

Försöken anstäldes på följande sätt. Sedan absorptionsrören vägts och insatts på sina platser samt det yttre aspirationsröret genom flitig luftgenomdragning torkats, sattes genom sugning aspiratorns häfvert i sådan verksamhet, att genomdragningen kräfde en tid af 1 à 2 timmar. Efter resp. termometer- och barometerobservationer skred jag nu till iakttagande af daggpunkten hos den yttre luften med tillhjelp af den i ofvannämda metallbur insatta Regnaultska hygrometern. Öppningarne till buren modererades enligt vindens beskaffenhet, och temp. sänkning åstadkoms på ett särdeles beqvämt sätt genom eterafdunstning med hjelp af en grenledning från en BUNSENS vattenledningsaspirator, till dess att utfällning visade sig på ytan af hygrometern, hvars temperatur då iakttogs. Derpå afvaktades tidpunkten, då utfällningen ånyo försvunnit. Efter denna första approximation hölls temperaturen successive vid den ena tiondels graden efter den andra (hvilket lätt kunde ske genom att medelst en fjedrad klämmare på nyssnämde grenledning lämpligen moderera aspirationsströmmen i hygrometern), hvarefter såsom daggpunkt antogs den temperatur, vid hvilken *ytterst svaga* spår till rimfrost först visade sig.

Efter fullbordad observation på den Regnaultska hygrometern påtändes lamporna för uppvärmningen af den långa blyledningens spiraler, hvarefter den i blyledningen och Crova-hygrometern innehållna luften — det är här närmast fråga om försöken i jan. 1888 — med hjelp af förutnämda (Bunsenska) vattenledningsaspirator mångfaldiga gånger omsattes med luft utifrån. Derpå neddrefs genom eterafdunstning med användande af denna samma aspirator — en REGNAULTS vändaspirator underhöll under tiden en långsam luftström genom blyledningen och

Crova-hygrometerns kondensationsrör — temperaturen i Crova-hygrometern, tills på kondensationsrörets inre, glänsande yta utfällning af rimfrost egde rum. På den genom återspegling af himmelens diffusa ljus klart skinande horisontela bottenremsan af röret visade sig dervid först några pulverformiga fläckar, der röret träffades af den genom etervätskan indragna luftströmmen, nära intill hvilket ställe äfven kulan af hygrometerns termometer befann sig. Dessa fläckar utbredde sig och gåfvo hela röret liksom ett rökigt utseende, om temp.sänkningen fick vidare fortgå. Daggpunkten ansågs hafva inträdt, då nämda fläckar först visade sig.

Merendels och i mån af vunnen vana vid de många samtidigt i gång satta apparaterna anstäldes flere successive daggpunktsobservationer, omvexlande på REGNAULTS hygrometer och på CROVAS. Emellertid är att märka, att den till Crovahygrometern använda termometern ej var, såsom den till den Regnaultska hörande, indelad i femtedels grader, utan angaf temperaturen blott i hela grader, hvarefter man fick efter ögonmått uppskatta halfva och fjerdedelar.

Så snart den kemiska aspiratorn runnit ut, iakttogs dess temperatur samt manometern, hvarpå de kemiska absorptionsrören tillstängdes och vägdes.

Den indragna vattengasens vigt beräknades enligt formeln:

$$P = \frac{1293 \,.\, 0{,}62 \,.\, 11{,}79}{760} \cdot \frac{p}{1 + 0{,}00367\ t} \cdot \frac{b - \beta - \mu}{b - p} =$$

$$= 12{,}436 \,.\, \frac{p}{1 + 0{,}00367\ t} \cdot \frac{b - \beta - \mu}{b - p},$$

der P = ofvannämda vigt i milligram; p = vattengasens spänstighet; b = till 0° reduceradt barometerstånd i mm; β = på samma sätt uttryckt differens i spänstighet hos den yttre luften och den i aspiratorn indragna; t = aspiratorns temp.; μ = vattenångans maximum af spänstighet vid temp. t; 1293 = vigten i mg af 1 l. luft vid 0° och 760 mm:s pression; 0,62 = vattengasens egentl. vigt; 0,00367 = luftens utvidgn. koëfficient;

11,79 = den i aspiratorn befintliga vattenqvantitetens volym i liter. Vid de försök, som anstäldes *efter* jan. 1888 ändrades sistnämda siffra genom insättande af en termometer ini den kemiska aspiratorn till 11,693, i sammanhang hvarmed konstanten i formeln blef 12,334. I fråga om vattengasens spänstighet användes — till en början — REGNAULTS tabell.

För att afgöra tillförlitligheten af iakttagelserna med Crova-hygrometern anstäldes följande försök. Jag använde dervid, liksom vid samtliga försök som gjordes i juni och augusti 1888 samt januari 1889, i stället för det smala blyröret, ett tjockare sådant, $6^1/_4$ mm. i inre diameter och 651 cm. långt, hvaraf dock de yttersta 161 cm. utgjorde ett stycke för sig, förenadt med det öfriga genom en tjock, lufttät kautschukligatur. Vid pass 1 m. af blyröret stacks ut genom hålet i fönsterposten för att utifrån indraga luft till Crova-hygrometern; den öfriga delen upplindades i spiral och lades för tillfället på bordet, hvarefter änden medelst en konisk glasrörsbit och ett smalare öfvergångsrör af bly förenades med Crova-hygrometern.

Nu bestämdes först daggpunkten i det fria direkt, d. v. s. under frånskiljande af den långa spiralen. Efter en föregående kraftig luftgenomdragning under vid pass 3 min. medelst BUNSENS aspirator underhölls genom en REGNAULTS vändaspirator en långsammare luftström på ett par cm:s hastighet i sekunden i hygrometerröret, hvarefter daggpunkten ute erhölls till — $1^1/_4°$. Derpå insköts den långa spiralen mellan hygrometern och dess yttre aspirationsrör, med hjelp af BUNSENS aspirator gjordes under 3 à 4 min. en kraftig luftgenomdragning, som sedan fortsattes genom en långsammare luftström medelst vändaspiratorn, och sedan befans daggpunkten i det fria ånyo lika med — $1^1/_4°$, d. v. s. som förut. *Ledningens förlängning i och för sig ändrade således icke hygrometerns angifvelser.* Försöket repeterades upprepade gånger, sedan fällningen vid den stigande temperaturen försvunnit och luftgenomdragning skett än medelst den Bunsenska, än medelst vändaspiratorn allena, alltid med samma resultat, daggpunkt vid — $1^1/_4°$. Någon uttorkning af

blyledning och kondensationsrör för hvarje observation syntes mig således icke behöflig, ej heller tillrådlig, emedan den kan orsaka sänkning i daggpunkten hos den efter uttorkningen indragna luften (jemför de nedan beskrifna försöken i januari 1889). Man bör enligt min mening blott *undanskaffa den gamla fällningen medelst samma slags luft, som är föremål för undersökning.*

Sedermera afskildes blyledningens yttre del, den långa spiralen lades i ett större, bomullshöljdt kopparkärl, fyldt med isbitar och försedt med nedsatta termometrar, som ihållande och oafbrutet angåfvo 0° temp., och luften sögs från observationsrummet, hvars daggpunkt låg flere grader öfver 0°, genom spiralen och hygrometern. Daggpunkten hos den luft, som genomgått denna till 0° afkylda spiral, befans nu också vara 0°, så noga som den använda termometern kunde angifva. Försöket förnyades flere gånger, alltid med samma resultat. Det fans således då icke något skäl att betvifla, att *Crova-hygrometern äfven vid andra, närliggande temperaturer angaf den riktiga daggpunkten.*

Beträffande den omnämda väntade daggpunktshöjningen i CROVAS hygrometer vid uppvärmning af den långa blyledningen erhöllos nu följande resultat.

Vid 12 *försök i januari 1888* erhölls under nämda omständigheter i 8 fall högre daggpunkt i CROVAS än i REGNAULTS hygrometer. Jag vill närmare redogöra för några af dessa fall.

Den 8 jan. Väderleken var hela f. m. töcknig och dimmig, och på middagen stod det på gränsen mellan dimma och regn. Temp. ute vexlade under försöket från + 0,8 till + 1. Kemisk aspiration 1,22—2,23 e. m. Barom. 756,3. Aspiratorns temp. + 15. β i formeln sid. 53 alltjemt i hela försöksserien jan. 1888 = 1,9. Enligt CROVA var daggpunkten — $^1/_2$° och enligt REGNAULT cirka — 1° (någon osäkerhet i följd af luftens

töcknighet). Af det förra värdet på daggpunkten skulle följa en absorberad fuktighetsmängd af $12{,}436 \cdot \frac{4{,}433}{1{,}055} \cdot \frac{741{,}7}{751{,}87}$ eller 51,5 mg. Vägningarne gåfvo i det främsta absorptionsröret en differens af 53,3 mg och i det andra af 0,3 mg. (Då rören ej voro nyfylda för dagen eller måhända ej vederbörligen omskakats under absorptionen, hände esomoftast, att en mindre vigtdifferens visade sig äfven i det andra röret. Jag har i sådant fall upptagit äfven denna). Enligt den Regnaultska hygrometerns daggpunkt borde vägningen gifvit 49,6 mg.

Detta försök är af intresse, derför att dimma, dock föga intensiv, rådde vid försöket. Det oaktadt var, att döma efter den Regnaultska hygrometern, den relativa gasformiga fuktigheten blott cirka 87 %, d. v. s. de små fluida vattenpartiklarne i imman hade, *efter många timmar*, ännu icke mättat luften med gasformig fuktighet. Om ock den höga fuktighetsgraden i luften verkar fördröjande och hämmande på afdunstningen, så torde dock de små dimpartiklarnes sferoidala tillstånd, som — liksom i BOUTIGNYS försök — ökar deras inre sammanhållningskraft, härvid utgöra den väsentligaste orsaken till den ytterst långsamma förgasningen. Detta är på samma gång en giltig förklaringsgrund för fortvaron i en icke mättad luft af den fasta eller fluida fuktighet, hvars tillvaro äfven i klar luft synes antydas af de öfverskott i fuktighet, som den kemiska bestämningsmetoden stundom gifver utöfver hvad som borde följa af daggpunktsbestämningarne. Dessutom är märkligt, att vattenmängden i dimman synes vara jemförelsevis så obetydlig. Allt atmosferiskt vatten i fast eller flytande tillstånd belöpte sig nämligen i detta försök ej till mer än 8 % af det (enligt REGNAULTS tabell) för handen varande gasformiga.

Den 9 jan. Högt lufttryck. Vind mellan o. och n. samt snö i mellersta Sverige. I Stockkolm på morgonen jemnmulet, snöglopp, stilla luft. Snöandet upphörde på f. m. och på middagen lättade luften något (jemför härmed den fallande daggpunkten). Dock fortfor det att vara mulet äfven på e. m. Temp.

under försöket från + 1 till + 0,4. Kemisk aspiration 11,52 f. m.—1,10 e. m. Barometer 766,3. Aspiratorns temp. + 13. Daggpunktsobservationerna voro: R. (REGNAULTS hygrom.) — 1,3 (före försöket kl. 11,40). CR. (CROVAS hygr.) — 1,5 (kl. 12,37). R. — 2,5 (kl. 12,43). CR. — 2. R. — 2,7 (kl. 1,7). Daggpunktsmedium: enligt R. — 2,6, enligt CR. — 1,75. Enligt detta senare tal borde den absorberade fuktigheten utgöra

$$12{,}436 \cdot \frac{4{,}033}{1{,}0477} \cdot \frac{753{,}2}{762{,}27} \text{ eller } 47{,}3 \text{ mg.}$$

I verkligheten erhölls en vigtsökning af 48,6 mg. Enligt REGNAULTS daggpunkt borde vigtsmängden hafva blifvit 44,3 mg. Skilnaden mellan denna och den vägda utgör 9,7 %, och deraf motsvarades vid pass $^3/_4$ af den i CROVAS hygrometer vunna höjningen i daggpunkten.

Den 14 jan. Högt lufttryck under mestadels lugnt väder. Der och hvar i mellersta Sverige dimma. I Stockholm var sålunda på morgonen jemn, tjock dimma åt alla håll. Kl. 12 à 1 middagen hade den något lättat; dock rådde äfven då töcknigt väder. Kl. 1 à 2 e. m. skymtade himlens blåa färg mellan skyarne. Lugnt väder. Kemisk aspiration 12,33—3,45 e. m. Barometern 774,4. Aspir:ns sluttemp. + 14. Temp. ute från — 1,6 till — 1,2. Daggpunktsobservationer: R. — 3,7; CR. — $2^1/_2$; R. — 3,9; CR. — $2^3/_4$; R. — 3,6. Med antagande af — 2,6 såsom daggpunktens medeltal enl. CR. blir $p = 3{,}779$ och $P = 44{,}1$ mg. Vägningen gaf 43,3. Daggpunktsbestämningen medelst CROVAS hygrometer antydde således denna gång en större fuktighetsmängd än som motsvarar vigtsökningen i absorptionsrören. Enligt R. med — 3,7° såsom medium, borde erhållits 40,5 mg. Öfverskottet således 6,9 % af den gasformiga fuktigheten.

Den 18 jan. Barometerfall öfver Hvita hafvet. I sammanhang härmed gingo isobarerna i Sverige från norr till söder, medförande delvis frisk n. v. vind och halfklart väder. I Stockholm var vädret på morgonen nästan klart under stark n. n. v. blåst vid — 2°. På f. m. kommo då och då moln med öfvergående smärre snöfall. Dessa ökade sig i antal och styrka, så

att det slutligen vid 12-tiden blef fullt yrväder. Omkring $^1/_2$ 1 var det emellertid ånyo klart med lätta cirrimoln. Under sjelfva försökets förra hälft var det också nästan alldeles klart, men under dess senare del mulnade himmeln under då och då påkommande snöväder. Vinden då nordlig. Kemisk aspiration 12,50—2,32 e. m. Temp. ute från —1,2 till —1. Barom. 762,3. Aspir.:ns sluttemp. + 18. Daggpunktsobservationer: R. — 6,9. En stund efteråt, Cr. — $7^1/_2$. Då detta syntes oväntadt, pröfvades genast med R., som nu visade — 8,5 och sålunda angaf, att daggpunkten sedan föregående observation starkt fallit. En ny observation å Cr. angaf — $7^3/_4$ (ingen snöyr härunder), och en ny omedelbart derefter å R. — 8,7. Mediet af observationerna å R. borde således blifva — 8°, och å Cr. — om denna i enlighet med de 2 sista observationerna antages hafva visat 1,3° lägre — vid pass — 6,7°. I enlighet med detta tal blefve $p = 2,733$ och $P = 31,27$ mg. Vägningen gaf 34,7. Daggpunktsmediet å R. borde gifvit 28,1 mg. Vi påträffa således här ett öfverskott öfver den gasformiga fuktigheten af $23^1/_2$ %. Daggpunktens starka fallande i början af försöket bör man uppenbarligen sätta i sammanhang med beskaffenheten af det starka luftombyte, som egde rum under n. n. v. blåst och som en stund senare medförde ömsom klar luft, ömsom snö. Att uppvärmningen icke åstadkom en större höjning i daggpunkten, än som svarar mot ungefär hälften af den iakttagna fluida fuktigheten, kan möjligen bero på för handen varande ringa disposition för förgasning hos de små partiklarne — en omständighet som kan antagas vexla med deras mer eller mindre minimala beskaffenhet —, men man kan äfven möjligen hafva anledning befara, att fuktighetsöfverskottet till någon del kan hafva varit skenbart och orsakats af någon under snöandet i insugningsrörets mynning inkommen snöflinga, som der förgasats och sålunda ökat fuktigheten i de kemiska absorptionsrören.[1])

---

[1]) Jag är i sjelfva verket nu mer benägen för att hufvudsakligen till en dylik orsak hänföra de öfverdrifvet stora öfverskott, som stundom erhöllos vid de preliminära försöken våren 1887 (Se Öfversigt af K. V. A:s handlingar 1887,

Äfven vid andra tillfällen erhöllos differenser mellan angifvelserna i REGNAULTS och CROVAS hygrometrar, men daggpunktshöjningen i CROVAS hygrometer stämde dock ej med resultatet af vägningen, utan gaf än ett något lägre, än ett något högre resultat än som svarade mot denna.

I ännu högre grad visade sig en dylik brist på öfverensstämmelse vid *försöken i januari 1889.* Af dem vill jag närmare redogöra för följande. Jag använde dervid ofvannämda tjockare blyledning på 651 cm, nu delad i 3 delar, en ytterst på 74 cm, som gick ut genom fönstret, ett mellanstycke på 87 cm och den i spiral upplagda delen på 490 cm. Spiralen omhöljdes af tjockt papper och uppvärmdes under de särskilda försöken medelst en inuti ställd fotogenlampa, såsom förut är sagdt om försöken i jan. 1888, och befans temperaturen i de nedre ringlarne vara cirka + 43° och i de öfre omkring + 62°. Den tjocka blyledningen sammanfogades medelst en kortare konisk glasrörsbit och en kautschukligatur med ett cirka 30 cm. långt messingsrör, som likaså medelst en kautschukligatur förenades med hygrometerns inloppsrör. Rören voro sammanförda med sina kanter så nära som möjligt. Ledningen var absolut lufttät för de tryckdifferenser, hvarom här var fråga. För all säkerhets skull torkades vid denna försöksserie före hvarje försök rörledning och hygrometer på det noggrannaste med fosforsyretorr luft, i det att ett fosforsyrerör fogades till yttre änden af rörledningen, hvarefter yttre luft långsamt aspirerades genom denna och hygrometern med hjelp af en REGNAULTS vändaspirator. Efter verkställd grundlig uttorkning och sedan fosforsyreröret aflägsnats, var den daggpunkt Crova-hygrometern visade till en början uppenbarligen för låg, men växte sedan, för att slutligen,

---

n:o 7). Jag har nämligen under här beskrifna försöksserier stundom funnit glasröret, hvarigenom luften aspirerades in i fosforsyrerören, vara före experimentets början fullsatt med små minimala vattendroppar, än längs hela insidan, än utefter blott vissa delar deraf. Om en dylik hygroskopisk afsättning af fuktighet i absorptionsröret förbisetts och ej genom ihärdig luftgenomdragning bortskaffats, har den utan tvifvel gifvit ett falskt resultat åt vägningen.

efter åtskilligt fram- och tillbakagående, blifva — vanligtvis — väsentligen högre än den Regnaults hygrometer angaf. Vid denna försöksserie utbyttes äfven det kemiska aspirationsröret af glas mot ett lika (72 cm) långt af messing. Men jag öfvergår till beskrifning af de enskilda försöken.

Den 6 jan. Försöket pågick från 1,30 e. m. (temp. ute + 3,7) till 2,43 e. m. (temp. + 3,2). I Stockholm hade varit mulet på morgonen under vind från vestsidan, men på f. m. lättade molnen och omkring kl. 1 var himlen nästan alldeles klar med lätt cirrus-slöja i s. v. I zenith blått med dragning åt hvitt. Mot horisonten mer och mer gulhvit färg. Daggpunktsobservationer: R. (REGNAULTS hygrom.) svaga spår vid — 0,9° à — 1°,0, som förstärkte sig vid konstanthållande af denna temp.[1]). Ånyo, svagt först vid — 1° (temp. ute + 3,7). CR. (CROVAS hygrom.), fosforsyretorkad, genomdrogs först af en kraftig luftström medelst BUNSENS aspirator, sedan af en långsam med hjelp af vändaspiratorn; fläckar vid + $^1/_2$°. R., svagt vid — 1°. CR., fläckar vid + 1$^1/_2$°. R., nu först vid — 1,1° à — 1,2°. (Efter försökets slut undersöktes daggpunkten med CR. med kort yttre blyledning, sedan tillika det smalare föreningsröret af messing utbytts mot ett glasrör af ungefär lika, 33 cm:s, längd. Nu gaf CR. daggpunkt först vid — 1$^1/_2$° à — 1$^3/_4$°. R. nu — 1,7; temp. ute + 2,8).

Antages mediet å R. till — 1,02, så blir $p = 4{,}261$ (enligt REGNAULTS tabell). Då vidare $b = 755{,}7$; $\beta = 4{,}2$; $t = 16$; $\mu = 13{,}54$, så blir enl. formeln å sid. 53 $P = 48{,}75$ mg. Vägningen, som dock för det inträdande mörkrets skull måste uppskjutas till påföljande morgon, gaf 52,7 mg. (i det främre röret). Oaktadt vigtsökningen under natten är, här som vid de flesta påföljande försöken, den absorberade fuktighetsmängden för liten

---

[1]) Detta torde bero derpå att, sedan utfällning egt rum vid den temperatur, då för handen varande vattengas kommit i mättadt tillstånd, beröringen med den bildade rimfrosten orsakar, att vattengasens maximispänstighet vid den ifrågavarande temperaturen reduceras till en lägre valör, mättad »isångas» vid samma temperatur. Jfr W. Fischers och Ekholms undersökningar

för att motsvara daggpunktshöjningen i CROVAS hygrometer. Antagen till + 1, skulle här daggpunkten i CROVAS hygr. förutsätta en absorberad vigtsmängd af 56,5 mg.

Den 7 jan. herrskade i Stockholm hela dagen tjocka och disighet, stående på gränsen till dimma. Det nyssnämda, 33 cm. långa, glasröret insattes äfven denna gång såsom öfvergångsrör mellan den tjocka blyledningen och CROVAS hygrometer. Fosforsyretorr luft genomdrogs i $^1/_2$ timme, och härunder neddrefs genom eterafdunstning temperaturen i hygrometern till $-9°$ utan att spår till utfällning visade sig. Hufvudförsöket pågick från 1,17 e. m. (temp. + 2,2) till 2,30 e. m. (temp. + 2). Daggpunktsobservationer: R. $-0,1°$ à $-0,2°$; $-0,1°$ (temp. + 2,2). CR. (som först genomdragits af en stark luftström medelst Bunsens aspirator, sedan af en långsammare medelst vändaspiratorn): spår vid $+^3/_4°$. R. $-0,1$. CR. $+1$; $+1^1/_4$. R. $-0,2$ (temperatur $+2$). Daggpunktsmedium enligt R. $-0,14$. Följaktl. $p = 4,553$. Då vidare $b = 757,3$, $\beta = 4,2$, $t = 16$, $\mu = 13,54$, så blir $P = 52,1$ mg. Vägningen, som skedde påföljande dag på morgonen, gaf 54,4.

Den 8 jan. var marken om morgonen lindrigt frusen, men himlen var liksom föregående dag helt och hållen mulen med tunga, nedhängande moln. Luften disig. Svag vind från ostsidan. Denna väderlek fortfor hela dagen. — Crova-hygrometern med dess ledning torkades i 32 min. med fosforsyretorr luft och afkyldes till $-10°$, utan att ringaste utfällning af rimfrost visade sig. Aspirationen sattes i gäng 12,53 (temp. ute + 0,2) —2,35 e. m. (temp. $-0,2$). Daggpunktsobservationer: R $-3,6$. CR. (nu och i de följande försöken strax från början långsam aspiration med vändaspirator): först $-5^1/_2$ (uppenbarligen för lågt, emedan fullständig luftomsättning ännu ej hunnit ske); derefter successive $-1^3/_4$; $-1^1/_4$; $-1^1/_4$. R. $-3,7$ à $-3,8$ (temp. ute ± 0). CR. $-2^1/_2$. R. -4 à $-4,1$ (förstärkte sig föga vid temp.:ns konstanthållande). CR. $-2^1/_4$. R. $-4,1$. CR. $-1^1/_2$; $-1^1/_2$. Daggpunktsmedium enligt R.: $-3,9$. Följaktligen $p = 3,414$. Då vidare $b = 762,1$; $\beta = 4,2$; $t = 15,6$;

$\mu = 13{,}2$; blir $P = 39{,}1$. Vägningen, som skedde omedelbart efter försöket, gaf 42,7 mg.

Hvarpå beror nu den merendels fram- och tillbakagående höjningen i daggpunkten i Crova-hygrometern? Den föregående torkningen med fosforsyretorr luft och fällningens fullständiga uteblifvande, så länge torkningen pågick, borde garantera, att ingen i ledningen och dess ligaturer gömd fuktighet, ej heller någon från observationsrummet inkommen dervid spelat någon roll. Eller beror höjningen i daggpunkten derpå att föregående fällningar ej tillräckligt noggrant bortskaffats under vändaspiratorns gång och sålunda kommit att höja fuktighetsprocenten ini hygrometern? Häremot strider dock all föregående erfarenhet, likasom äfven de särskildt för denna frågas afgörande anstälda och ofvan (sid. 54) omtalta försök. Återstår då antagandet att den långa ledningen af den utifrån indragna fasta, fluida eller gasformiga fuktigheten hygroskopiskt uppfångar små qvantiteter, som, till en början fastsittande, då och då ryckas loss af luftströmmen och vid inkommande i det afkylda hygrometerröret orsaka utfällning.

För att afgöra om den långa ledningen hygroskopiskt inneslöt någon fuktighet, satte jag, efter hufvudförsökets slut den 8 jan. ett med fosforsyra och asbest fyldt torkrör vid ledningens yttre fria ände och ett annat, nyss vägdt, vid ledningens andra, från hygrometern frånskilda ände samt drog medelst en vändaspirator en långsam luftström genom ledningen. R. hade, strax innan detta skedde, angifvit daggpunkten ute att vara $-4{,}1$, hvadan den gasformiga fuktighetens spänstighet i luften, då den inträdde och fylde rörledningen, blir 3,361 mm. Volymen af rörledningen (hela det förutnämda tjocka blyröret + 2 smärre koniska glasrörsbitar + det ofvannämda glasröret af 33 cm:s längd) befans genom mätning med vatten efter samtliga försökens slut vara 210 kbcm. Vigten åter af 210 kbcm vattengas af 3,361 mm:s spänstighet och + 16° (rummets) temp. blir =

$= \frac{210 \,.\, 3{,}361 \,.\, 1{,}293 \,.\, 0{,}62}{760 \,.\, 1{,}0587} = 0{,}7$ mg. Men nu vägde det till

upptagande af rörledningens fuktighet använda fosforsyreröret 42,3825 mg omedelbart före aspirationen, som pågick, delvis med påtänd lampa, från 3,15 till 5 e. m., och efter densamma (vägningen kunde ej ske förr än följande morgon) 42,3849 mg. Alltså en vigtsökning af 2,4 mg, hvaraf 2,4—0,7 eller 1,7 mg med frånräkning af vunnen vigtsökning under natten (som kan anslås till några få tiondels mg) skulle motsvara sådan fuktighet, som rörledningen genom sin hygroskopicitet fasthållit.

För att bedöma, huruvida fuktqvantiteter af denna storleksgrad kunna anses tillräckliga att åstadkomma den intermittenta och stundom alldeles tillbakagående daggpunktshöjningen i CROVAS hygrometer, sökte jag bestämma, huru mycket de i CROVAS hygrometer vid daggpunktsobservationer iakttagna strimmorna på ett ungefär väga. För detta ändamål anstäldes följande försök den 10 jan. Sedan vid hufvudförsökets slut Crova-hygrometern angifvit daggpunkten i kondensationsröret till — $1^3/_4$ tillslöts kondensationsrörets kran äfvensom dess anloppsrör (medelst klämmare på kautschukligaturen). Derpå utsattes kondensationsröret för tilltagande afkylning. En mycket liten fläck bildades nu redan vid — $1^1/_4$. Den tillväxte under temp. sänkning till — 5° till en i cylinderns botten något snedt (i riktning af den genom etervätskan framgående luftströmmen) utbredd, skarp fläck, cirka $1^1/_2$ cm. lång och ungefär hälften så bred. Vigten af denna fläck, som vid inträdande temperaturhöjning till — $1^1/_4$° ånyo alldeles försvann, bör, då kondensationsrörets längd är 14 cm. och dess diameter 1,8 cm och REGNAULTS tabell öfver mättad vattenångas vigt användes, vara

$$= \frac{3{,}14 \,.\, 0{,}9 \,.\, 0{,}9 \,.\, 14\ (4{,}455 - 3{,}376)}{1000} = 0{,}038 \text{ mg.}$$

Då ifrågavarande fläck, som dock, såsom nämts, hade en betydlig utsträckning, ej uppgick i vigt ens till $^1/_{25}$ mg., så utgöras de vid vanliga daggpunktsobservationer iakttagna, mycket små fällningarne af alldeles försvinnande små fuktighetsqvantiteter, som — om de utfällas ur blott partielt mättade luftströmmar — väl kunna härröra af i ledningen förut afsatta, men sedan afdun-

stade eller af den aspirerade luften bortryckta fuktighetspartiklar.

Samma dag undersöktes äfven, hvilken inverkan den långa ledningen till Crova-hygrometern utöfvade, då den icke uppvärmdes, och i de återstående försöken varierades äfven ledningens längd. Resultaten voro olika, såsom framgår af det följande.

Den kemiska aspirationen, den 10 jan., försiggick under mulen väderlek från 12,30—2,35 e. m. (temp. vid början och slut — 0,4). Crovahygrometern med dess ledning (i hvilken det förut använda smalare föreningsröret af messing återinsattes) hade förut torkats i 40 min. med fosforsyretorr luft, och afkylning ända till — 10° hade ej medfört ringaste utfällning i den genomdragna luftströmmen. Daggpunktsobservationerna voro nu: R. — 4,7; — 4,7 (utfällningen förstärkte sig ej vid temp:ns konstanthållande). Cr. (ej uppvärmning; långsam aspiration med vändaspirator) först vid — 6½° (emedan fullständigt luftombyte ännu ej skett). R. — 4,4, förstärkte sig; (temp. ute ± 0). Cr. (ej uppv.), — 2½. R. — 4,2. (Påliggande blåst, enstaka snökorn i luften). Cr. (ej uppv.), — 2½; efter 5 min., — 1¼. R. — 3,4. Cr. (ej uppv.), — 2. Cr. (uppv.), fortfarande — 2. Äfven R. fallit, till — 3,8 à — 3,9. Cr. (uppv.), — 1¾. Medium af observationerna å R., — 4,2. Följaktl. $p = 3{,}336$. Häraf, då $b = 760{,}4$, $\beta = 4{,}2$, $t = 15{,}7$, $\mu = 13{,}28$, fås $P = 38{,}2$ mg. Vägningen, som skedde påföljande dag, gaf till resultat en vigtsökning af 42,6 mg.

Den 14 jan. var i Stockholm ganska vackert och nästan klart väder på morgonen med en temp. af — 4,3. På middagen, under försöket, och sedan hela e. m. var det mulet, men med tämligen klar sigt. — Kemisk aspiration från 1 e. m. (temp. — 3,7) till 3,57 e. m. (temp. — 4,4). Daggpunktsobservationer: R., — 8 (temp. — 3,7). Spår till trindsnö i luften. Ånyo, nu vid — 8,3 (förstärkte sig ej, utan försvann snart). Påliggande blåst. Cr. (fosforsyretorkad som vanligt, ej uppv.), sedan vändaspiratorn gått i 8 min., — 7¾. Ånyo, nu vid — 7½. R., — 8,4 (temp.

— 4,2). Cr. (uppv.), — 6; ånyo, nu — 5. Nu afskildes den uppvärmda spiralen och blott den öfriga blyledningen på 161 cm. förenades omedelbart med hygrometern. Då erhölls utfällning af rimfrost först vid — $7^1/_2$ à — $7^3/_4$. Derpå afskildes mellanstycket på 87 cm och blott det yttersta stycket på 74 cm behölls. Ånyo spår vid — $7^1/_2$ à — $7^3/_4$. R. — 8,4 (temp. — 4,2), Lätt försvinnande fällning; påliggande blåst; ånyo trindsnö. Cr. (uppvärmning; hela ledningen; löpande vändaspirator); en öfvergående imning under temperatursänkningen, men qvarstående fällning först vid — $7^3/_4$. R., — 8,5 (temp. — 4,4). Cr. (uppv.), — $7^3/_4$ à — 8. R., svaga spår först vid — 9° (temp. — 4,4). Medium af observationer å R.: — 8,43°. Följaktligen $p = 2{,}372$. Då vidare $b = 771{,}4$, $\beta = 4{,}2$, $t = 14{,}2$, $\mu = 12{,}066$, blir $P = 27{,}3$ mg. Vägningen, påföljande dag, gaf 30,5 mg.

Den 16 jan. Lindrigt barometerfall i Irland. I södra Skandinavien vind från ostsidan och mulen väderlek. I Köpenhamn och Visby snöväder, som under dagens lopp utbredde sig vidare öfver Sverige (t. ex. i Stockholm, Upsala, Hernösand, Karlstad). — I Stockholm helmulet på morgonen; 6-uddig, kristalliserad och liksom afnaggad trindsnö strök sparsamt genom luften för ostlig vind. Kl. 1 middagen rådde åt alla håll på himmelen intensivt snöväder. Snön, till en början småflockig med liksom afdunstade kristallspetsar, föll under försökets gång i allt större och tätare flingor. Vind från o. s. o., svag. — Försöket pågick från 1,18 e. m. (temp. — 4,2) till 2,53 e. m. (temp. — 4,2). Daggpunktsobservationer: R., — 6,4 (temp. — 4,2); — 6,4 (temp. — 4). För snövädrets skull stacks Cr.-ledningens ände in i R.-hygrometerns metallbur, hvars lock dessutom täcktes af en handduk, som vid försökets slut befans öfverhöljdt af ett cirka 7 mm. djupt, jemnt snölager. Cr. (som vanligt fosforsyretorkad), sedan vändaspiratorn gått i 10 min., först vid — 8°; efter genomdragning medelst Bunsens aspirator, — 6. R., — 6,1; — 6,3. Cr. (uppv.), — 6 (temp. ute — 4,2). Cr. (utan spiral), — 6. R., — 6,2. Cr. (som nyss), — $5^3/_4$. Daggpunktsmedium

enl. R.: — 6,28. Följaktligen (enl. REGNAULTS tabell) $p = 2,827$. Då vidare $b = 765,2$, $\beta = 4,2$, $t = +14,4$, $\mu = 12,22$, så blir $P = 32,5$ mg. Vägningen, påföljande dag, gaf 34,1 mg. Denna siffra svarar bättre (då Regnaults tabell användes) mot daggpunkten i CR., — 6°, som skulle kräft en vigtsökning af 33,25 mg. Användes Fischers tabell öfver vattenångans maximispänstighet, blir det åter REGNAULTS daggpunktsmedium, som stämmer med vägningen. Det gör näml. $P = 34,0$ mg.

Det följer emellertid af dessa försök, att daggpunktshöjningen i CROVAS hygrometer är oregelbunden och ej kan bestämdt sägas vara beroende af ledningens uppvärmning. Oaktadt alla vidtagna försigtighetsmått med ledningens uttorkande, hvilka knapt kunnat göras större, synes det mig som om man till och med ej kunde fullt utesluta möjligheten, att ledningen någonstädes kunnat innehålla någon felkälla. På samma gång visar Crova-instrumentet sina olägenheter, i främsta rummet deri att det på grund af sin utomordentliga känslighet för i ledningen någorstädes gömda spår af fukt (jmfr försöket sid. 63) kräfver kontrollerande metoder till undvikande af misstag. Då dertill kommer vidlyftigheten i anordningar, isynnerhet vid vinterförsök — köldblandning för afkylning af den till eteraspiration använda luften, svafvelsyreflaska för dess torkning, allt med tillhörande rörledningar, m. m. — samt den högst betydliga åtgången af eter, så inses att man med Crova-hygrometern i praktiken stöter på mycket afsevärda svårigheter. Ett afgjordt företräde förtjenar enligt min mening REGNAULTS hygrometer med de anordningar jag ofvan beskrifvit, hvarigenom den både täflar med Crova-hygrometern i känslighet och dessutom på ett mera omedelbart och för felkällor skyddadt sätt bestämmer daggpunkten direkt i den atmosferiska omgifningen, som genom den omslutande metalltrådsburen hålles i relativ stillhet.

Beträffande storleken af de differenser i fuktighetsmängd i atmosferen, som erhållas vid bestämningar medelst vägnings-

metod och medelst den Regnaultska hygrometern, hafva försöken visat, att såsom i not till sid. 58 påpekades, ifrågavarande differenser vanligen synas hålla sig inom mera anspråkslösa gränser, än de preliminära försöken stundom gåfvo mig anledning förmoda. Detta gäller i ökad grad, om man vid beräkningen använder, i stället för den Regnaultska, den Fischerska tabellen med sina högre värden på vattenångans maximumtension. Bland 37 under januari, juni och augusti 1888 samt januari 1889 anstälda, försök fann jag, med detta beräkningssätt, 5 fall, då den ifrågavarande differensen ej uppgick till 1 %, 11 fall, då den var större än 1 %, men mindre än 4 %, 14 fall, då den höll sig mellan 4 % och 7 %; 6 fall då den utgjorde något öfver 7 intill 8,4 %, och blott 1, ändock tvifvelaktigt (det å sid. 58 omnämda); då differensen gick upp så högt som till 15,7 %. Differenserna voro alltid positiva i den mening, att den kemiska metoden gaf större fuktighetsmängd till resultat, utom i 2 fall, då likväl den negativa differensen ej uppgick till $^1/_2$ %.

Något samband mellan procent-talen, luftens klarhetsgrad och öfriga väderleksförhållanden har jag ej lyckats finna. Ej sällan synas de observerade öfverskotten af fuktighet utöfver den genom daggpunktshygrometern bestämda gasformiga blifva alldeles betydelselösa vid klar och genomskinlig luft, vindar från nordsidan och högt lufttryck, men stundom äro de under samma förhållanden ganska afsevärda. Måhända är mängden af fast eller fluid fuktighet i atmosferen i främsta rummet beroende af ganska partiela kondensationer och omsättningar deri, sådana som ej med de stora meteorologiska faktorerna stå i nödvändigt sammanhang.

Stockholm, 1890. Kongl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 3.

Onsdagen den 12 Mars.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens ledamot, Kommendören CARL BERTIL LILLIEHÖÖK med döden afgått.

Docenten A. N. LUNDSTRÖM hade aflemnat berättelse om den resa, han med understöd af Akademien sistlidne sommar utfört i Luleå Lappmark för anställande af växtgeografiska och växtbiologiska forskningar.

Hr SMITT dels redogjorde för sitt deltagande i den internationella zoologiska kongressen i Paris sistlidne sommar, och dels inlemnade fortsättning af den ornitologiska komiténs redogörelse (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr PETTERSSON lemnade några meddelanden om den nyligen under hans ledning utförda, af Friherre O. DICKSON och

några andra personer bekostade hydrografiska expeditionen i Skagerrack, hvarvid han redogjorde för arbetsmetoderna för bestämmande af de af hafsvattnet absorberade gaser samt den stora skilnad, som befunnits uti vattnets syrehalt i öppna hafvet och de inre, af en bottentröskel derifrån afstängda fjordarne, hvilken skilnad utan tvifvel är af betydelse för djurlifvet i hafvet.

Hr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade från Stockholms Högskola följande uppsatser: 1:o) »Om den konforma afbildningen af ett plan på ett prisma, jemte några närbeslägtade problem», af Fil. Kandidaten G. CASSEL (se Bihang etc.); 2:o) »Öfver H. WEBERS afhandling: Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Funktionen», af densamme (se Bihang etc.); 3:o) »Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta», af Filos. Kandidaten H. V. KOCH*; 4:o) »Om en speciel klass af singulära linier», af Fil. Kandidaten I. FREDHOLM*; 5:o) »Analytisk härledning af eqvationerna för de ytor och linier, som äro invarianta för den Poincaré'ska generaliserade substitutionen, samt några geometriska egenskaper hos sådana invarianta ytor och linier», af Fil. Kandidaten F. DE BRUN*.

Hr KLASON meddelade några undersökningar öfver senapsoljättiksyra och thiohydrotoin*.

Sekreteraren öfverlemnade följande inkomna afhandlingar och uppsatser: 1:o) »Studier öfver inflytandet på blodtrycket af retning af ryggmärgen och nervus splanichus med induktionsslag af olika freqvens och intensitet», af Med. Licentiaten J. E. JOHANSSON (se Bihang etc.); 2:o) »Derivat af 1 : 3-diklornaftalin», af Prof. P. T. CLEVE*; 3:o) »Bidrag till Sveriges Ascomycetflora», af Fil. Kandidaten K. STARBÄCK (Se Bihanget); 4:o) »Om Ribaucours cykliska system», af Prof. A. V. BÄCKLUND (se Bihang etc.); 5:o) »Bestämning af optiska vridningsförmågan hos några hartsderivat», af Filos. Kandidaten A. W. SVENSSON*.

Den *Fernerska* belöningen för året tillerkändes Professor G. MITTAG-LEFFLER för hans under förra året i Öfversigten in-

förda uppsatser: »Analytisk framställning af integralerna till en lineär homogen differentialeqvation för en cirkelring, hvilken icke innesluter något singulärt ställe», och »Analytisk framställning af invarianterna till en lineär differentialeqvation».

Den *Lindbomska* belöningen skulle i lika delar öfverlemnas åt Filos. Kandidaterne D. S. HECTOR och W. PALMÆR, den förre för hans i Öfversigten meddelade undersökning öfver derivat af svafvelurinämne, och den senare för hans jemväl i Öfversigten intagna uppsats om Iridiums amoniakaliska föreningar.

Den *Flormanska* belöningen anvisades åt Docenten vid Stockholms Högskola G. ADLERZ för hans i Bihanget till Akademiens Handlingar offentliggjorda afhandling: »Om digestionssekretionen jemte några dermed sammanhängande fenomen hos insekter och myriopoder».

För vetenskapliga resor inom landet beslöt Akademien utdelande af följande understöd:

åt Hr H. DAHLSTEDT 300 kr. för idkande af studier öfver växtslägtet Hieracium i Medelpad, Jemtland och Herjeådalen;

åt Filos. Kandidaten G. O. ANDERSSON 125 kr. för studerande af laf-floran i östra Skåne;

åt Filos. Kandidaten L. ROMELL 125 kr. för undersökningar hufvudsakligen af kritiska hymenomyceter inom Femsjö och andra trakter af södra Sverige;

åt Professor CHR. AURIVILLIUS 150 kr. för entomologiska forskningar på Öland samt för besök i Lunds och Malmö museer för granskning af nordiska Lepidoptera;

åt Docenten CARL AURIVILLIUS 150 kr. för anställande af biologiska iakttagelser öfver vissa krustacéer m. m. vid Kristinebergs zoologiska station;

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kr. för fortsatta forskningar vid Kristineberg öfver Bohusläns Actinier;

åt Filos Kandidaten O. HOLMQVIST 150 kr. för undersökningar vid Kristineberg dels öfver visceralskelettets muskulatur hos fiskar och dels öfver Ophiuridernas anatomi och biologi; samt

åt Docenten J. C. MOBERG 150 kr. för undersökning af Skånes kemperbildningar.

De till Akademiens förfogande ställda statsmedel till instrumentmakeriernas uppmuntran skulle i lika lotter tilldelas matematiske och fysiske instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Ingeniörsföreningen.*
Förhandlingar. Årg. 21(1886)—23(1888). Reg. Årg. 11—20. 4:o.
Australien. *Australasian association for the advancement of science.*
Meeting 1, held at Sydney 1888. Sydney 1889. 8:o.
Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*
Verhandlungen. Th. 8: H. 3. 1890. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahr 1889: 39—53. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 39(1883): Abth. 1—3. 1889—90. 8:o.
Boston, U. S. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 23: P. 2. 1888. 8:o.
Cambridge. *Observatory.*
Astronomical observations. Vol. 22(1866—69). 4:o.
Edinburgh. *R. College of physicians.*
Reports from the laboratory. Vol. 2. 1890. 8:o.
— *Botanical society.*
Transactions and proceedings. Vol. 17: P. 3. 1889. 8:o.
Hamburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd. 11: H. 1. 1889. 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 25: N:o 100. 1889. 8:o.
Leipzig. *Fürstl. Jablonowski'sche Gesellschaft.*
Preisschriften. N:o 27. Looss, A., Über Degenerations-Erscheinungen im Thierreich . . . 1889. st. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1888. 8:o.
Lille. *Université.*
Travaux et mémoires. T. 1: Mém. 1—3. 1889. 8:o.
Lisboa. *Academia R. das sciencias.*
Memorias. Classe de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. (2) T. 6: P. 2. 1887. 4:o.
» » » » moraes, politicas e bellas-lettras. (2) T. 5: P. 2; 6: 1. 1882—85. 4:o.

(Forts. å sid. 86.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

178. Derivat af 1 : 3 diklornaftalin.

Af P. T. Cleve.

[Meddeladt den 12 Mars 1890.]

Vid inverkan af klor på acet-α-naftylamin har jag framstält dikloracet-α-naftylamin[1]), hvaraf sedermera diklornaftalin erhölls genom acetamidgruppens utbyte mot väte. Den sålunda framstälda diklornaftalinen hade smältpunkten 61°. Emedan den diklornaftylamin, af hvilken diklornaftalinen framstäldes, vid oxidation gaf klorfri ftalsyra, måste den såväl som diklornaftalinen vara homonukleal. Af homonukleala diklornaftaliner äro fyra möjliga, nämligen med kloratomernas inbördes ställning:

a. 1 : 2 eller $\alpha^1 \beta^1$
b. 1 : 3 » $\alpha^1 \beta^2$
c. 1 : 4 » $\alpha^1 \alpha^2$
d. 2 : 3 » $\beta^1 \beta^2$

Den förstnämda diklornaftalinen har jag erhållit af monoklor-β-naftylamin och dess smältpunkt är 34°[2]).

Den tredje diklornaftalinen är den sedan gammalt bekanta β-diklornaftalinen, som smälter vid 68°. Den vid 61° smältande diklornaftalinen måste således vara antingen *b* eller *d*.

Claus och Volz[3]) hafva genom inverkan af fosforpentaklorid på den s. k. Rumpf'ska naftolsulfonsyran, som uppstår

---

[1]) Öfvers. K. Sv. Vet.-Akad. Förh. 1887, N:o 2, p. 43.
[2]) l. c. 1887, N:o 7, p. 445.
[3]) Ber. d. D. Chem. Ges. XVIII. 3154.

genom inverkan af svafvelsyra på β-naftol vid lägre temperatur, erhållit vid 61°,5 smältande diklornaftalin, hvilken enligt deras uppgift med kromsyra ger kinonen

CO
CCl
CCl
CO

På grund af denna uppgift ansåg jag[1]) att den af mig genom inverkan af fosforpentaklorid på ϑ-nitronaftalinsulfonsyrans klorid erhållna, vid 61° smältande ϑ-diklornaftalinen var den i föregående skema under *d* upptagna.

Emellertid måste de uppgifter, som CLAUS och VOLZ lemnat, vara oriktiga. Det har nämligen visat sig, att ϑ-diklornaftalin måste vara en αβ-diklornaftalin, icke ett ββ-derivat, alldenstund ϑ-nitrosulfonsyran, hvaraf den erhållits, innehåller nitrogruppen i α-ställning. Detta bevisas däraf, att PALMÆR[2]) erhållit nämda syra genom inverkan af svafvelsyra på α-nitronaftalin.

Vid inverkan af salpetersyra på naftalin-β-sulfonsyra erhöll jag utom ϑ-syran en isomer syra, betecknad som γ-syra[3]), hvaraf genom fosforpentakloridreaktionen erhölls en vid 61° smältande diklornaftalin, som äfvenledes måste innehålla nitrogruppen i α-gruppen, alldenstund deraf framstäld bromsulfonsyra vid hydrolys gaf mig α-bromnaftalin[4]).

Således finnas tvänne vid omkring 61° smältande diklornaftaliner, bägge α-β-derivat, hvaraf följer, att den homonukleala modifikationen, som jag erhållit af diklornaftylamin, icke kan vara annat än *b* i ofvanstående skema.

Den andra, vid 61° smältande diklornaftalinens konstitution har blifvit afgjord genom ERDMANNS och KIRCHHOFFS[5]) undersökningar. Dessa författare utgå från paraklor-fenyl-parakon-

---

[1]) Öfvers. K. Sv. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 7, p. 205.
[2]) l. c. 1888, p. 273.
[3]) l. c. 1886, p. 205.
[4]) l. c. 1888, p. 283.
[5]) Liebigs Ann. 247, p. 379.

syra, och framställa deraf klornaftol, som sedermera förvandlas till klor-amidonaftalin och diklornaftalin.

Cl, OC, CH_2, O, CH.CO.OH, CH = Cl, C—OH, CH, CH, CH $+ CO_2 + H_2O$

Kloratomerna i denna, vid 61° smältande diklornaftalin intaga således ställningen 1 : 7.

Enligt ARMSTRONG[1]) ger diklornaftalin, framstäld af ϑ-nitrosulfonsyra med svafvelsyra en diklorsulfonsyra, hvars klorid smälter vid 119°, under det att 1 : 3 diklornaftalin ger en sulfonsyra, hvars klorid smälter vid omkring 148°. Häraf följer således, att den af ϑ-sulfonsyran erhållna diklornaftalinen är 1 : 7 diklornaftalin, hvadan den af γ-nitrosulfonsyran framstälda diklornaftalinen torde vara 1 : 3 diklornaftalin.

Den sistnämda diklornaftalinen bildas äfven vid inverkan af alkoholiskt kali på naftalintetraklorid. Den diklornaftalin, som på detta sätt erhålles och betecknats α-, är nämligen en blandning af 1 : 4 och 1 : 3 diklornaftalin.

Att s. k. α-diklornaftalin innehåller 1 : 4 diklornaftalin framgår deraf, att WIDMAN genom inverkan af klor på α-diklornaftalin erhållit samma diklortetraklorid som af 1 : 4 diklornaftalin[2]), att HELLSTRÖM[3]) genom inverkan af kromsyra på α-derivatet framstält α-diklornaftokinon. Att α-diklornaftalin innehåller 1 : 3 diklornaftalin framgår af de försök, som samtidigt blifvit utförda af ARNELL[4]) och ARMSTRONG[5]) att hydrolysera de af α-diklornaftalin erhållna sulfonsyrorna, hvarvid erhållits dels 1 : 4 och dels 1 : 3 diklornaftalin.

Således bildas 1 : 3 diklornaftalin på följande trenne sätt:

a) af diklornaftylamin genom substitution af dess NH_2 mot H;

---

[1]) Abstracts of the Proceed. of the Chem. Soc., N:o 58, 1888.

[2]) Om naftalins klorföreningar 1877, p. 23.

[3]) Öfvers. K. Sv. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 7, p. 481.

[4]) Bidrag till kännedomen om naftalins klorsulfonsyror 1889, p. 38.

[5]) Abstr. of the Proceedings of the Chem. Soc., N:o 58, 1888.

b) af 1 : 3 nitrosulfonsyra (γ-syran) genom inverkan af fosforpentaklorid;

c) genom inverkan af kali och alkohol på naftalintetraklorid. Den dervid erhållna blandningen af 1 : 3 och 1 : 4 diklornaftalin kan icke genom fraktionerad destillation eller kristallisering uppdelas i sina komponenter.

Den med 1 : 3 diklornaftalin förvexlade 1 : 7 föreningen skall enligt ARMSTRONG hafva högre smältpunkt, nämligen 65°[1]) till 62°,5—63°[2]). ERDMANN uppger å andra sidan smältpunkten 61° för den syntetiskt framstälda föreningen, och ARNELL fann den högsta smältpunkten 62°,5.

Denna diklornaftalin bildas:

a) af 1 : 7 (ϑ)-nitronaftalinsulfonsyra med PCl_5 (CLEVE 1878).

b) af β-klornaftalinsulfonsyra (2 : 8) med PCl_5 (ARNELL 1885, ARMSTRONG 1887);

c) af β-naftylaminsulfonsyra (Badisk), genom dess förvandling till naftolsulfonsyra och dennas upphettning med PCl_5 (FORSLING 1888);

d) af *p*-klorfenylparakonsyra (ERDMANN och KIRCHHOFF).

CLAUS och VOLZ hafva genom PCl_5 reaktionen af den Rumpfska β-naftolsulfonsyran erhållit en vid 61° smältande diklornaftalin, hvilken med kromsyra skall gifva en homonukleal diklornaftokinon. Dessa uppgifter måste anses oriktiga. Sannolikt är den af CLAUS erhållna diklornaftalinen 1 : 7. ARMSTRONG har uppgifvit att naftalin β-disulfonsyra med PCl_5 ger en vid 61°,5 smältande diklornaftalin[3]), men sedermera[4]) förklarat att den sålunda erhållna diklornaftalinen är den vid 48° smältande 1 : 6 diklornaftalinen.

Den diklornaftalin, som blifvit använd till följande undersökning, har jag framstält af diklornaftylamin på sätt som jag

[1]) Brit. Ass. Manchdster Meet. 1887.

[2]) Abstr. of Proceed. of the Chem. Soc. 1889, p. 19.

[3]) Brit. Assoc. 1887.

[4]) Abstr. of Proceed. of the Chem. Soc., p. 58, 1888.

förut beskrifvit [1]). Dess kokpunkt, som förr icke blifvit bestämd, befanns vara 289° (korrig. 291°) vid 775 mm. barometertryck.

Inverkan af klor på 1:3 diklornaftalin.

I en lösning af diklornaftalin inleddes till full mättning en ström af klorgas. Kloroformlösningen blandades sedan med alkohol, hvarvid färglösa kristallnålar utföllo. Efter några omkristalliseringar ur kokande alkohol hade föreningen konstant smältpunkten 92°.

0,2614 gr. gaf 0,4875 gr. AgCl.

	Funnet.	Ber. f. $C_{10}H_5Cl_3$
Cl	46,13	45,93

Produkten var således en triklornaftalin och utan tvifvel samma förening, som jag förut erhållit genom inverkan af PCl_5 på diklornaftol [2]) och som har kloratomerna i ställningen 1:3:4. Någon additionsprodukt af diklornaftalin och klor tyckes icke bildas.

Inverkan af kromsyra på 1:3 diklornaftalin.

Vid försök att med salpetersyra oxidera diklornaftalin erhöllos endast starkt förorenade massor, ur hvilka inga kristalliserande föreningar kunde erhållas med de små mängder material, öfver hvilka jag förfogade. Derför företogs oxidationen med kromsyra i isättiklösning. Ungefär 10 gr. diklornaftalin löstes i 100 kubc. ättiksyra, och till lösningen sattes i små portioner och under afkylning en lösning af 25 gram kromsyreanhydrid. Inverkan är ganska häftig och sker under stark värmeutveckling. Efter slutad inverkan tillsattes vatten, hvarvid en riklig fällning af citrongula kristallnålar erhölls. Sedan dessa blifvit uppsamlade på filtrum, försattes filtratet med svafvelsyra och afdunstades till utjagande af ättiksyran. Återstoden neutraliserades

---

[1]) Öfvers. af K. Sv. Vet. Akad. Förh. 1887, N:o 2, p. 43.

[2]) l. c. 1888, N:o 2, p. 95.

med soda och kokades med natronlut till utfällning af kromoxidhydrat. Sedan detta blifvit frånskiljdt afdunstades lösningen och lemnades att kristallisera, hvarigenom natriumsulfat aflägsnades. Moderluten gjordes sur med svafvelsyra och skakades med eter, efter hvars afdunstning ftalsyra erhölls.

De gula kristallnålarne utgjordes af:

Monoklornaftokinon, $C_{10}H_5O_2Cl$. Efter upprepade kristalliseringar ur kokande alkohol bildar föreningen fina, citrongula kristallnålar med smältpunkten 115°, hvilka lätt lösas i kokande alkohol och i isättika.

0,2829 gr. gaf 0,2121 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	18,55	18,40.

Samma monoklornaftokinon har jag förut[1]) erhållit genom oxidation af monoklor-α-naftol med kromsyra. Dess konstitution åskådiggöres genom följande formel:

CO
Cl
CO

Således inträffar vid inverkan af kromsyra på 1 : 3 diklornaftalin detsamma som vid oxidation af 1 : 3 : 4 diklornaftol att en kloratom i paraställning utbytes mot syre.

För kontrollering af kinonens identitet med den af diklornaftol framstälda, upphettades den med anilin och alkohol, hvarvid erhölls aniliden $C_{10}H_4(NHC_6H_5)ClO_2$ i svårlösliga, glänsande, purpurröda nålar med smältpunkten 207°. Den anilid som jag förut erhållit af monoklorkinon, beredd af diklornaftol, smälte vid 202°—203°. Olikheten i smältpunkt är så ringa, att föreningarna måste anses identiska.

0,2653 gr. gaf 0,1291 gr. AgCl.

	Beräknadt:	Funnet:
Cl	12,04	12,49.

[1]) Öfvers. K. Sv. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 2, p. 94.

Ftalsyra, $C_6H_4(COOH)_2$. Den ftalsyra, som på ofvan uppgifna sätt erhölls, renades med blodlutkol och erhölls i fullkomligt färglösa kristaller, hvilka smälte vid 189°. Deraf framstäld anhydrid smälte vid 135°.

0,2198 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,4669 gr. CO_2 och 0,0762 gr. H_2O.

	Funnet.	Beräknadt.
C	57,91	57,87
H	3,85	3,61

Vid oxidation angripes sålunda den klorhaltiga delen af naftalinmolekylen, hvilket utan tvifvel står i samband med den lätthet, med hvilken klornaftokinon i första hand bildas.

Klornaftokinonoxim. — $C_{10}H_5Cl . O . NOH$. Om man på vattenbad under ett par timmar upphettar en blandning af kinonen med alkohol och klorvätesyrad hydroxylamin, erhåller man en brun vätska, som vid afsvalning afsätter en brun kristallmassa. Efter upprepade omkristalliseringar erhåller man deraf smutsigt gula kristallnålar, som smälta vid 200° och samtidigt med gasutveckling sönderdelas. Föreningen är ganska lättlöslig i kokande alkohol och icke svårlöslig i kall alkohol.

0,2354 gr., torkad vid 110°, gaf 13,4 kubc. qväfgas, mätt öfver kalilut vid t. 18° och bar. 755 mm.

0,2372 gr. gaf 0,1626 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	6,66	6,75
Cl	16,96	17,03

Natriumsalt af monoklornaftokinonoxim. — $C_{10}H_5ClO . NONa + 2H_2O$.

Oximen löses lätt i natronlut, och den koncentrerade lösningen stelnar vid afsvalning till en gröt af gula, mikroskopiska kristallnålar, som äro lättlösliga i hett vatten. Saltet innehåller ungefär 3 mol. kristallvatten, som bortgår vid torkning öfver svafvelsyra. Till analys användes salt torkadt till konstant vigt i exsickator.

0,2028 gr. förlorade vid upphettning till 115° 0,0145 gr. och gaf 0,0539 gr. Na_2SO_4.

0,2576 gr. gaf 0,1437 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	8,61	8,67
Cl	13,80	13,34
H_2O (1 mol.)	7,15	6,78.

Saltets lösning gaf med silfvernitrat och klorbarium rödbruna, geléartade fällningar.

Inverkan af salpetersyra på 1:3 diklornaftalin.

Utspädd salpetersyra tyckes icke ens efter flera dagars beröring med diklornaftalin utöfva någon inverkan. Om man till en blandning af rykande salpetersyra och koncentrerad svafvelsyra tillsätter diklornaftalin, sker nitrering med stark värmeutveckling. Dervid uppstår, om salpetersyran användes i stort öfverskott, såsom hufvudsaklig produkt diklortrinitronaftalin, men, om salpetersyremängden icke är tillräcklig, tvänne isomeriska diklordinitronaftaliner.

Diklordinitronaftalin N:o 1, $C_{10}H_4(NO_4)_2Cl_2$. Om man till en afpassad mängd af rykande salpetersyra och svafvelsyra tillsätter diklornaftalin, inträffar en mycket häftig inverkan. Efter slutad reaktion blandades massan med vatten, hvarvid en gulaktig, mjuk fällning erhölls. Denna produkt löstes i isättika, hvarefter ljusgula, fina, radierande nålar derur ansköto. Ur moderluten afsatte sig småningom hvita kristallgyttringar. De förstnämda kristallerna utgjordes af diklornaftalin N:o 1 med kristallättiksyra, de hvita gyttringarna af den isomeriska föreningen N:o 2. Efter upprepade kristalliseringar smälte N:o 1 vid 150°. Kristallerna innehöllo 29,22 proc. ättiksyra, som bortgick, atminstone delvis, vid vanlig temperatur och fullständigt vid 100°. Denna ättiksyrehalt motsvarar 2 mol. $C_2H_4O_2$ (ber. 29,47). Föreningen är lättlöslig i benzol och kristalliserar derur i tafvelformiga, korta kristaller. Den angripes knappast vid

upphettning med kromsyra och isättika samt förändras icke märkbart vid kokning med natronlut. Med en blandning af salpetersyra och svafvelsyra ger föreningen diklortrinitronaftalin.

0,2142 gr. gaf 17,5 kubc. qväfgas. mätt öfver kalilut vid t. 15°,8 och 776,5 mm. bar.

0,2356 gr. gaf 0,2342 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9.90	9.76
Cl	24.59	24.68.

Diklordinitronaftalin N:o 2 — $C_{10}H_4(NO_2)_2Cl_2$. — De i det föregående omnämda hvita kristallgyttringarne renades genom omkristallisering ur kokande alkohol och slutligen ur isättika. Föreningen bildar mycket små, nästan färglösa kristallnålar, som äro ganska svårlösliga i lösningsmedel. Smältpunkten är 158°. Natronlut löser icke föreningen, som med svafvelsyra och salpetersyra nitreras till trinitrodiklornaftalin.

0.1646 gr. gaf 13.6 kubc. qväfgas. mätt öfver kalilut vid t. 16 och 776 mm. bar.-tr.

0,1583 gr. gaf 0,1575 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	10,01	9,76
Cl	24,61	24,68.

Diklortrinitronaftalin — $C_{10}H_3(NO_2)_3Cl_2$. — Denna förening erhålles om diklornaftalin eller de bägge föregående föreningarne uppvärmas med en blandning af lika volymer rykande salpetersyra och koncentrerad svafvelsyra. Efter några omkristalliseringar smälte föreningen vid 178°. Den är mycket svårlöslig i alkohol. löses lätt i het isättika och kristalliserar derur vid afsvalning i svagt gula, kompakta och korta prismer. Ur benzol anskjuter den i väl utbildade kristaller, som innehålla kristallbenzol.

0,2275 gr. gaf 24,2 kubc. qväfgas. mätt öfver kalilut vid 16°,8 och bar. 761 mm.

0,2736 gr. gaf 0,2365 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	12,59	12,66
Cl	21,38	21,34.

Samma förening har förut blifvit framstäld af WIDMAN[1]) som erhållit den genom nitrering af s. k. α-diklornaftalin.

En af de bägge kloratomerna i trinitroderivatet är ganska löst bunden, så att den med lätthet låter utbyta sig mot NH_2, NHC_6H_5, OH vid föreningens behandling med amoniak, anilin och natronlut.

Derivat af diklortrinitronaftalin.

I. *Amido-klor-trinitronaftalin* — $C_{10}H_3NH_2(NO_2)_3Cl$. — Upphettar man i slutet rör i vattenbad trinitroderivatet med en lösning af amoniak i absolut alkohol, erhåller man inom kort ett brunrödt kristallpulver af små, väl utbildade kristaller. Lösas dessa i kokande alkohol, erhåller man vid afsvalning långa, böjliga, citrongula nålar, som äro mycket svårlösliga i alkohol och smälta vid 252°. De gula nålarne innehöllo kristallalkohol, 11,87 proc., som bortgick vid 115°. En mol. alkohol utgör 12,83 proc. Föreningen har inga basiska egenskaper och löses endast spårvis af kokande, utspädd klorvätesyra.

0,2063 gr. 115° torkad substans gaf 32,2 kubc. qväfgas mätt öfver kalilut, t. 17°,3, bar. 756 mm.

0,2290 gr. gaf vid förbränning med kaliumdikromat 0,0375 gr. H_2O och 0,3235 gr. CO_2.

0,2273 gr. gaf 0,1012 gr. AgCl.

I procent.	Funnet.	Beräknadt.
C	38,53	38,41
H	1,82	1,60
N	18,32	17,92
Cl	11,01	11,33

Föreningen reduceras lätt af tenn och saltsyra, och man erhåller efter tennets utfällning med svafvelväte samt afdunstning en sirapstjock lösning, hvilken med amoniak ger en amorf fällning, som i luften hastigt färgas smutsigt olivgrön.

II. *Anilido-klor-trinitronaftalin* — $C_{10}H_3.NHC_6H_5.(NO_2)_3Cl$. — Upphettar man diklor-trinitronaftalin med anilin, löses den

[1]) Om naftalins klorföreningar, p. 39, Upsala 1877.

lätt, och man erhåller vid tillsats af alkohol en kristallinisk, orangeröd fällning, hvilken är ytterst svårlöslig i kokande alkohol, t. o. m. i kokande isättika. Efter omkristallisering ur det senare lösningsmedlet erhölls föreningen i form af orangeröda fjäll med smältpunkten 232°.

0,2279 gr. vid 115° torkad substans gaf 0,0800 gr. AgCl.

0,2204 gr. gaf 27,2 kubc. qväfgas, mätt öfver kalilut vid t. 17°,8 och bar. 761 mm.

0,1954 gr. gaf 0,3618 gr. CO_2 och 0,0504 gr. H_2O.

	Funnet.	Beräknadt.
C	50,49	49,43
H	2,87	2,32
N	14,55	14,42
Cl	8,68	9,11.

III. *Trinitroklornaftol* — $C_{10}H_3(NO_2)_3Cl . OH$. — Om diklortrinitronaftalin upphettas med natronlut, blandad med litet alkohol för att underlätta lösningen, erhåller man en brun lösning, som efter koncentrering och afsvalning stelnar till en gröt af mikroskopiska kristallnålar. Saltet befriades från moderlut genom utpressning och löstes i vatten. Den mörkbruna filtrerade lösningen af natriumsaltet gjordes sur med ättiksyra och filtrerades från en ringa mängd hartsartade ämnen samt afdunstades till kristallisering.

Det sålunda erhållna natriumsaltet, som lätt löses i hett vatten, och icke är särdeles svårlösligt i kallt vatten, sönderdelades med klorvätesyra. Dervid utfäldes trinitroklornaftol som en amorf, hartsartad massa, hvilken lätt löstes i alkohol. Äfven i kokande vatten var den något litet löslig. Ur alkohollösningen erhölls endast en amorf, hartsartad massa, men ur kokande isättika ansköto vid afsvalning gula kristallnålar, hvilka innehöllo ättiksyra, 15,9 procent, som motsvarar en molekyl eller 16,0 procent $C_2H_4O_2$. Ättiksyran bortgår redan vid vanlig temperatur och fullständigt vid 120°. Den torkade substansen smälte vid 156°, hvarvid den under gasutveckling sönderdelades.

0,1806 gr., vid 110° torkad substans gaf 20,9 kubc. qväfgas, mätt öfver kalilut vid t. 18°,5 och bar. 766,5 mm.

0,2035 gr. likaledes vid 110° torkad substans gaf vid förbränning med blykromat 0,0300 gr. H_2O och 0,2917 gr. CO_2.

0,2287 gr. gaf 0,1017 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
C	39,09	38,29
H	1,63	1,28
N	13,71	13,40
Cl	11,00	11,29.

Trinitroklornaftol är en stark syra, som med karbonat ger kolsyra och salter, hvilka äro orangegula och lösliga i vatten. Salternas lösningar fällas icke af ättiksyra, men gifva med klorväte hartsartade fällningar af trinitroklornaftol. Blandar man utspädda och kalla lösningar af salterna med utspädd klorvätesyra, erhålles en emulsion af små droppar, som inom kort förändras till tunna, platta och citrongula kristallnålar.

Kaliumsaltet är tämligen lösligt i hett vatten men svårlösligt i kallt vatten. Det kristalliserar i gula, fina nålar. *Amoniumsaltet* är lättlösligt i hett vatten, och den koncentrerade lösningen stelnar vid afsvalning till en gröt af fina nålar. *Silfversaltet* är svårlösligt i kallt vatten och bildar likaledes fina kristallnålar. *Kalciumsaltet* är svårlösligt och bildar tunna, rektangulära taflor. *Blysaltet* löses svårt i hett vatten och utfaller vid afsvalning i form af mikroskopiska till busklika aggregat förenade nålar. Af salterna analyserades endast

Bariumsaltet — $[C_{10}H_3(NO_2)_3ClO]_2Ba + 2H_2O$ — är mycket svårlösligt och utfaller ur en i kokning mättad lösning i form af orangeröda, mycket små kristallnålar. Efter torkning i exsickator gaf saltet vid analys:

0,312 gr. förlorade vid 115° 0,0122 gr. och gaf 0,0896 gr. $BaSO_4$.

0,2503 gr. gaf vid förbränning med blykromat och kaliumdikromat 0,038 gr. H_2O och 0,2803 gr. CO_2.

	Funnet.	Beräknadt.
C	30,54	30,08
H	1,68	1,25
Ba	16,88	17,17
H_2O	3,91	4,51

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 72.)

Lisboa. *Academia R. das sciencias.*

Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. N:o 30—48; (2): 1–2. 1881—89. 8:o.

Ribeiro, J. S., Historia dos estabelecimentos scientificos, litterarios e artisticos de Portugal... T. 10—16. 1882—89. 8:o.

Coutinho, A. X. Pereira, Corso de silvicultura. T. 1—2. 1886—87. 8:o.

Machado, V., A electricidade. 1887. 8:o.

Motta, E. A., Liçoes de pharmacologia e therapeutica. 1887. 8:o.

Horta, J. M. da Ponte, Conferencia ácerca dos infinitamente pequenos. 1884. 8:o.

— » » da circulação da materia. 1886. 8:o.

Portugaliæ monumenta historica . . . Inquisitiones. Vol. 1: F. 1–2. 1888. Fol.

Documentos remettidos da Indiæ . . . T. 2—3. 1884—85. 4:o.

Corvo, J. de Andrade, Estudos sobre as provincias ultramarinas. Vol. 1—3. 1883—84. 8:o.

Du Bocage, C. R. & de Goyri, N., Origem da condado de Portugal. 1887. 4:o.

Småskrift, 1. 4:o.

London. *British museum.*

Lydekker, R., Catalogue of the fossil reptilia and amphibia. P. 3. 1889. 8:o.

Guide to the mineral gallery. 1889. 8:o.

— *Royal institution of Great Britain.*

Proceedings. Vol. 12: P. 3. 1889. 8:o.

List of the members . . . and lectures in 1888. 8:o.

— *Royal Society.*

Proceedings. Vol. 46: N:o 280–285. (1889/90). 8:o.

Mount Hamilton, U. S. *Lick observatory.*

Reports on the observations of the total eclipse of the sun 1889 $^1/_1$. Sacramento 1889. 8:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (2) Vol. 3 (1889): F. 1–12. 4:o.

Annuario. 1888. 8:o.

Neuchatel. *Observatoire cantonal.*

Rapport du directeur. Année 1887. 1. 8:o.

New Haven, U. S. *Astronomical observatory of Yale university.*

Transactions. Vol. 1: P. 2. 1889. 4:o.

Report. Year 1888/89. 8:o.

New York. *New York academy of sciences.*

Transactions. Vol. 8 (1888/89): N:o 5–8. 8:o.

Palermo. *R. Osservatorio.*

Pubblicazioni. Vol. 4 (1884—88). 4:o.

(Forts. å sid. 108.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 3.
Stockholm.

Öfver senapsoljättiksyra och thiohydantoin.

Af Peter Klason.

[Meddeladt den 12 Mars 1890.]

Genom inverkan af rhodankalium på monoklorättiketer erhöll Heintz (Ann. Ch. Pharm. 136, 223) rhodanättiketer. Vid alkaliers inverkan på den erhållna etern kunde ej något bestämdt resultat erhållas. Han försökte derför syrors inverkan derpå och fann att den äfven af dem angripes. Saltsyra löste densamma vid uppvärmning i vattenbad, och efter skedd afdunstning utkristalliserade en syra, som på grund af sin sammansättning af Heintz uppfattades såsom rhodanättiksyra.

Vid inverkan af klorättiksyra på thiokarbamid erhöll Volhard[1]) såsom reaktionsprodukt en kropp, hvilken han uppfattade såsom den mot hydantoin svarande thiohydantoin. Föreningen är en bas och erhölls i form af dess klorvätesyrade salt. Föreningen visade sig vara af ringa beständighet. Vid kokning med vatten upptogs detta, hvarvid salmiak och senapsoljättiksyra erhöllos.

En tid derefter visade jag (Öfversigt af Vet.-Akad. Handl. 1877, s. 47) att Heintz rhodanättiksyra och Volhards senapsoljeättiksyra äro identiska. Tillika framstälde jag den verkliga rhodanättiksyran eller rigtigare cyanthioglykolsyran. Gruppen cyan gaf sig tydligt tillkänna i denna syra, hvars mest utmärkande egenskap är att den ytterst lätt upptager vatten och öfver-

[1]) Journ. pr. Chemie 1874. s. 6).

går till karbaminthioglykolsyra NH_2COSCH_2COOH, hvilken å sin sida på det tydligaste sätt visade sig vara ett derivat af thioglykolsyran, alldenstund den särskildt vid inverkan af tunga metallsalter ytterligare hydrerades till thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak.

Å andra sidan kunde den dock vid inverkan af conc. saltsyra under förlust af vatten öfvergå till VOLHARDS senapsoljättiksyra. Denna senapsoljättiksyra visade sig ock liksom karbaminthioglykolsyra kunna hydreras till thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak. Härmed var i sjelfva verket bevisadt, att den s. k. senapsoljättiksyran endast var en inre anhydrid af karbaminthioglykolsyra. $NH_3COSCH_2COOH =$

$$CO\begin{cases} SCH_2 \\ NH.CO \end{cases} + H_2O.$$

Då emellertid denna uppfattning var svår att förlika med föreningens uppkomst af thiokarbamid, så lät jag syran tills vidare kvarstå såsom senapsoljättiksyra, oaktadt den i öfrigt ej hade egenskaper som påminte om komplexen sinapyl. Den ingick t. ex. ej föreningar med ammoniak eller primära aminer.

Bidrag till senapsoljättiksyrans resp. thiohydantoinens konstitution ha vidare CLAUS och NEUHOFFER (Ber. Ber. X, 825) sökt lemna. De undersökta sulfhydantoins förhållande till klor, brometyl och ammoniak för att få reda på, huruvida analoga additionsprodukter erhållas som med svafvelurinämne. Klor inverkade enligt formeln

$$CS\begin{cases} NH.CH_2 \\ NH.CO \end{cases} + 6Cl + 6H_2O = CH_3COOH + NH_2CONH_2 + H_2SO_4 + 6HCl$$

(då senapsoljeättiksyra enligt mina försök med brom ger bromättiksyra, så är väl reaktionsprodukten här otvifvelaktigt klorättiksyra i stället för ättiksyra).

Brometyls inverkan sker vid 130° enligt formeln $CS\begin{cases} NHCH_2 \\ NHCO \end{cases} +$

C_2H_5 Br. + $2C_2H_5OH = C_2H_5OCOCH_2NCS + C_2H_5OC_2H_5 +$ NH_4Br. Reaktionsprodukten innehöll äfven merkaptan och senapsoljättiksyra.

I afsigt att erhålla den enligt CLAUS och NEUHOFFER härvid uppkommande senapsoljättiketern har jag eftergjort detta försök.

Jag opererade på det noggrannaste såsom NEUHÖFFER föreskrifvit (jfr utförligare NEUHÖFFERS doktorsdissertation) och använde till försöket 20 gr ren sulfhydantoin. Det hade efter upphettningen afsatt sig betydliga mängder bromammonium och rören öppnade sig under temligen starkt tryck af bortgående kolsyra. Reaktionsprodukten innehöll betydliga mängder eter, tydligen uppkommen enligt formeln C_2H_5 Br. + $C_2H_5OH = (C_2H_5)_2O$ + HBr. Sedan etern blifvit afdestillerad, utfälldes af vatten en illaluktande olja, som visade sig vara thioglykolsyrad etyleter. Vattenlösningen innehöll senapsoljättiksyra och thioglykolsyrad ammoniak.

Reaktionen är sålunda en helt annan än C. & N. angifva. Förloppet är tydligen följande. Det vid brometyls omsättning med alkohol uppkommande bromvätet hydrerar thiohydantoin i första hand till ammoniak och senapsoljättiksyra, och denna åter till thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak. (Senapsoljättiksyra upphettad med vatten till omkring 150° sönderdelas i kolsyra, ammoniak och thioglykolsyra, och detta mer ju högre temperaturen är, såsom särskilda försök hafva visat). CLAUS och NEUHOFFERS försök, rätt uttydda, bekräfta sålunda mina tidigare undersökningar öfver senapsoljättiksyran.

Deras uppgift om att vid inverkan af ammoniak på thiohydantoin bildas glykokollamid torde väl behöfva en revision.

MALY (Ber. Ber. X, 1849) framkastar den förmodan, att sulfhydantoin borde anses ha formeln $CS\begin{matrix} / N = CH_2CO \\ \backslash NH_2 \end{matrix}$, hvilken formel af PAUL J. MEYER (Ber. Ber. X 1965) bevisades vara

origtig, alldenstund af kloracetanilid och thiokarbamid erhölls dels sulfhydantoin, dels fenylsulfhydantoin, hvilken senare kropp äfven erhölls af fenylthiokarbamid och monoklorättiketer.

A. LANGE (Ber. Ber. XII 595) framställde difenylthiohydantoin af difenylthiokarbamid och monoklorättiksyra. Genom behandling med syror öfvergick difenylthiohydantoin i fenylkarbaminthioglykolyl och anilin. Den hittills använda formeln för senapsoljeättiksyra var sålunda oanvändbar och han framställde förslagsvis formeln

$$\begin{array}{l} CS = NH - CH_2 \\ \quad\;\; | \qquad\quad | \\ \quad\;\; O \;-\; CO\,. \end{array}$$

Slutligen har C. LIEBERMANN och A. LANGE (Ber. Ber XII, 588) visat, att difenylthiohydantoin med alkoholiskt kali ger difenylurinämne och thioglykolsyradt kali. De antogo nu, att klorättiksyrans inverkan på thiokarbamid är primärt en addition af samma art som de af CLAUS framställda talrika additionsprodukter mellan svafvelurinämne och åtskilliga andra kroppar, äfvensom de af WALLACH framställda additionsprodukterna mellan thioamider och andra föreningar. Klorättiksyra och thiokarbamid ge i första hand upphof till

$$Cl - S \begin{cases} NH_2 \\ -CH_2COOH, \\ NH_2 \end{cases}$$

som sedan öfvergår i thiohydantoin:

$$C \begin{cases} {/\!\!/} NH \\ - SCH_2CO \\ \diagdown NH \diagup \end{cases}$$

och slutligen i senapsoljättiksyra:

$$C \begin{cases} / NH - \\ - S - CH_2CO. \\ {\diagdown\!\!\diagdown} O \end{cases}$$

Denna förklaring af reaktionen har sedermera vunnit allmän anslutning. En liten modifikation torde den dock behöfva. Det

är tydligen sulfhydratformeln af thiokarbamid, som omsätter sig med klorättiksyra till thiohydantoinsyra, resp. thiohydantoin och vatten.

I bevisföringen för nämda föreningars konstitution fattas sålunda endast framställningen af de isomera verkliga thiohydantoin så väl som senapsoljättiksyra.

Senapsoljeättiksyrad etyleter.

Redan för mer än 10 år sedan anställde jag försök i den rigtningen. RATHKE har visat att thiofosgen med primära aminer ger senapsoljor. Per analogiam skulle man sålunda af glykokoll och thiofosgen erhålla den verkliga senapsoljättiksyran. Vid vanlig temperatur inverkade dessa kroppar ej på hvarandra. Reaktion inträdde väl vid högre temperatur i tillsmält rör. Det visade sig emellertid, att härvid uppkom endast en i vatten och andra lösningsmedel olöslig anhydrid af glykokoll. Jag försökte derpå att eterifiera glykokoll. Den härvid, såsom CURTIUS sedermera visat, verkligen uppkommande klorvätesyrade glykokolleterns stora likhet med klorvätesyrad glykokoll undgick på den grund min uppmärksamhet. Då sedermera genom mina undersökningar äfven thiofosgen en jemförelsevis lätt metod var vunnen att erhålla denna kropp, har jag ånyo upptagit frågan och det har dervid visat sig, att thiofosgen med största lätthet reagerar på glykokolletern, enligt formeln

$$CSCl_2 + 3NH_2CH_2COOC_2H_5 =$$
$$CSNCH_2COOC_2H_5 + 2HClNH_2CH_2COOC_2H_5.$$

Framställningen sker på följande sätt. En vägd mängd ren thiofosgen utspädes med ren och torr eter, hvarpå en enligt CURTIUS' metod framställd eterlösning af en beräknad mängd glykokolleter [1]) droppvis och under kraftig omskakning sättes till

[1]) Vid framställning af denna af klorvätesyrad glykokolleter och Ag_2O har jag aldrig erhållit öfver 72 pr. T af den beräknade mängden. Halten af glykokolleter i eterlösningen bestämmes lätt genom att utsätta en gifven volum af lösningen för inverkan af torr klorvätegas samt väga den uppkommande klorvätesyrade glykokolletern.

thiofosgenlösningen. Härvid utvecklas en betydlig mängd värme så att lösningen behöfver afkylas. Klorvätesyrad glykokolleter utkristalliserar härvid i beräknad mängd. Det är af största vigt att förhållandet emellan thiofosgen och glykokolletern är det rigtiga och att blandningen sker kraftigt, ty i fall glykokolletern kommer i beröring med den bildade senapsättiketern, uppkommer en additionsprodukt dem emellan, en thiohydantoin. Är thiofosgen i öfverskott synes den ock inverka på senapsättiketern, åtminstone är den sednare då ej lätt att få ren. Sedan den bildade klorvätesyrade glykokolletern blifvit frånfiltrerad och etern blifvit genom destillation afskiljd ur filtratet, öfverdestilleras den återstående orena senapsoljättiketern med vattenånga, extraheras ur destillatet med eter och renas slutligen, sedan etern blifvit frånskiljd, genom destillation i vacuum. Vid 12 mm. kvicksilfvertryck kokar den utan sönderdelning vid 110°. Sp. vigt vid $\frac{18^\circ}{4^\circ} = 1{,}1649$.

Sinapylättiketern är färglös eller svagt gulaktig, vid vanlig temperatur temligen tjockflytande och af en svag men tydlig senapslukt, hvilken vid dess upphettning blir lika intensiv som den vanliga senapsoljans och kan knappast derifrån skiljas.

Den ger identiska reaktioner med senapsoljorna. Sålunda förenar den sig med ammoniak och primära aminer till thiohydantoinsyrade eterarter, resp. thiohydantoiner. Då dessa emellertid enklare erhållas af glykokolleter och senapsoljor, skola de sednare i ett sammanhang beskrifvas.

Upphettas sinapylättiketern med saltsyra i tillsmält rör, sönderfaller den lätt under upptagande af vatten i glykokolleter (denna öfvergår delvis eller helt och hållet i glykokoll och alkohol), kolsyra och svafvelväte.

Baser inverka ock lätt på senapsoljättiketer. Reaktionsförloppet synes ock här vara mera kompliceradt. 5,22 gr. af etern upphettades med 3,1 gr. BaO_2H_2 i vattenlösning till cirka 80° i tillsmält rör. Massan var intensivt gulfärgad och innehöll 2,38 gr. kolsyrad baryt äfvensom svafvelväte. Filtratet reagerade lindrigt

surt och kunde ej bringas att kristallisera, ej heller sedan baryten var utfäld. Någon glykokoll innehöll substansen ej. Huruvida det är möjligt att erhålla den fria senapsoljättiksyran af dess eter få kommande undersökningar afgöra.

Thiohydantoin.

Uppskjutande beskrifningen på deriverade thiohydantoiner och hydantoinsyror till ett annat tillfälle skall jag här i korthet redogöra för typerna för dessa föreningar, thiohydantoin och thiohydantoinsyra.

Thiohydantoin erhålles genom att i ett profrör upphetta klorvätesyrad glykokolleter och torrt rhodankalium till lika molekuler. Upphettningen sker lämpligen i ett svafvelsyrebad till 140—150° under högst $^1/_2$ timma. Under 140° synes reaktionen knappast försiggå. En stegring öfver 150° verkar ock skadligt på utbytet. Man tager lämpligen 10 gr. klorvätesyrad glykokolleter i hvarje profrör samt ett lindrigt öfverskott af rhodankalium. I den smälta massan försiggår en regelbunden men dock ej betydlig gasutveckling, hvilken gas delvis består af rhodanetyl. Massan färgas derunder brunröd. Smältan löses i vatten, hvarpå tillsättes saltsyra och afdunstas till kristallisation. Den utkristalliserade thiohydantoinen renas genom omkristallisation och affärgning med djurkol.

Thiohydantoinen är, som alla verkliga thiohydantoiner, glänsande gul till färgen. Den är i kallt vatten svårlöslig, men i varmt lättlöslig och kristalliserar lätt och i väl utbildade tjocka och spröda prismor. Den sönderdelas innan smältningen.

Dess sammansättning är enligt formeln

$$CS\begin{matrix} \diagup NH\,.\,CH_2 \\ \qquad\quad | \\ \diagdown NH-CO \end{matrix}$$

och sålunda, såsom här nedan skall visas, den mot hydantoin svarande svafvelföreningen.

Analys:

0,303 gr. gaf 0,346 gr. CO_2 och 0,094 gr. H_2O.

		Ber.	Erh.
C_3	36	31,03	31,14
S	32		
N_2	28		
H_3	4	3,44	3,44
O	16		
	116		

Thiohydantoin är indifferent mot syror. Saltsyra till och med ökar dess svårlöslighet och kristalliserar den derur genast i långa nålar. Den skiljer sig deri väsentligen från oximidohydrothiazol (thioglykolylkarbamidin), hvilken är en bas. Gruppen

$$NH = C\begin{cases} S- \\ NH- \end{cases}$$ är sålunda kraftigare basisk än $$SC\begin{cases} NH- \\ NH- \end{cases}$$

Thiohydantoin, liksom alla thiohydantoiner jag undersökt, existerar i två isomera former, af hvilka den här ofvan beskrifna är den beständiga och har formeln $$CS\begin{cases} NHCH_2 \\ \quad\quad | \\ NH.CO \end{cases}$$; den dermed isomera $$HSC\begin{cases} NCH_2 \\ \quad\quad \backslash \\ NH-CO \end{cases}$$ är i analogi med t. ex. isofenylthiohydantion, som sedermera skall beskrifvas, antagligen icke kristalliserbar och öfvergår lätt i den föregående. Dess blyförening erhålles såsom en indigoblå i vatten olöslig förening vid digestion af thiohydantoin med blyoxid. Att thiohydantoin vid behandling med oxider af metallerna bly, kvicksilfver och silfver i sjelfva verket öfvergår till motsvarande metallföreningar af denna isothiohydantoin $$HSC\begin{cases} N-CH_2 \\ \quad\quad | \\ NH-CO \end{cases}$$ framgår tydligen deraf, att thiohydantoin ej kan med nämnda metalloxider öfverföras i hydantoin.

Thiohydantoinsyra.

Thiohydantoin uppvärmes med något mer än den beräknade mängden barythydrat på vattenbad under flera timmar. Ur lös-

ningen utfälldes baryten derefter jemt med svafvelsyra. Ur filtratet kristalliserar thiohydantoinsyra i praktfulla, färglösa prismor.

Analys:

0,3105 gr. gaf 0,3085 gr. CO_2 och 0,133 gr. H_2O

0,294 gr. gaf 0,505 gr. $BaSO_4$

		Ber.	Erh.
C_3	36	26,85	27,09
O_2	32		
H_6	6	4,47	4,76
N_2	28		
S	32	23,88	23,59
	134		

Thiohydantoinsyran är i varmt vatten lättlöslig, i kallt svårlöslig. Dess barytsalt kristalliserar ej. Bariumsaltet ger en hvit amorf fällning med blyacetat, en liknande med silfvernitrat och kvicksilfverklorid, med jernklorid ger den en rödgul fällning.

Hydantoinsyra.

Försättes en varm lösning af thiohydantoinsyra med kvicksilfveroxid, så afsvaflas thiohydantoinsyran, hvarvid antagligen bildas cyanglykokoll. Afdunstas lösningen med saltsyra till nära torrhet, kristalliserar återstoden till större delen efter en tids förlopp. Kristallerna befriades från moderlut på sugporslin samt omkristalliserades, då stora prismor erhöllos, som till sammansättning och egenskaper öfverensstämma fullständigt med hydantoinsyra.

Hydantoinsyrad etyleter.

Denna förening erhölls på samma sätt som thiohydantoin om i stället för kaliumthiocyanat användes kaliumcyanat. Den mörkfärgade massan löses i vatten och affärgas med djurkol. Ur lösningen utkristalliserar hydantoinsyrad etyleter i vackra, vattenklara prismor. Den är i varmt vatten ganska lättlöslig och smälter vid 138,5°.

Analys:

		Ber.	Erh.
C_5	60	41,09	41,32
H_{10}	10	6,85	6,87
O_3	48		
N_2	28		
	146		

Under det sålunda hvarken hydantoinsyra eller hydantoinsyrad etyleter vid upphettning öfvergå i hydantoin, förlora thiohydantoinsyrorna såväl som deras eterarter lätt vatten resp. alkohol och öfvergå i thiohydantoiner. Det ligger nära till hands att antaga, att denna anhydridbildning alldeles motsvarar oxysyrornas öfvergång i laktoner eller med andra ord, att thiohydantoinsyran har formeln $NH = CSH - NHCH_2COOH$. Under denna förutsättning skulle thiohydantoin hafva formeln

$$NHC\begin{matrix}\diagup S - CO \\ \qquad \diagdown \\ \diagdown NH - CH_2\end{matrix}$$

. Detta antagande strider emellertid mot det faktum, som tydligen visar sig hos t. ex. fenylthiohydantoin, att den existerar i en isomer form innehållande komplexen SH.

Det synes alltså endast återstå det antagande, att en väteatom i gruppen $CSNH_2$ är rörligare än i gruppen $CONH_2$, och att denna rörlighet betingar anhydridbildningen. Å andra sidan gifves det äfven föreningar, innehållande komplexen $CONH_2$, hvilka bilda dylika anhydrider, t. ex. karbaminthioglykolsyrans öfvergång i dioxyhydrothiazol (thioglykolylkarbimid).

Slutligen vill jag nämna att några aromatiska derivat af thiohydantoin redan förut äro framställda af O. ASCHAN (Ber. Ber. XVII, 420). Han erhöll dem genom inverkan af aromatiska senapsoljor på glykokoll och homologa. De så erhållna föreningarne öfverensstämma med dem som uppkomma af senapsoljor och glykokolleter, hvilken sednare metod äfven ger thiohydantoiner med verkliga alkylsenapsoljor. Till sist vill jag förelöpande anmärka att ASCANS deriverade thiohydantoinsyror, erhållna genom alkaliers inverkan på motsvarande thiohydantoiner, icke utgöra dessa syror utan motsvarande thiohydantoiners sulfhydratform.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 3.
Stockholm.

Bestämning af optiska vridningsförmågan hos några hartsderivat.

Af A. W. Svensson.

[Meddeladt den 12 Mars 1890 genom T. R. Thalén.]

På anmodan af Fil. Lic. Albert Vesterberg har jag på Upsala Universitets fysiska laboratorium utfört en undersökning af polarisationsplanets vridning hos åtskilliga af honom framstälda hartsderivat. Hr Vesterberg hade funnit,[1]) att, då den i kall alkohol svårlösliga delen af elemiharts — Amyrin kallad — blifvit öfverförd till ättiksyre-eter, denna vid utkrystallisering ur en ej alltför koncentrerad ligroinlösning erhölls i två olika slag af krystaller, hvilka, skilda åt och omkrystalliserade, visade olika smältpunkt: det ena slaget vid 235°, det andra vid 220°. Häraf drager Hr Vesterberg den slutsatsen, att s. k. amyrin är en blandning af två olika alkoholer, men isomera med hvarandra, af hvilka han kallar den med lägre smältpunkt α-amyrin, den med högre β-amyrin. Det är dessa amyriner, deras ättiksyre-etrar, oxi- och bromderivat af α-föreningen jemte några andra i samband med dem stående ämnen, bland hvilka märkas två elemioljor af olika härkomst, hvilkas optiska vridningsförmåga jag undersökt, och för hvilken jag nu går att redogöra.

Det instrument, med hvilket denna undersökning utförts, var en s. k. halfskuggepolarimeter af Laurent (Polarimètre-Lau-

---

[1]) Ber. d. Deut. chem. Ges. XX, 264 (1887).

RENT, petit modèle), som nyligen inköpts för Fysiska kabinettets räkning, och som prof. THALÉN godhetsfullt stälde till mitt förfogande. Denna polarimeter visade sig synnerligen känslig och beqväm. En anmärkning kan dock göras mot densamma, neml. att inställning endast var möjlig i ett läge hos analysatorn, hvarigenom möjligen befintliga fel hos nicholerna ej kunde elimineras[1]). Inställningarne kunde för öfrigt i allmänhet ske på 1′ när[2]), afläsningarne på cirkelgraderingen på 1′. Ljuskällan var en med smält klornatrium färgad gaslåga. Vid bestämning af vridningen hos lösningar användes ett ung. 2 dm långt rör och för oljorna rör på ung. 1 och 0,5 dm, alla af metall med ändarne slutna med planglas, fasthållna genom påskrufvade muttrar[3]). Rörens längd uppmättes med delningsmaskin, och erhölls såsom medium af flera mätningar längs olika generatriser:

det längsta röret = 199,83 mm,
det mellersta » = 100,04 mm,
det kortaste » = 49,92 mm.
(Temp.: rumstemperatur.)

Vid *beredning af lösning* med en bestämd koncentration (= antal gram substans lösta till 100 cm³ lösning) förfors på följande sätt. Uppvägd substans infördes i röret genom ett på midten befintligt ansatsrör. Sedan fyldes röret med lösningsmedlet till en bestämd höjd, hvilken lätt kunde fixeras, om man, seende genom detsamma, observerade meniskens läge, hvilken bildade sig i ansatsröret. Innan vätska påfyldes till den bestämda höjden, blef all substans upplöst. Detta påskyndades genom omskakning förmedelst vickningar på röret och den högre temperatur, som röret erhöll, då man vid denna operation omslöt det med händerna. Slutligen fyldes röret, sedan det fått antaga omgifningens temperatur, till det bestämda märket, och

[1]) Jmfr. LANDOLT, Das opt. Drehungsvermögen etc., 1879, sid. 116 nederst.

[2]) D. v. s. successiva inställningar skilde sig från hvarandra med i allmänhet högst 2′.

[3]) Rören hörde till WILDS polaristrobometer.

det sist införda blandade man noga med det öfriga genom att låta en luftblåsa, som vid lutning på röret lätt kunde införas, passera från ena ändan af röret till den andra, samt äfven genom att försätta den inneslutna vätskan i rotation. Att en god omröring af vätskan på detta sätt försiggick, kunde man se på de i densamma befintliga stoftpartiklarnes rörelse. Genom detta förfarande erhölls ganska lätt en homogen lösning af — då rörets kubikinnehåll var känd — bekant koncentration med användning af minsta möjliga material, hvilket senare var för mig en nödvändig sak, emedan helt ringa mängder substans stodo till mitt förfogande. Dessutom kunde derigenom samma lösning användas under flera dagar, möjligen med någon påfyllning af lösningsmedel, i fall vätskan afdunstat genom öppningen vid ansatsröret, hvilket i allmänhet hölls slutet med en kork, genomborrad af ett kapillärt glasrör, för att undvika större tryck i röret vid temperaturvexlingar. Enär lösningsmedlen — de utgjordes af benzol och alkohol — voro ganska flyktiga, hade ändring i koncentrationen vid annat förfaringssätt lätt kunnat inträffa. Rörets volym bestämdes genom utvägning med destilleradt vatten af känd temperatur före och efter undersökningen och befanns:

i förra fallet = 25,65 cm^3,
i senare d:o = 25,56 cm^3;

sål. *rörets vol.* i med. = 25,60 cm^3.

En svårighet visade sig i början att erhålla röret så tätt, att vätskan ej trängde ut och afdunstade på yttre sidan, hvarigenom substans, som medföljde, gick förlorad. Efter fåfänga försök lyckades det dock slutligen att med ett ämne, som ej löses af de använda vätskorna, neml. gelatin, få röret tätadt. Ett tunnt lager af en lösning af gelatin i vatten ströks på ändarne af röret, planglasen dittrycktes, muttrarne skrufvades på och allt sammans fick stå, tills det torkat. Äfven vid ansatsröret på midten måste gelatin användas. Jag gjorde en särskild mätning af afståndet mellan planglasens yttre sidor och af deras

tjocklek för att undersöka, huruvida gelatinet mellan röret och planglasen var af sådan tjocklek, att det i märkbarare grad ändrade rörlängden. Det befanns, att det ej inverkade åtminstone på 1:sta dec., d. v. s. 0,1 mm [hvarför det förut angifna värdet på rörets längd (= 199,83 mm) kan anses tillräckligt noggrannt].

För att erhålla lösningar af olika koncentration borttogs med en pipett en viss del af lösningen (nära hälften) och ersattes med lösningsmedel. Volymen af det borttagna angafs af pipettens volym, hvilken åter bestämts genom vägning af en lika stor volym vatten, som befunnits = 12,13 cm^3. [Efter undersökningens slut togs såsom kontroll en ny bestämning genom att först väga pipetten och sedan denna + vatten; nu erhölls 12,14 cm^3].

Uppvägning af substans gick så till, att denna, innesluten i profrör (af ej öfver 9 g:s vigt), vägdes jemte detta, hvarpå det, som skulle lösas, uttömdes, och profrör + rest af substans vägdes. Härvid begagnades alltid dubbelvägning. Reduktion till lufttomt rum har ej kunnat ske, då substansens täthet ej var bekant. På grund häraf kan ej större noggrannhet än på 1 mg i allmänhet hafva erhållits.

Temperaturbestämningarne hos lösningarne togos till en början med en termometer, hvars reservoir hölls tätt intill röret och jemte detta omslöts af bomull. Sedermera användes en annan termometer, som efter hvarje observationsserie nedsänktes i röret. Termometrarnes 0-punkter undersöktes. Variationerna i rörets och pipettens volym på grund af olika rumstemperaturer hafva negligerats.

Gången af en bestämning var följande:

Sedan polarimetern noga inrigtats, gjordes inställningar med röret endast innehållande lösningsmedel, först 5 st. och, sedan det vändts om så, att den ända, som förut var längst bort från anal., kom närmast, ytterligare 5 st. Aritm. mediet af dessa togs såsom 0-ställning. Sedan tömdes röret till ungefär hälften, substans infördes och nedspolades noga med något vätska, hvarpå

förfors, som redan är nämdt. Då röret stått i rummet någon tid, så att det hunnit antaga ung. dess temp., gjordes 10 inställningar, 5 med röret i ena, 5 i andra leden, hvarvid jag lagade, att det, så vidt möjligt, hade samma ställning, som förut vid 0-ställningen. [Det hade neml. visat sig, att inställningen ej blef densamma, om röret vreds ett större antal grader om sin längdaxel.] Mediet af dessa gaf nu, då man kände 0-ställn., polarisationsplanets vridning α_D. Temperaturen aflästes. — Lösningen utspäddes, och ny uppmätning af vridningen skedde på liknande sätt. Understundom, då vridningen var betydligare, gjordes ännu en inställning med mindre koncentration.

Med kännedom om vridningen α_D för rörlängden l och koncentr. c (= antal gram i 100 cm³ lösning eller antal g (= p) i 25,60 cm³ lösning $\times \frac{100}{25{,}60}$) beräknas nu spec. vridningsförmågan $[\alpha_D]$ ur

$$[\alpha]_D = \frac{100\,\alpha_D}{lc} = \frac{25{,}60\,\alpha_D}{lp}.$$

Sedan 12,13 cm³ borttagits och ersatts med lösningsmedel, är den lösta substansen

$$p_1 = \frac{25{,}60 - 12{,}13}{25{,}60}\,p = \frac{13{,}47}{25{,}60}\,p,$$

och efter ännu en utspädning

$$p_2 = \left(\frac{13{,}47}{25{,}60}\right)^2 p\,.$$

Resultatet af undersökningen öfver de *lösta ämnenas* opt. vridningsförmåga meddelas i nedanstående tabell.

Gram löst subst.	c	α_D	$[\alpha]_D$	Lösnings-medel.	Temp.
		1. *α-amyrylacetat*, $C_{30}H_{49}OC_2H_3O$.			
0,8045	3,1426	+ 4°,777	+ 76°,08	Benzol	14°,7
1,0430	4,0742	+ 6,267	+ 76,99	»	17,6
0,5488	2,1437	+ 3,287	+ 76,74	»	19,4
0,2888	1,1281	+ 1,748	+ 77,56	»	19,0
		2. *β-amyrylacetat*, $C_{30}H_{49}OC_2H_3O$.			
1,0626	4,1508	+ 6°,515	+ 78°,63	»	16°,7
0,5591	2,1840	+ 3,383	+ 77,53	»	17,0
0,2942	1,1492	+ 1,810	+ 78,83	»	16,3
		3. *α-amyrin*, $C_{30}H_{49}OH$.			
0,9827	3,8387	+ 7°,027	+ 91°,59	»	16°,7
		4. *β-amyrin*, $C_{30}H_{49}OH$.			
0,4878	1,9055	+ 3°,800	+ 99°,81	»	19°,1
		5. *brom-α-amyrin*, $C_{30}H_{48}BrOH$.			
0,6630	2,5898	+ 3°,767	+ 72°,80	»	16°,3
0,3488	1,3625	+ 2,000	+ 73,46	»	16,5
		6. *oxi-α-amyrin*, $C_{30}H_{48}OOH$.			
0,4232	1,6531	+ 3°,587	+ 108°,6	»	15°,5
0,2227	0,8699	+ 1,901	+ 109,4	»	15,7
		7. *Kolväte* $C_{20}H_{34}$ [1].			
0,3085	1,2051	+ 0°,012	+ 0°,50	»	—
0,1623	0,6340	+ 0,008	+ 0,63	»	—
		8. *Elemisyra I.*			
0,4695	1,8340	— 1°,013	— 27°,64	Abs. alkohol	16°,9
0,2470	0,9648	— 0,535	— 27,75	»	18,0

[1]) Se noten till följande sida.

Gram löst subst.	c	α_D	$[\alpha]_D$	Lösnings-medel.	Temp.
		9. *Elemisyra II.*			
{0,5604	2,1891	— 1°,137	— 26°,00	Abs. alkohol	16°,9
{0,2949	1,1519	— 0,605	— 26,29	»	18,0
	10. *Dextropimarsyra*[1]) *behandlad med* HCl.				
{0,1660	0,6484	+ 0°,767	+ 59°,20	Abs. Alkohol	17°,7
{0,0873	0,3410	+ 0,390	+ 57,21	»	17,2

Anm. Vid de bestämningar, som sammanhållas med klammer, har en lägre koncentr. erhållits ur högre genom utspädning. Best. 7 ger värden på α_D, som ligga inom observationsfelens område.

Elemioljorna, af hvilka jag kallar den ena elemiolja 1, den andra elemiolja 2, voro framstälda af Hr VESTERBERG ur två olika slags elemiharts genom destillation med vattenånga och derpå följande fraktionerad destillation. De hade nästan lika kokpunkt, men olika täthet. Denna senare bestämdes af mig med pyknometer vid tvenne tillfällen med några dagars mellanrum, under hvilka de användes för bestämning af vridningsförmågans ändring med temperaturen. Den första täthetsbestämningen gjordes strax efter sedan undersökningen af deras vridningsförmåga vid rumstemp. skett. Det visade sig, att tätheten, i likhet med hvad som är fallet hos öfriga terpener vid lufttillträde, ändrade sig: den tilltog. På samma gång aftog vridningsförmågan. Jag fann tätheten ($= d$) för:

Elemiolja 1 med kokpunkten 175—177°.

$$d = 0{,}8615 \text{ vid } 14°{,}8 \quad \text{(första best.)}$$

$$d = \begin{cases} 0{,}8662 \\ 0{,}8758 \end{cases} \text{vid} \begin{cases} 13°{,}4 \\ 0°{,}0 \end{cases} \quad \text{(andra best.)}$$

(Häraf, om $d_0 = d_t(1 + \alpha t)$, $\alpha = 0{,}000827$.)

[1]) Beträffande detta ämne jemte det häraf framstälda kolvätet $C_{20}H_{34}$ hänvisas till Bihang till K. Sv. Vet.-Akad. Handl. bd. 13 afd. II, N:o 3.

Elemiolja 2 med kokpunkten 177—178°.

$d =$ 0,8757 vid 13°,2 (första best.)

$d = \begin{cases} 0{,}8778 \\ 0{,}8875 \end{cases}$ vid $\begin{cases} 13°{,}0 \\ 0°{,}0 \end{cases}$ (andra best.)

(Häraf, om $d_0 = d_t(1 + \alpha t)$, $\alpha =$ 0,000850.)

Vid undersökning af vridningsförmågan användes det rör, hvars längd var = 1,0004 dm. Den till polarimetern hörande krystallplattan af kaliumdikromat måste användas för att utestänga i lågan befintliga främmande färgstrålar, hvilka på grund af den stora dispersionen gjorde sig i hög grad gällande och disturberande vid inställningen. Emellertid kunde färgtonen hos de begge hälfterna af synfältet ändå ej fås alldeles lika, hvilket gjorde inställningen mindre skarp än förut. Jag erhöll för:

Elemiolja 1.

$\alpha_D =$	+ 47°,453	. . . temp. =	14°,8 C.	(10 inst.)	[på f. m.]
=	47 ,562	» =	15 ,2	(10 »)	[» »]
=	47 ,402	» =	15 ,0	(9 »)	[» e. m.]

Med. $\alpha_D =$ + 47°,472 . . . temp. = 15°,0.

Sål. $[\alpha]_D = \frac{\alpha_D}{l \, . \, d} = \frac{47{,}472}{1{,}0004 \, . \, 0{,}8615} = + 55°{,}083$, temp. 15°,0 C.

Elemiolja 2.

$\alpha_D =$	+ 64°,867	. . . temp. =	13°,6	(5 inst.)
=	64 ,847	» =	13 ,8	(» »)
=	65 ,017	» =	13 ,0	(» »)
=	64 ,360	» =	17 ,4	(» »)
=	64 ,533	» =	17 ,3	(» »)

Med. $\alpha_D =$ + 64°,689 . . . temp. = 15°,0.

Sål. $[\alpha]_D = \frac{64{,}689}{1{,}0004 \, . \, 0{,}8744} = + 73{,}952$, temp. 15°,0 C.

Vridningens ändring med temperaturen blef, som redan antydts, undersökt. Jag använde då det kortaste röret (längd = 0,4992 dm), som på midten hade ett ansatsrör, genom hvilket en termometer kunde nedsänkas i vätskan för temperatur-

bestämning. De flesta observationerna gjordes, utom vid olika rumstemperaturer, i närheten af 0-punkten, der temperaturen, genom att man omgaf röret med smältande snö, lätt kunde hållas konstant. Äfven gjordes inställningar, sedan snön borttagits, under det temp. långsamt steg, samt efter uppvärmning till bortåt 40°, under det den sjönk till rummets temp. Af de sålunda samlade observationerna sammanfördes för räkningens skull de, som skiljde sig från hvarandra med högst 5°, ur hvilka beräknades ett medelvärde på vridningen och temperaturen. För elemiolja 1 kunde endast de observationer, som följde omedelbart på hvarandra, nemligen vid rumstemp. och 0°, på grund af den stora med tiden fortgående ändringen i vridningen, användas.

Elemiolja 1.

I. 1 .... $\alpha_D = 22,258$ .... temp. $= 20,35$ .... 10 inst.
2 .... » $= 21°,880$ .... » $= 0°,89$ .... 20 »
(Vid återgång till 20° hade vridn. ändrat sig och blifvit
$\alpha_D = 22°,137$ .... temp. $= 20°,45$ .... 10 inst.)

Följande dag erhölls:

II. 1 .... $\alpha_D = 21,843$ .... temp. $= 17,0$ .... 5 inst.
2 .... » $= 21°,537$ .... » $= 0°,6$ .... 5 »
(Vid återgång till 17° var
$\alpha_D = 21°,813$ .... temp. $= 17°$ .... 5 inst.)

Beräknas temp. koëff. k efter formeln

$$\alpha_t = \alpha_0(1 - kt),$$

fås ur I

$$k = -0,0008878,$$

och ur II

$$k = -0,0008663.$$

Således i med.

$$k = -0,0008770 \text{ (mellan } 0° \text{ och } 20°).$$

Elemiolja 2.

	α_D	Temp.	Antal inställn.
1	33°,286	0°,12	18
2	32 ,798	6 ,7	12
3	32 ,373	12 ,93	15
4	32 ,183	15 ,90	10
5	32 ,033	18 ,77	15
6	31 ,832	21 ,81	9
7	31 ,362	28 ,5	6
8	31 ,013	34 ,0	7

Vid grafisk framställning af ofvanstående observationer erhålles som medelkurva en rät linie. Jag har ur formeln:

$$\alpha_t = \alpha_0(1 - kt)$$

med användande af minsta qvadratmetoden beräknat k, dervid gifvande observationerna 1, 3 och 5 vigten 3, 2 och 2 resp. såsom varande de flesta och bästa samt de öfriga vigten 1, och erhållit

$$k = + 0{,}001723 \text{ (mellan } 0° \text{ och } 40°).$$

Som vi finna, inträffar det ganska egendomliga, att de två elemioljorna förändra sin optiska vridning i alldeles motsatt rigtning: *hos elemiolja 1 tilltar den, och hos elemiolja 2 aftar den med stigande temperatur.* [Att tillväxten i förra fallet icke endast eller hufvudsakligen kan bero på längdförändring hos röret är tydligt. Ty om man antar för detta en utvidgningskoëff. = 0,00002, skulle dess längd för 20° tilltaga med 0,02 mm, som betingar en vridning $= \frac{0{,}02}{50} 22°$ (ung.) = 0°,0088.] Den spec. opt. vridningsförmågan $\left[= \frac{\alpha_D}{ld}\right]$ följer samma regel, hvarom man lätt öfvertygar sig. Hos terpenerna är det vanliga, att den spec. vridningsförmågan aftar, då temperaturen stiger. Elemiolja 1 bildar således, efter hvad vi funnit, ett undantag. LANDOLT anger [Das opt. Drehungsverm. etc. sidd. 49 och 50] endast följande ämnen, hvilkas spec. vridningsförmåga tilltar med tem-

peraturen, nemligen vinsyra och några af dess salter, äppelsyra och nikotin.

Att spec. vridningsförmågan ändrar sig med tiden (aftar på samma gång som tätheten tilltar) hos båda oljorna, ehuru ojemförligt mer hos elemiolja 1, visar följande.

Elemiolja 1.

De första obs. gåfvo

$[\alpha]_D = 55°,083$ . . . temp. 15° $[d_{14.8} = 0,8615]$;

de sista obs. ge

$[\alpha]_D = 50°,60$ . . . » 17° $[d_{17} = 0,8636$ (ber.)].

Elemiolja 2.

De första obs. gåfvo

$[\alpha]_D = 73°,952$ . . . temp. 15° $[d_{15} = 0,8744$ (ber.)];

de sista obs. ge

$[\alpha]_D = 73°,63$ . . . » 16° $[d_{16} = 0,8756$ (ber.)].

I afseende på de undersökta ämnenas kemiska förhållanden hänvisas närmare till en snart utkommande af Hr VESTERBERG författad afhandling: »Kemiska studier öfver några hartser», hvilken för närvarande är under tryckning.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 86.)

Pennsylvania. *Geological survey.*
Second geological survey. D 6; P 4. 1889. 8:o & Fol.
Annual report. Year 1887. 8:o.
Philadelphia. *Wagner free institute.*
Transactions. Vol. 2. 1889. 4:o.
Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Memorie. Vol. 10. 1889. st. 8:o.
Atti. Vol. 6: Pag. 141–302. 1888—89. st. 8:o.
Alla memoria del prof. GIUSEPPE MENEGHINI. Pisa 1889. st. 8:o.
Prag. *Böhmiska kemiska sällskapet.*
Listy chemické. R. 13(1888—89): C. 1–10. 8:o.
Rom. *Reale accademia dei lincei.*
Rendiconti. Vol. 5(1889), Sem. 1: F. 1–12; 2: 1–13. st. 8:o.
— *R. Comitato geologico Italiano.*
Bollettino. Vol. 20(1889). 8:o.
Salem, U. S. *Essex institute.*
Bulletin. Vol. 20(1888): N:o 1–12; 21(1889): 1–6. 8:o.
Charter and by-laws. 1889. 8:o.
San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Almanaque náutico. 1891. Madrid 1889. st. 8:o.
Sydney. *Royal Society of N. South Wales.*
Journal and proceedings. Vol. 23: P. 1. 1889. 8:o.
Catalogue of scientific books in the library. P. 1. 1889. 8:o.
Tokio. *College of science, Imp. university of Japan.*
Journal. Vol. 2: P. 4. 1888. 4:o.
— *Observatoire astronomique.*
Annales. T. 1: Fasc. 2. 1889. 4:o.
Topeka. *Kansas academy of science.*
Transactions. Vol. 11(1887/88). 8:o.
Washington. *U. S. Bureau of navigation.*
American ephemeris and nautical almanac. Year 1887, 1889, 1891. 8:o.
— *U. S. Geological survey.*
Monographs. 13: Text & Atlas; 14. 1887—88. 4:o.
Bulletin. N:o 48—53. 1888—89. 8:o.
— *U. S. Department of agriculture.*
Bulletin of the division of economic ornithology and mammalogy. 1. 1889. 8:o.
North American fauna. N:o 1—2. 1889. 8:o.
Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. Jahr 1888: N:o 14–18; 1889: 1–18. 4:o.
Jahrbuch. Bd. 38(1888): H. 4. 4:o.
— *K. K. Geographische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd. 32(1889). 8:o.

(Forts. å sid. 130.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 100.

Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta.

Af HELGE VON KOCH.

[Meddeladt den 12 Mars 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

Lineära ekvationssystem, där såväl antalet ekvationer som antalet obekanta är oändligt stort, hafva analytiskt behandlats först af amerikanaren G. W. HILL i uppsatsen »On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon»[1]). För att integrera en viss lineär differentialekvation af andra ordningen använder HILL en metod med obestämda koefficienter och erhåller för dessas bestämmande ett oändligt lineärt ekvationssystem, hvilket han behandlar med tillämpande af för *ändliga* ekvationssystem gällande satser, dock utan att bevisa, att systemets determinant är konvergent[2]).

APPELL har därefter visat[3]), huru man kan erhålla vissa utvecklingar inom de elliptiska funktionernas teori genom att lösa ett oändligt ekvationssystem af formen

$$x_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} \{q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}\} x_{\mu} = (-1)^n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}).$$

---

[1]) Cambridge, WILSON 1877; reproducerad i Acta mathematica, Bd 8.

[2]) Att denna determinant, som af HILL betecknas med $\square(c)$, verkligen konvergerar, har POINCARÉ några år senare bevisat; se Bull. de la soc. mathém. de France, T. 14, p. 77.

[3]) APPELL: »Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques». Bull. de la soc. mathém. de France, T. 13, p. 13, 1884.

APPELL finner en lösning till detta system genom att bestämma den gräns, hvartill den genom det ändliga systemet

$$x_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^\mu q^{\mu^2} \{q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}\} x_\mu = (-1)^n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots m)$$

bestämda storheten x_μ $(\mu < m)$ närmar sig vid indefinit växande m.

Slutligen har POINCARÉ i tvänne afhandlingar[1]) gjort det APPELL'ska och därmed närbeslägtade ekvationssystem till föremål för en närmare undersökning, hvarvid han bl. a. visat, att lösningen till desamma i allmänhet icke är entydigt bestämd; i den senare af dessa afhandlingar har han dessutom framstält vissa satser om konvergensen hos oändliga determinanter och tillämpat de funna resultaten på den HILL'ska determinanten $\square(c)$.

Ändamålet med följande uppsats är att härleda några allmänna egenskaper hos lösningen till ett oändligt lineärt ekvationssystem af godtycklig form.

§ 1.

Låt det gifna systemet ha formen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$$

eller, utförligare skrifvet,

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + \ldots = u_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + \ldots = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n + \ldots = u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

och antag till en början att koefficienterna $\alpha_{\nu\mu}$ äro sådana, att determinanterna

[1]) Bull. de la Soc. mathém. de France, T. 13 p. 19 och T. 14 p. 77.

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \ldots \text{ ad inf.}$$

hafva från noll skilda värden; det är då lätt att bevisa följande

Teorem 1. Systemet (1) låter reducera sig till formen

$$(2) \quad \begin{cases} B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \ldots + B_{1n}x_n + \ldots = V_1 \\ \qquad\qquad B_{22}x_2 + \ldots + B_{2n}x_n + \ldots = V_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad B_{nn}x_n + \ldots = V_n \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \end{cases}$$

hvarest koefficienterna B och V bestämmas genom likheterna

$$(3) \begin{cases} B_{1\mu} = \alpha_{1\mu}; \; B_{2\mu} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2\mu} \end{vmatrix}; \ldots; \; B_{\nu\mu} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1}, & \alpha_{1\mu} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1}, & \alpha_{\nu\mu} \end{vmatrix}; \ldots \\ V_1 = u_1; \quad V_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} & u_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1} & u_\nu \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, \ldots \text{ ad inf.}). \end{cases}$$

Jag vill först bevisa, att om $x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$ satisfiera systemet (1), så satisfiera de också systemet (2). Emedan likheterna (1) ega rum har man

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu-1}, & \sum_1^\infty \alpha_{1\mu} x_\mu \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu-1}, & \sum_1^\infty \alpha_{2\mu} x_\mu \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{\nu 1}, & \alpha_{\nu 2} \ldots \alpha_{\nu\nu-1}, & \sum_1^\infty \alpha_{\nu\mu} x_\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} & u_1 \\ \alpha_{12} \ldots \alpha_{2\nu-1} & u_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1} & u_\nu \end{vmatrix}$$

eller, som är detsamma,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\mu} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1} & \alpha_{\nu\mu} \end{vmatrix} x_\mu = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} & u_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1} & u_\nu \end{vmatrix}.$$

Alldenstund

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\mu} \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu\nu-1} & \alpha_{\nu\mu} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{för } \mu = 1, 2, \dots, \nu - 1$$

erhåller man således likheten

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\nu\mu} x_{\mu} = V_{\nu},$$

hvilken är den ν:de ekvationen i systemet (2). Genom att upprepa detta resonnemang för

$$\nu = 1, 2, \dots \text{ ad inf.}$$

finner man att samtliga likheter i (2) äro satisfierade.

Antag nu att systemet (2) är satisfieradt och skrif detsamma under formen

$$(2') \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{1\mu} x_{\mu} = u_1$$

$$(2'') \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \sum_{1}^{\infty} \alpha_{1\mu} x_{\mu} \\ \alpha_{21}, & \sum_{1}^{\infty} \alpha_{2\mu} x_{\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & u_1 \\ \alpha_{21} & u_2 \end{vmatrix}$$

$$(2''') \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \sum_{1}^{\infty} \alpha_{1\mu} x_{\mu} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \sum_{1}^{\infty} \alpha_{2\mu} x_{\mu} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \sum_{1}^{\infty} \alpha_{3\mu} x_{\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & u_1 \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & u_2 \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & u_3 \end{vmatrix}$$

. . . .

Emedan enl. förutsättningen $\alpha_{11} \gtrless 0$ kan likheten (2''), så framt (2') är satisfierad, ej ega rum med mindre än

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{2\mu} x_{\mu} = u_2 ;$$

och emedan $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \gtreqless 0$ kan (2'''), så framt (2') och (2'') äro uppfylda, ej vara sann om icke

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{3\mu} x_{\mu} = u_3$$

o. s. v. Om likheterna (2) ega rum äro följaktligen äfven ekvationerna (1) uppfylda. Systemen (1) och (2) äro således ekvivalenta, och häraf följer omedelbart sanningen af vårt teorem.

Men antag nu, att det förekommer determinanter i raden

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

som äro noll. Man inser då lätt, att teorem 1 måste utbytas mot följande sats.

Teorem 2. Om koefficienterna i systemet (1) äro sådana, att $p - 1$ är ordningstalet för den *sista* determinant i raden

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

som försvinner, då låter nämda system reducera sig till formen

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1,p+1} x_{p+1} + \dots + \alpha_{1n} x_n + \dots = u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1} x_1 + \dots + \alpha_{p,p+1} x_{p+1} + \dots + \alpha_{p,n} x_n + \dots = u_p \\ \qquad\qquad B_{p+1,p+1} x_{p+1} + \dots + B_{p+1,n} x_n + \dots = V_{p+1} \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B_{nn} x_n + \dots = V_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \end{array}$$

hvarest B och V ha samma betydelse som i (3).

§ 2.

Jag vill nu framställa några determinant-teoretiska identiteter, som i det följande komma att bli oss till nytta. Låt n vara ett tal i raden 1, 2, 3, ...; antag att determinanterna

$$\Delta_\nu = \sum \pm \alpha_{11}\,\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

samtliga äro skilda från noll. Låt m vara ett tal i raden $1, 2, \ldots n$ och beteckna med

$$S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \ldots S_m^{(m)}$$

lösningen till systemet

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \ldots + \alpha_{1m}\,x_m = u_1 \\ \alpha_{21}\,x_1 + \alpha_{22}\,x_2 + \ldots + \alpha_{2m}\,x_m = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\,x_1 + \alpha_{m2}\,x_2 + \ldots + \alpha_{mm}\,x_m = u_m. \end{cases}$$

Som bekant är då

$$(5) \qquad \Delta_m S_\nu^{(m)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} & u_1 & \alpha_{1\nu+1} \ldots \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{m\nu-1} & u_m & \alpha_{m\nu+1} \ldots \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots m).$$

Ändra m till $m+1$ i systemet (4) och beteckna lösningen med

$$S_1^{(m+1)}, S_2^{(m+1)}, \ldots S_{m+1}^{(m+1)}.$$

Man har således

$$u_1 = \sum_{\mu=1}^{m+1} \alpha_{1\mu} S_\mu^{(m+1)}$$

$$u_2 = \sum_{\mu=1}^{m+1} \alpha_{2\mu} S_\mu^{(m+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_m = \sum_{\mu=1}^{m+1} \alpha_{m\mu} S_\mu^{(m+1)};$$

efter införande af dessa uttryck för $u_1\, u_2 \ldots . u_m$ i högra membrum af (5) finner man genom några enkla reduktioner

$$\Delta_m S_\nu^{(m)} = \Delta_m S_\nu^{(m+1)} + (-1)^{m-\nu} \cdot S_{m+1}^{(m+1)} \cdot C_\nu^{(m+1-\nu)}, \tag{6}$$

hvarest $C_\nu^{(m+1-\nu)}$ är den determinant, som erhålles af Δ_{m+1} genom att utelemna den ν:de vertikal- och den $m+1$:ta horizontalraden. Ponera således

$$C_\nu^{(m+1-\nu)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1}\, \alpha_{1\nu+1} \ldots \alpha_{1m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{m,\nu-1}\, \alpha_{m,\nu+1} \ldots \alpha_{m,m+1} \end{vmatrix},$$

och inför

$$S_{m+1}^{(m+1)} = \frac{V_{m+1}}{\Delta_{m+1}},$$

hvarest V_{m+1} definieras genom (3).

Formel (6) öfvergår då, om $\varrho = m + 1 - \nu$, till

$$S_\nu^{(\nu+\varrho)} - S_\nu^{(\nu+\varrho-1)} = (-1)^\varrho \frac{C_\nu^{(\varrho)} V_{\nu+\varrho}}{\Delta_{\nu+\varrho-1}\, \Delta_{\nu+\varrho}}; \tag{7}$$

identiteten

$$S_\nu^{(n)} = S_\nu^{(\nu)} + \sum_{\varrho=1}^{n-\nu} \left\{ S_\nu^{(\nu+\varrho)} - S_\nu^{(\nu+\varrho-1)} \right\} \tag{8}$$

kan således utbytas mot

$$S_\nu^{(n)} = \frac{V_\nu}{\Delta_\nu} + \sum_{\varrho=1}^{n-\nu} (-1)^\varrho \frac{C_\nu^{(\varrho)} V_{\nu+\varrho}}{\Delta_{\nu+\varrho-1}\, \Delta_{\nu+\varrho}} \tag{9}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Speciellt erhåller man för $\nu = 1$ utvecklingen

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \dots \\ u_n, \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \dots \\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}} = S_1^{(n)} = \frac{u_1}{\alpha_{11}} - \frac{\alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & u_1 \\ \alpha_{21} & u_2 \end{vmatrix}}{\alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} \dots \dots \alpha_{1n} \\ \dots \dots \\ \alpha_{n-1,2} \dots \alpha_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n-1}\ u_1 \\ \dots \dots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn-1}\ u_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \dots \alpha_{1n-1} \\ \dots \dots \\ \alpha_{n-1,1} \dots \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \dots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Låt oss för korthetens skull skrifva

$$(11) \qquad K_{\nu, \nu+\varrho} = (-1)^\varrho \frac{C_\nu^{(\varrho)}}{\Delta_{\nu+\varrho-1}\, \Delta_{\nu+\varrho}}; \; K_{\nu\nu} = \frac{1}{\Delta_\nu}$$
$$(\nu = 1, 2, \dots n; \; \varrho = 1, 2, \dots n - \nu).$$

Enligt (9) är då

$$(12) \qquad \begin{cases} S_1^{(n)} = K_{11} V_1 + K_{12} V_2 + \dots + K_{1n} V_n \\ S_2^{(n)} = \qquad\qquad K_{22} V_2 + \dots + K_{2n} V_n \\ \dots \dots \dots \dots \\ S_n^{(n)} = \qquad\qquad\qquad\qquad K_{nn} V_n. \end{cases}$$

Tillämpande samma reduktionsmetod för systemet

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu} S_\mu^{(n)} = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots n),$$

som förut användts i § 1, erhåller man likheterna

$$(13) \qquad \begin{cases} B_{11} S_1^{(n)} + B_{12} S_2^{(n)} + \dots + B_{1n} S_n^{(n)} = V_1 \\ \qquad\qquad B_{22} S_2^{(n)} + \dots + B_{2n} S_n^{(n)} = V_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \dots \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B_{nn} S_n^{(n)} = V_n. \end{cases}$$

Genom att slutligen kombinera (12) och (13) inser man utan svårighet giltigheten af identiteterna

$$(14)\qquad \begin{cases} K_{\nu\nu} B_{\nu\nu} = 1 \\ \sum_{\varkappa=\nu}^{\mu} K_{\nu\varkappa} B_{\varkappa\mu} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ \mu = \nu + 1, \nu + 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

och

$$(15)\qquad \begin{cases} K_{\nu\nu} B_{\nu\nu} = 1 \\ \sum_{\varkappa=\nu}^{\mu} K_{\varkappa\mu} B_{\nu\varkappa} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ \mu = \nu + 1, \nu + 2, \ldots n \end{pmatrix}.$$

Om åter några determinanter i raden

$$\sum \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{\nu\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

äro noll och $p - 1$ är ordningstalet för den sista bland dem som försvinner, skrifva vi

$$S_\nu^{(n)} = S_\nu^{(p)} + \sum_{\varrho=p+1-\nu}^{n-\nu} \left\{ S_\nu^{(\nu+\varrho)} - S_\nu^{(\nu+\varrho-1)} \right\}$$

för $\nu = 1, 2, \ldots p$

och

$$S_\nu^{(n)} = S_\nu^{(\nu)} + \sum_{\varrho=1}^{n-\nu} \left\{ S_\nu^{(\nu+\varrho)} - S_\nu^{(\nu+\varrho-1)} \right\}$$

för $\nu = p + 1, p + 2, \ldots n$

eller, på grund af (7),

$$(16\text{ a})\qquad S_\nu^{(n)} = S_\nu^{(p)} + \sum_{\varrho=p+1-\nu}^{n-\nu} (-1)^\varrho \frac{C_\nu^{(\varrho)} V_{\nu+\varrho}}{\varDelta_{\nu+\varrho-1}\, \varDelta_{\nu+\varrho}}$$

för $\nu = 1, 2, \ldots p$

och

$$(16\text{ b})\qquad S_\nu^{(n)} = S_\nu^{(\nu)} + \sum_{\varrho=1}^{n-\nu} (-1)^\varrho \frac{C_\nu^{(\varrho)} V_{\nu+\varrho}}{\varDelta_{\nu+\varrho-1}\, \varDelta_{\nu+\varrho}}$$

för $\nu = p + 1, p + 2, \ldots n.$

§ 3.

Låt oss nu återgå till studiet af systemet

$$(17) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

och antag först att determinanterna

$$\sum \pm\, \alpha_{11}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn} \quad (n = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$$

äro skilda från noll.

Om i likheten (12):

$$S_\nu^{(n)} = \sum_{\mu=\nu}^{n} K_{\nu\mu} V_\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

venstra membrum närmar sig ett ändligt bestämdt gränsvärde S_ν, då n växer öfver hvarje gräns, är serien i högra membrum konvergent; och omvändt, är serien

$$(18) \qquad S_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} K_{\nu\mu} V_\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

konvergent, då är $\lim\limits_{n=\infty} S_\nu^{(n)}$ ändlig och man har

$$\lim_{n=\infty} S_\nu^{(n)} = S_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Storheterna $S_\nu^{(n)}$ voro definierade genom det ändliga ekvationssystemet

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu} S_\mu^{(n)} = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Under förutsättning att deras gränsvärden S_ν äro ändliga och bestämda ligger den frågan nära till hands, huruvida icke S_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) under vissa förutsättningar äro en lösning till det oändliga systemet (17).

För att besvara denna fråga, kan man använda följande

Hjelpsats. »Om serierna $S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\mu\nu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ äro konvergenta då är

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} S_\mu = S$$

alltid och endast om, sedan man faststält ett godtyckligt positivt tal δ, det är möjligt att finna en rad af hela, positiva tal

$$m'; \; n_1, n_2, \ldots$$

sådana, att för alla värdepar m, n som uppfylla olikheterna

$$m > m', \; n > n_m$$

olikheten

$$\left| S - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} \right| < \delta$$

eger rum.»

Emedan beviset för denna sats ej erbjuder några svårigheter, vill jag här förbigå detsamma och omedelbart öfvergå till att tillämpa satsen på serierna (18).

För att $S_1, S_2, \ldots S_\mu, \ldots$ skola satisfiera den ν:de ekvationen i systemet (17):

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu$$

är det nödvändigt och tillräckligt att olikheten

$$\text{(19)} \qquad \left| u_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\varrho=\mu}^{n} \alpha_{\nu\mu} K_{\mu\varrho} V_\varrho \right| < \delta \quad \text{för } m > m^{(\nu)}, n > n_m^{(\nu)}$$

eger rum. Här betyder δ en godtycklig positiv kvantitet, och med

$$m^{(\nu)}; \; n_1^{(\nu)}, \; n_2^{(\nu)}, \ldots$$

menas vissa hela, positiva tal.

Om man ihågkommer relationen

$$\sum_{\varrho=\mu}^{n} K_{\mu\varrho} V_{\varrho} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\mu-1}, & u_1, & \alpha_{1\mu+1}, \dots \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{n\mu-1}, & u_n, & \alpha_{n\mu+1}, \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\varDelta_n}$$

och inför beteckningen

$$\varDelta_{nm}^{(\nu)} = \begin{vmatrix} u_\nu & \alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu m} & 0 \dots 0 \\ u_1 & \alpha_{11} \dots \alpha_{1m} \dots & \dots \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & \alpha_{n1} \dots \alpha_{nm} \dots & \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

inser man lätt att

$$u_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\varrho=\mu}^{n} \alpha_{\nu\mu} K_{\mu\varrho} V_{\varrho} = \frac{\varDelta_{nm}^{(\nu)}}{\varDelta_n}, \tag{21}$$

om $m < n$. Är $m \geqq n$, då är venstra membrum identiskt $= 0$. Nu skall (19) ega rum för $\nu = 1, 2, \dots$ Således erhålla vi följande sats.

Teorem 3. Låt $\sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots \text{ad inf.})$ *vara ett oändligt lineärt ekvationssystem, där koefficienterna* α *uppfylla vilkoren*

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} \gtrless 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots \text{ad inf.});$$

om serierna S_μ *äro konvergenta, framställa de en lösning till det gifna systemet alltid och endast om, sedan man fastställt ett godtyckligt positivt tal* δ, *det är möjligt att finna en rad af hela, positiva tal*

$$m^{(\nu)};\ n_1^{(\nu)},\ n_2^{(\nu)}, \dots n_m^{(\nu)}, \dots$$

så beskaffade, att för hvarje index ν *olikheten*

$$\left| \frac{\varDelta_{nm}^{(\nu)}}{\varDelta_n} \right| < \delta$$

eger rum så snart n, m *uppfylla vilkoren*

$$m > m^{(\nu)};\ n > n_m^{(\nu)}.$$

På grund af denna sats sluter man omedelbart till sanningen af följande

Korollarium. Serierna $S_1, S_2, \ldots S_\mu, \ldots$ *äro en lösning till det gifna systemet, om de äro konvergenta och om, sedan man faststält ett godtyckligt positivt tal* δ, *det alltid är möjligt att finna två positiva tal* m' n' *sådana, att olikheten*

$$\left|\frac{\Delta_{nm}^{(\nu)}}{\Delta_n}\right| < \delta$$

för hvarje index ν *eger rum så snart* m *och* n *uppfylla vilkoren*

$$m > m' \quad n > n'.$$

I det fall, att några af determinanterna

$$\sum \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

äro noll, gäller en motsvarande sats. Är $p - 1$ ordningstalet för den *sista* af dessa determinanter som försvinner, består nämligen teorem 3 oförändradt, om man med $S_1, S_2, \ldots S_\mu, \ldots$ förstår de värden, som erhållas genom att i (16 a och b) låta n växa öfver hvarje gräns.

§ 4.

Den frågan framställer sig nu: under hvilka vilkor är lösningen till ett gifvet system entydigt bestämd?

Är $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, \ldots$ en lösning till systemet

$$(22) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

så kan hvarje annan lösning $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \ldots$ framställas under formen

$$x_\mu = \xi_\mu + y_\mu;$$

$y_1, y_2, \ldots y_\mu, \ldots$ måste då satisfiera systemet

$$(23) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} y_\mu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Har systemet (23) ingen lösning är lösningen till (22) entydigt bestämd. Under förutsättningen

$$\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn} \gtrless 0 \quad n = 1, 2, \ldots$$

kan man enl. teorem 1 skrifva systemet (23) under formen

$$\begin{aligned} B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + \ldots + B_{1n}\,y_n + \ldots &= 0 \\ B_{22}y_2 + \ldots + B_{2n}\,y_n + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ B_{nn}\,y_n + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Multiplicera dessa ekvationer i ordning med $K_{11}, K_{12}, \ldots K_{1n}, \ldots$ och addera dem till hvarandra; då blir

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} K_{1\nu} \cdot \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\nu\mu}y_\mu = 0,$$

eller, som är detsamma,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} K_{1\nu} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\nu\mu}y_\mu = 0. \tag{24}$$

Nu är

$$\sum_{\nu=1}^{n} K_{1\nu} \cdot \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} K_{1\nu} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1}, \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{1\mu}y_\mu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1}, \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu}y_\mu \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D_{mn}^{(1)}}{\varDelta_n} \text{ (enl. (12))},$$

där

$$D_{mn}^{(1)} = \begin{vmatrix} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{1\mu}y_\mu, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{n\mu}y_\mu, \alpha_{n2}, \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}; \ \varDelta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Till hvarje värde på n kan man alltid finna ett motsvarande tal m_n sådant att

$$\left|\frac{D_{mn}^{(1)}}{\Delta_n}\right| < \delta \text{ så snart } m > m_n.$$

Antag att det existerar två tal $m^{(1)}$, $n^{(1)}$ sådana att för alla $n > n^{(1)}$ olikheten

$$m_n < m^{(1)}$$

eger rum. Enligt en bekant sats af CAUCHY[1]) kan man då i (24) ombyta summationsordningen och skrifva

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} y_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} K_{1\nu} B_{\nu\mu} = 0,$$

hvilken likhet på grund af (14) öfvergår till

$$y_1 = 0.$$

Genom att använda ett liknande förfaringssätt för de öfriga obekanta kommer man slutligen till följande resultat. Om med $D_{mn}^{(\nu)}$ förstås determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\nu-1}, \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{1\mu} y_\mu, \alpha_{1\nu+1} \cdots \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{n\nu-1}, \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{n\mu} y_\mu, \alpha_{n\nu+1} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

med δ ett godtyckligt positivt tal och med $m^{(\nu)}$ och $n^{(\nu)}$ vissa hela, positiva tal, då har systemet (23) ingen lösning, om man underkastar de obekanta y_μ vilkoren

$$\left|\frac{D_{mn}^{(\nu)}}{\Delta_n}\right| < \delta \text{ så snart } m > m^{(\nu)};\ n > n^{(\nu)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}).$$

Med hjelp af teorem 2 erhåller man samma resultat äfven för det fall, då några af determinanterna

[1]) Cours d'analyse p. 539.

$$\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}$$

äro noll.

§ 5.

Ofta kan man genom funktionsteoretiska hjelpmedel bestämma en allmän analytisk form för lösningen till ett gifvet system

$$(25) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} x_\mu = u_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Låt $u, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ vara en rad godtyckliga storheter blott underkastade vilkoret $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$. Man kan då alltid på grund af det MITTAG-LEFFLER'ska teoremet bestämma en rad af hela transcendenta funktioner $f_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ så beskaffade, att

$$f_\nu(a_\mu) = \alpha_{\nu\mu};\ f_\nu(u) = u_\nu\ ^{1)}.$$

Systemet (25) erhåller därigenom utseendet

$$(26) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\nu(a_\mu) x_\mu = f_\nu(u) \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

de obekanta x_μ äro således definierade såsom vissa funktioner af storheterna $u, a_1, a_2, \ldots$ Om vi i systemet (26) låta a_1 och a_2 byta plats, inverkar detta ej på värdet af $x_3, x_4, \ldots$; däremot måste x_1 öfvergå till x_2 och tvärtom. Med andra ord: är $x_1 = \chi(u, a_1)$ måste $x_2 = \chi(u, a_2)$; af liknande skäl är $x_3 = \chi(u, a_3)$ o. s. v. Således kan systemet (26) skrifvas

$$(27) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\nu(a_\mu)\chi(u, a_\mu) = f_\nu(u) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

På samma sätt inser man, att ett system af formen

---

[1]) Se MITTAG-LEFFLER, Acta mathematica, Bd 4, p. 43.

$$(28) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\nu(a_\mu)x_\mu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

kan skrifvas

$$(29) \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\nu(a_\mu)\xi(a_\mu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Betrakta nu i systemet (27) u såsom en variabel storhet; om för hvarje värde u inom ett visst område C likheterna (27) äro uppfylda, skall jag uttrycka denna egenskap hos funktionerna $\chi(u, a_\mu)$ genom att säga, att de för området C utgöra en lösning till systemet (27). Enligt § 4 veta vi, att om lösningen till (27) är entydigt bestämd, måste $\xi(a_\mu) = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$; men låt detta vilkor falla och beteckna med $\xi'(a_\mu)$ en lösning till (29); häraf följer, att för $u = a_p$ likheterna (27) äro satisfierade om

$$\chi(a_p, a_\mu) = \xi'(a_\mu) \text{ när } \mu \neq p$$

och

$$\chi(a_p, a_p) = \xi'(a_p) + 1.$$

Således: om funktionerna $\chi(u, a_\mu)$ uppfylla vilkoren

$$(30) \qquad \begin{cases} \chi(a_p, a_\mu) = \xi'(a_\mu) & (p = 1, 2, \mu - 1, \mu + 1, \ldots) \\ \chi(a_\mu, a_\mu) = \xi'(a_\mu) + 1 \end{cases}$$

så utgöra de för hvarje värde i raden a_p $(p = 1, 2, \ldots)$ en lösning till (27); och omvändt: utgöra funktionerna $\chi(u, a_\mu)$ för hvarje a_p en lösning till (27) måste det finnas en lösning $\xi'(a_\mu)$ till (29) så beskaffad, att likheterna (30) ega rum.

Sätt nu

$$F_\mu(u) = \xi'(a_\mu) + \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{a_\varkappa}\right) e^{\sum_{\lambda=1}^{m_\varkappa} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{u}{a_\varkappa}\right)^\lambda}}{\prod_{\varkappa=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{a_\mu}{a_\varkappa}\right) e^{\sum_{\lambda=1}^{m_\varkappa} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_\mu}{a_\varkappa}\right)^\lambda}},$$

hvarest talen $m_\varkappa$ äro valda så, att högra membrum är en hel

transcendent funktion[1]), och apostrofen vid produkt-tecknet utmärker, att $\varkappa = \mu$ är uteslutet; inför för korthetens skull beteckningen $\psi(u, a_\mu)$ för andra termen i högra membrum, så att $F_\mu(u)$ antar formen

$$F_\mu(u) = \xi'(a_\mu) + \psi(u, a_\mu);$$

$F_\mu(u)$ är en hel transcendent funktion med egenskaperna

$$F_\mu(a_p) = \xi'(a_\mu) \quad (p = 1, 2, \ldots \mu - 1, \mu + 1, \ldots)$$

$$F_\mu(a_\mu) = \xi'(a_\mu) + 1;$$

hvarje funktion $\overline{F}_\mu(u)$ med samma egenskaper som $F_\mu(u)$ kan framställas under formen

$$\overline{F}_\mu(u) = F_\mu(u) + G_\mu(u) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{a_\varkappa}\right) e^{\sum_{\lambda=1}^{m_\varkappa} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{u}{a_\varkappa}\right)^\lambda}$$

eller, som är detsamma,

$$\overline{F}_\mu(u) = \xi'(a_\mu) + \frac{g_\mu(u)}{g_\mu(a_\mu)} \cdot \psi(u, a_\mu), \tag{31}$$

då med $g_\mu(u)$ förstås en hel transcendent funktion. Utbytes i högra membrum af (31) a_μ mot a_p öfvergår $\xi'(a_\mu)$ till $\xi'(a_p)$ och $\psi(u, a_\mu)$ till $\psi(u, a_p)$; om $\overline{F}_\mu(u)$ för godtyckliga u-värden skall satisfiera systemet (27) måste vi följaktligen antaga $g_\mu(u) = g(u)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$; i det fall att samtliga funktionerna $f_\nu(u)$ försvinna för $u = 0$, pålägga vi dessutom funktionen $g(u)$ vilkoret $g(0) = 0$; låt nu $\xi(a_\mu)$ beteckna den allmännaste lösningen till systemet (29) och ponera

$$x_\mu = \chi(u, a_\mu) = \xi(a_\mu) + \frac{g(u)}{g(a_\mu)} \psi(u, a_\mu)$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots);$$

funktionerna $\chi(u, a_\mu)$ framställa då i regeln, om än icke den allmännaste, dock en ganska allmän form för lösningen till det gifna systemet (25).

---

[1]) WEIERSTRASS, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen;* Abh. d. Königl. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1876.

Låt oss t. ex. betrakta systemet

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu^\nu x_\mu = u^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

där koefficienterna äro underkastade vilkoren

$$|a_n| < |a_{n+1}|;\ \lim |a_n| = \infty;\ \sum \frac{1}{|a_n|} \text{ konvergent}^{1)};$$

för $u = 0$ satisfieras det af $x_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$; för $u = a_\nu$ af

$$x_1 = \ldots = x_{\nu-1} = x_{\nu+1} = \ldots = 0; \quad x_\nu = 1.$$

Sätt således

$$F_\mu(u) = \frac{u}{a_\mu} \cdot \frac{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{a_\varkappa}\right)}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{a_\mu}{a_\varkappa}\right)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

där tecknet $'$ utmärker att $\varkappa = \mu$ är uteslutet. Med tillhjelp af teorem 3 kan man bestämma de nödvändiga och tillräckliga vilkoren för att $F_\mu(u)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ skola satisfiera systemet (32). Här är

$$\Delta_{\nu+\varrho} = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_{\nu+\varrho} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_1^{\nu+\varrho} & \ldots & a_{\nu+\varrho}^{\nu+\varrho} \end{vmatrix} = a_1 \ldots a_{\nu+\varrho} \Delta(a_1 \ldots a_{\nu+\varrho})$$

$$V_{\nu+\varrho} = a_1 \ldots a_{\nu+\varrho-1} \cdot u \Delta(a_1 \ldots a_{\nu+\varrho-1} u)$$

$$C_\nu^{(\varrho)} = a_1 \ldots a_{\nu-1} a_{\nu+1} \ldots a_{\nu+\varrho} \Delta(a_1 \ldots a_{\nu-1} a_{\nu+1} \ldots a_{\nu+\varrho}).$$

Således enl. (9)

$$\frac{u}{a_\nu} \cdot \frac{(u - a_1) \ldots (u - a_{\nu-1})(u - a_{\nu+1}) \ldots (u - a_n)}{(a_\nu - a_1) \ldots (a_\nu - a_{\nu-1})(a_\nu - a_{\nu+1}) \ldots (a_\nu - a_n)} = S_\nu^{(n)}$$

$$= \frac{u}{a_\nu} \frac{(u - a_1) \ldots (u - a_{\nu-1})}{(a_\nu - a_1) \ldots (a_\nu - a_{\nu-1})} \left\{ 1 + \frac{u - a_\nu}{a_\nu - a_{\nu+1}} + \ldots + \frac{(u - a_\nu) \ldots (u - a_{n-1})}{(a_\nu - a_{\nu+1}) \ldots (a_\nu - a_n)} \right\}.$$

Emedan $\sum \frac{1}{a_\varkappa}$ är konvergent erhålles häraf identiteten

---

1) Om $u = 0$ sammanfaller detta system med det, som legat till grund för POINCARÉ's undersökningar.

$$\frac{\prod_{\varrho=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_{\nu+\varrho}}\right)}{\prod_{\varrho=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_\nu}{a_{\nu+\varrho}}\right)} = 1+\frac{u-a_\nu}{a_\nu-a_{\nu+1}}+\ldots+\frac{(u-a_\nu)\ldots(u-a_{n-1})}{(a_\nu-a_{\nu+1})\ldots(a_\nu-a_n)}+\ldots\text{[1]}$$

gällande för alla ändliga u-värden. Likheterna $F_\mu(u) = S_\mu$ (se (18)) gälla således för hvarje u-värde. Vidare är (se (20))

$$\frac{\Delta_{nm}^{(\nu)}}{\Delta_n} = u^\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^\nu \cdot \frac{u}{a_\mu} \cdot \frac{\prod_{\varkappa=1}^{n}{}'\left(1-\frac{u}{a_\varkappa}\right)}{\prod_{\varkappa=1}^{n}{}'\left(1-\frac{a_\mu}{a_\varkappa}\right)}. \tag{33}$$

Inför beteckningarna

$$\psi_n(x) = \left(1-\frac{x}{u}\right)\prod_{\varkappa=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\varkappa}\right)$$

$$\psi(x) = \left(1-\frac{x}{u}\right)\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\varkappa}\right);$$

låt C_m vara en kontur i x-planet, som innesluter punkterna $u, a_1 \ldots a_m$; likheten (33) antar då gestalten

$$\frac{\Delta_{nm}^{(\nu)}}{\Delta_n} = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\prod_{\varkappa=1}^{n}\left(1-\frac{u}{a_\varkappa}\right)\cdot\int_{C_m}\frac{x^{\nu-1}dx}{\psi_n(x)},$$

och häraf finner man lätt på grund af teorem 3, att vilkoret

$$\lim_{m=\infty}\left\{\int_{C_m}\frac{x^{\nu-1}dx}{\psi(x)}\right\} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

är både nödvändigt och tillräckligt[2].

Ponera nu

$$\overline{F}_\mu(u) = h_\mu(u)\ F_\mu(u) = h_\mu(u) S_\mu,$$

$$h_\mu(u) = \frac{g(u)}{g(a_\mu)}.$$

Låt δ vara ett godtyckligt positivt tal och $m^{(\nu)}$, $n_m^{(\nu)}$ vissa hela, positiva tal; på grund af hjelpsatsen i § 3 låter det nöd-

[1] Denna formel öfverensstämmer med den, som på ett annat sätt härledts af BENDIXSON: »Sur une généralisation à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss». Acta Mathematica, Bd 9, p. 14.

[2] Cf. POINCARÉ, Bull. de la soc. mathém. de France, T. 13, p. 19.

vändiga och tillräckliga vilkoret för att funktionerna $\overline{F}_\mu(u)$ skola satisfiera systemet (32) uttrycka sig genom vilkoren

$$\left| u^\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^\nu h_\mu(u) S_\mu^{(n)} \right| < \delta \text{ så snart } \begin{matrix} m > m^{(\nu)} \\ n > n_m^{(\nu)} \end{matrix}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots).$$

Men häraf sluter man såsom nyss med lätthet till nödvändigheten och tillräckligheten af vilkoret

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \int_{C_m} \frac{g(x)\, x^{\nu-1}\, dx}{\psi(x)} \right\} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 108.)

Utgifvarne.

Ur vår tids forskning. 34—37. Sthm. 1886. 8:o.

Bohuslänsk fiskeritidskrift, utg. af A. W. Ljungman. N:o 21—23, 37—40. Göteb. 1886, 1888. 8:o.

Handlingar rörande åtgärder till samfärdselns förbättrande inom Bohuslänska skärgården, utg. af A. W. Ljungman. Saml. 1—9. Göteb. 1885—90. 8:o.

Författarne.

Ljungman, A. W., Kortfattad berättelse öfver de 1873—1883 utförda vetenskapliga undersökningarna rörande sillen och sillfisket vid Sveriges vestkust. Göteb. 1883. 8:o.

— Småskrifter. 9 st. 8:o.

Nathorst, A. G., Jordens historia efter M. Neumayrs »Erdgeschichte». H. 3—4. Sthm 1890. st. 8:o.

Retzius, G., Om några reformer i vår medicinska undervisning: Bilaga. Sthm 1890. 8:o.

Albert I, prince de Monaco, Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht (l'Hirondelle), publiés avec le concours de J. de Guerne. Fasc. 1. Monaco 1889. 4:o.

Brown, W. H., Dates of publication of »Recherches sur les poissons fossiles» par L. Agassiz. London 1890. 8:o.

Feistmantel, O., Übersichtliche Darstellung der geologisch-paläontologischen Verhältnisse Süd-Afrika's. Th. 1. Prag 1889. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 101.

Om en speciell klass af singulära linier.

Af I. Fredholm.

[Meddeladt den 12 Mars 1890 genom G. Mittag-Leffler.]

De hittills kända potensserier, hvilka ej kunna analytiskt fortsättas utom sitt konvergensområde, utmärka sig — så vidt författaren har sig bekant — genom följande egenskaper.

Låt

$$P(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$$

vara en serie af ofvannämda beskaffenhet, och antag, att radien till dess konvergenscirkel är 1. Förstår jag nu med t en reel variabel och sätter $x = e^{it}$, så öfvergår $P(x)$ i en funktion af t, hvilken i afseende på t ej har derivator af alla ordningar. På denna egenskap har också beviset för omöjligheten att analytiskt fortsätta serien grundats.

Teorien för de partiella differentialekvationerna lemnar emellertid ett medel att framställa vissa potensserier, som ehuru omöjliga att fortsätta utom konvergensområdet icke hafva ofvan anförda egenskap. Att framställa ett enkelt exempel på en funktion af detta slag är ändamålet med föreliggande uppsats.

Funktionen i fråga, hvilken jag betecknar med $F(x)$, definieras genom följande likhet:

$$F(x) = \sum_{0}^{} {}_{\nu} a^\nu x^{\nu^2},$$

hvarest a är en kvantitet, hvars absoluta belopp är mindre än ett. Under denna förutsättning gäller följande sats:

Sats I. Serien $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a^\nu x^{\nu^2}$ och hvar och en af dess derivator är absolut konvergent för hvarje värde på x, som uppfyller vilkoret

$$|x| \leqq 1,$$

men är divergent om

$$|x| > 1.$$

Den n:te derivatan af $F(x)$ är nämligen

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\nu} \nu^2(\nu^2 - 1)\ldots(\nu^2 - n + 1)a^\nu x^{\nu^2 - n},$$

där åt ν gifves alla positiva heltalsvärden, som uppfylla vilkoret

$$\nu^2 \geqq n.$$

Sätter jag nu $|a| = \varepsilon$ och $|x| = 1$ så är

$$\sum_{\nu} \left| \nu^2(\nu^2 - 1)\ldots(\nu^2 - n + 1)a^\nu x^{\nu^2 - n} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu} \nu^2(\nu^2 - 1)\ldots(\nu^2 - n + 1)\varepsilon^\nu.$$

Men summan till höger har såsom bekant ett ändligt värde, då $\varepsilon < 1$. Således är satsens första del bevisad.

Riktigheten af den andra delen af satsen inses däraf, att man alltid kan välja ν så stort att, om $|x| > 1$,

$$a^\nu x^{\nu^2} > m,$$

huru stort talet m än på förhand uppgifvits.

Följdsats. Af den absoluta konvergensen hos de serier, som framställa $F^{(n)}(x)$ följer att, om jag sätter $x = e^{ti}$ och med t betecknar en reel variabel, $F(e^{ti})$ i afseende på t har derivator af alla ordningar.

Sats II. Funktionen $F(x)$ kan ej analytiskt fortsättas utom den cirkel, hvars medelpunkt är noll och radie enheten.

Beviset härför stöder sig på en af professor KOWALEVSKY[1]) bevisad sats, hvilken lyder på följande sätt.

Differentialekvationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

är gifven. Om $\varphi_0(y/b)$ är en potensserie af $y - b$, så satisfieras den gifna differentialekvationen formelt af serien

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^{2\nu}\varphi_0(y/b)}{d^{2\nu}y} \cdot \frac{(x-a)^\nu}{\underline{|\nu}},$$

och denna öfvergår för $x = a$ i $\varphi_0(y/b)$. För seriens konvergens är det ett nödvändigt vilkor, att $\varphi_0(y/b)$ är en ständigt konvergerande potensserie.

Det är nu lätt att erhålla beviset för sats II.

Inför nämligen i stället för a och x variablerna v och t genom relationerna

$$a = e^v, \quad x = e^t.$$

Härigenom öfvergår $F(x)$ i en funktion af t, som jag betecknar med $\varphi(t)$.

För att bevisa det $F(x)$ ej kan analytiskt fortsättas utanför enhetscirkeln, är det tillräckligt, att $\varphi(t)$ ej kan fortsättas öfver den imaginära axeln.

Om ej den imaginära axeln är en väsentligt singulär linie för $\varphi(t)$, så kan jag välja ett ställe $t = t_0$ på denna linie, hvilket är sådant, att $\varphi(t)$ kan utvecklas i potensserie i omgifningen af t_0; således

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=t_0} \frac{t - t_0}{\underline{|1}} + \ldots.$$

Men nu finner man lätt, att $\varphi(t)$ satisfierar den ofvan anförda differentialekvationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}.$$

Alltså kan jag sätta

[1]) BORCHARDT's Journal, Bd. 80.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)_{t=t_0} \cdot \frac{t - t_0}{|\underline{1}} + \ldots .$$

För att denna serie skall ega något konvergensområde, är det enligt det anförda teoremet af professor KOWALEVSKY nödvändigt, att $\varphi(t_0)$ är en hel funktion af v.

Men nu finner man lätt, att $\varphi(t_0)$ betraktad såsom funktion af v eger singulära ställen på den imaginära axeln. Den ifrågavarande serien är således divergent, hvaraf följer, att $\varphi(t)$ endast existerar för sådana värden på t, hvilkas reela del är negativ eller noll. Detta kan äfven uttalas så, att $F(x)$ endast existerar för de x-värden, som uppfylla vilkoret $|x| \leqq 1$.

Den ofvanstående satsen gäller, såsom man lätt finner, äfven för den funktion, som definieras af serien

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_\nu a^\nu x^{\nu^2},$$

om talen c_ν ha en ändlig öfre gräns, och $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} c_\nu a^\nu$ icke är en hel funktion.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 102.

Analytisk härledning af eqvationerna för de ytor och linier, som äro invarianta för den POINCARÉ'ska generaliserade substitutionen samt några geometriska egenskaper hos sådana invarianta ytor och linier.

Af FRANS DE BRUN.

[Meddeladt den 12 Mars 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

Inledning.

Som bekant afbildar

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

en cirkel i $\xi\eta$-planet på en cirkel i samma plan. Med den generaliserade lineära substitutionen förstår POINCARÉ den substitution, som afbildar en sfär med den förra cirkeln till storcirkel på en sfär, som har den andra cirkeln till storcirkel.

Den generaliserade substitutionen säges vara loxodromisk, elliptisk, hyperbolisk eller parabolisk, allteftersom den lineära substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

är loxodromisk, elliptisk, hyperbolisk eller parabolisk.

Vidare säges den generaliserade substitutionen vara hel eller bruten, allteftersom den lineära substitution, hvaraf den bildas, är hel eller bruten.

Låt ζ vara en viss punkts höjd öfver $\xi\eta$-planet; låt den uti $\xi\eta$-planet projicierade punkten bestämmas genom komplexen $z = \xi + i\eta$. Med z_0 betecknas den konjugerade till z. Genom POINCARÉS generaliserade substitution transformeras punkten

(ζ, z) i en annan punkt, hvars koordinater jag betecknar med ζ' och z'. Med z'_0 menar jag den konjugerade till z'.

En punkt i rymden kan ock bestämmas af sitt absoluta afstånd ϱ från origo och genom läget af den i $\xi\eta$-planet projicierade punkten, hvilket uttryckes genom komplexen $z = \xi + i\eta$. Genom den generaliserade substitutionen transformeras punkten (ϱ, z) i en annan punkt, hvars koordinater jag kallar ϱ' och z'. För att punkten skall blifva entydigt definierad, gör jag den bestämmelsen, att ϱ skall anses positiv, om punkten (ϱ, z) ligger ofvanför $\xi\eta$-planet, men negativ, om den ligger under detta plan.

Låt α_0, β_0, γ_0, δ_0 vara de konjugerade till α, β, γ, δ.

Den cirkel, som till eqvation har

$$Az'z'_0 + Bz' + B_0z'_0 + C = 0, \qquad \text{A.}$$

der A och C äro reela, B och B_0 konjugeradt komplexa, öfvergår genom den lineära substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

uti cirkeln

$$\begin{aligned} &(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0)zz_0 + \\ &+ (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0 z) + \\ &+ (A_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta)z_0 + \\ &+ (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0\,. \end{aligned} \qquad \text{B.}$$

Eqv. för den sfär, som har A. till storcirkel, erhålles om $z'z'_0$ utbytes mot ϱ'^2. Den sfärens eqv. blir tydligen

$$A\varrho'^2 + Bz' + B_0z'_0 + C = 0\,. \qquad \text{A*}$$

På samma sätt erhålles eqv. för den sfär, som har B. till storcirkel, genom att utbyta zz_0 mot ϱ^2. Den sfärens eqv. blir

$$\begin{aligned} &(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0)\varrho^2 + \\ &(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0)z + \\ &+ (A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta)z_0 + \\ &+ (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0\,. \end{aligned} \qquad \text{B*.}$$

A, B och C äro fullkomligt arbiträra i A* och B*. Genom att jemföra koefficienterna för desamma erhålles det analytiska sammanhanget vid den generaliserade substitutionen uttryckt genom

$$\left.\begin{aligned}\varrho'^2 &= \frac{\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}\\ z' &= \frac{\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}\\ z'_0 &= \frac{\varrho^2\alpha_0\gamma + z\beta_0\gamma + z_0\alpha_0\delta + \beta_0\delta}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Alla dessa räkningar återfinnas i POINCARÉS afhandling »Sur les groupes kleineens» i tredje bandet af Acta Mathematica.

En *punkt* säges vara *invariant* l. *dubbelpunkt* för den generaliserade substitutionen, om den blifver oförändrad för den samma.

En *linie* säges vara *invariant* för den generaliserade substitutionen, om hvarje punkt på densamma genom den generaliserade substitutionen transformeras i en punkt, som ligger på samma linie.

Inträffar dessutom, att hvarje punkt på linien är invariant, kallas linien *dubbellinie*.

En *yta* säges vara *invariant* för den generaliserade substitutionen, om hvarje punkt på densamma genom den generaliserade substitutionen transformeras i en punkt, som tillhör ytan.

Någon invariant yta, som har alla sina punkter invarianta för den generaliserade substitutionen, finnes ej.

Med *invariant analytiskt uttryck* menas ett analytiskt uttryck, som blifver oförändradt för den generaliserade substitutionen.

I sina afhandlingar »Theorie des groupes fuchsiens» och »Sur les groupes kleineens» i Acta Mathematica banden I och III framställer POINCARÉ invarianta linier och punkter för den grupp af lineära elliptiska och hyperboliska substitutioner

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

som har två uppgifna dubbelpunkter ζ_1 och ζ_2; äfven framställer han invarianterna för den grupp af lineära paraboliska substitutioner, som har ζ_1 till dubbelpunkt och ett fixt värde på

$$\frac{\gamma}{\alpha + \delta} \cdot \frac{\alpha_0 + \delta_0}{\gamma_0}.$$

Slutligen angifver han ock invarianterna för den grupp af lineära loxodromiska substitutioner, som har ζ_1 och ζ_2 till dubbelpunkter samt ett fixt värde på

$$\frac{\mu}{\text{Log } M},^{1)}$$

då μ och M definieras genom

$$\frac{\gamma\zeta_2 + \delta}{\gamma\zeta_1 + \delta} = Me^{i\mu}.$$

Sedan framställer han invarianta ytor och linier för de grupper af generaliserade substitutioner, hvilkas lineära substitutioner hafva ofvan angifna egenskaper.

POINCARÉ, som på rent geometrisk väg erhåller sina invarianter, har endast framställt några få dylika. Hvad särskildt den loxodromiska substitutionen angår, angifver POINCARÉ för densamma ingen enda invariant yta.

I följande afhandling har jag, utgående från substitutionsformlerna (1) här ofvan, på analytisk väg framstält ytor och linier, som äro invarianta för den grupp af generaliserade substitutioner, hvilka hafva dubbelpunkterna

$$(\zeta = 0;\ z = \zeta_1)$$
$$(\zeta = 0;\ z = \zeta_2).$$

För den loxodromiska substitutionen gör jag icke ännu något antagande om, huruvida $\frac{\mu}{\text{Log } M}$ skall vara fixt.

Detsamma gäller om den paraboliska substitutionen med afseende på uttrycket

$$\frac{\gamma}{\alpha + \delta} \cdot \frac{\alpha_0 + \delta_0}{\gamma_0}.$$

Erhåller jag vid den loxodromiska (l. paraboliska) substitutionen invarianta ytor eller linier, då $\frac{\mu}{\text{Log } M} \left(\text{l. } \frac{\gamma}{\alpha + \delta} \cdot \frac{\alpha_0 + \delta_0}{\gamma_0}\right)$ är arbiträrt, kallar jag dem *allmänt invarianta ytor eller linier;* i motsatt fall kallar jag dem *specielt invarianta ytor eller linier.*

---

[1]) Här och öfverallt i det följande menar jag med Log den reela naturliga logaritmen.

På samma sätt menar jag med ett *allmänt invariant analytiskt uttryck* ett sådant analytiskt uttryck, som är invariant för den loxodromiska (l. paraboliska) substitutionen och är oberoende af $\frac{\mu}{\text{Log } M}\left(\text{l. } \frac{\gamma}{\alpha+\delta}\cdot\frac{\alpha_0+\delta_0}{\gamma_0}\right)$; är det invarianta uttrycket beroende af endera af $\frac{\mu}{\text{Log } M}$ och $\frac{\gamma}{\alpha+\delta}\cdot\frac{\alpha_0+\delta_0}{\gamma_0}$, kallar jag det ett *specielt invariant uttryck.*

För den lineära loxodromiska och paraboliska substitutionen finnas endast specielt invarianta linier.

Sedan de invarianta ytorna blifvit funna, erhåller man de invarianta linierna genom att taga skärningslinierna mellan dessa ytor. Problemet att finna invarianta ytor och linier reduceras derför till att finna de förra.

Jag har

$$\varrho'^2 = \zeta'^2 + z'z'_0; \; \varrho^2 = \zeta^2 + zz_0.$$

Insättas dessa uttryck på ϱ'^2 och ϱ^2 uti (1), erhålles efter några enkla räkningar:

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \pm \sqrt{\Delta\Delta_0}\frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\zeta^2 + GK_0}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\zeta^2 + G_0K}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

der

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \alpha\delta - \beta\gamma \qquad & \Delta_0 &= \alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 \\ G &= \alpha z + \beta & G_0 &= \alpha_0 z_0 + \beta_0 \\ K &= \gamma z + \delta & K_0 &= \gamma_0 z_0 + \delta_0 . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Af öfversta likheten i (2) följer, att $\xi\eta$-planet är invariant plan.

§ 1.

Invarianta ytor och linier för den generaliserade substitution, som har två olika dubbelpunkter inom ändligt område.

I detta fall är den generaliserade substitutionen bruten. Den lineära substitutionen har formen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \ \gamma \neq 0. \tag{1}$$

Låt ζ_1 och ζ_2 vara dubbelpunkterna. Kalla deras konjugerade $\zeta_1^{(0)}$ och $\zeta_2^{(0)}$. Inför följande beteckningar

$$Q = \gamma\gamma_0 \zeta^2 + KK_0. \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{c} K_\alpha = \gamma\zeta_\alpha + \delta \qquad K_\alpha^{(0)} = \gamma_0 \zeta_\alpha^{(0)} + \delta_0 \\ (\alpha = 1, 2). \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_\alpha^2 = \zeta'^2 + (z' - \zeta_\alpha)(z'_0 - \zeta_\alpha^{(0)}) \\ \varrho_\alpha^2 = \zeta^2 + (z - \zeta_\alpha)(z_0 - \zeta_\alpha^{(0)}). \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} Se^{i\Sigma} = \zeta'^2 + (z' - \zeta_1)(z'_0 - \zeta_2^{(0)}) \\ se^{i\sigma} = \zeta^2 + (z - \zeta_1)(z_0 - \zeta_2^{(0)}). \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_\alpha e^{i\Phi_\alpha} = z' - \zeta_\alpha \\ r_\alpha e^{i\varphi_\alpha} = z - \zeta_\alpha. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Uti formlerna (4) och (6) antager α-värdena 1 och 2.

Kalla ξ- och η-koordinaterna för ζ_α för m_α och m'_α. Då är

$$\left.\begin{array}{c} \xi - m_\alpha = r_\alpha \cos \varphi_\alpha \\ \eta - m'_\alpha = r_\alpha \sin \varphi_\alpha \\ \alpha = 1, 2. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Vidare på grund af (5)

$$\left.\begin{array}{r} \zeta^2 + r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = s \cos \sigma \\ r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = s \sin \sigma \end{array}\right\} \tag{8}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} \zeta^2 + (\xi - m_1)(\xi - m_2) + (\eta - m'_1)(\eta - m'_2) &= s \operatorname{Cos} \sigma \\ (\xi - m_2)(\eta - m'_1) - (\xi - m_1)(\eta - m'_2) &= s \operatorname{Sin} \sigma . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Af (2)—(4) följer

$$\left.\begin{aligned} Q = \gamma\gamma_0[\zeta^2 + (z - \zeta_\alpha)(z_0 - \zeta_\beta^{(0)})] + \\ + \gamma K_\beta^{(0)}(z - \zeta_\alpha) + \gamma_0 K_\alpha(z_0 - \zeta_\beta^{(0)}) + K_\alpha K_\beta^{(0)} \\ \alpha = 1, 2;\ \beta = 1, 2;\ \alpha \gtreqless \beta . \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Tydligen är

$$\varDelta = K_1 K_2 \qquad \varDelta_0 = K_1^{(0)} K_2^{(0)} . \tag{11}$$

Några enkla räkningar gifva

$$\left.\begin{aligned} z' - \zeta_\alpha &= \frac{\varDelta}{K_\alpha Q}\{\gamma_0\zeta^2 + \gamma_0(z - \zeta_\alpha)(z_0 - \zeta_\beta^{(0)}) + K_\beta^{(0)}(z - \zeta_\alpha)\} \\ z'_0 - \zeta_\alpha^{(0)} &= \frac{\varDelta_0}{K_\alpha^{(0)} Q}\{\gamma\zeta^2 + \gamma(z - \zeta_\beta)(z_0 - \zeta_\alpha^{(0)}) + K_\beta(z_0 - \zeta_\alpha^{(0)})\} \\ &\alpha = 1, 2;\ \beta = 1, 2;\ \alpha \lesseqgtr \beta . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Häraf och af öfversta likheten i (2) Inl. följer

$$\left.\begin{aligned} \zeta'^2 + (z' - \zeta_\alpha)(z'_0 - \zeta_\beta^{(0)}) = \frac{\varDelta\varDelta_0}{K_\alpha K_\beta^{(0)} Q} \cdot \{\zeta^2 + (z - \zeta_\alpha)(z_0 - \zeta_\beta^{(0)})\} \\ \alpha = 1, 2;\ \beta = 1, 2;\ \alpha \lesseqgtr \beta . \end{aligned}\right| \tag{13}$$

Denna likhet innefattar i sjelfva verket fyra olika formler. Genom att kombinera dem på lämpligt sätt erhålles:

$$\frac{\zeta'^2 + (z' - \zeta_1)(z'_0 - \zeta_1^{(0)})}{\zeta'^2 + (z' - \zeta_2)(z'_0 - \zeta_1^{(0)})} = Me^{i\mu} \cdot \frac{\zeta^2 + (z - \zeta_1)(z_0 - \zeta_1^{(0)})}{\zeta^2 + (z - \zeta_2)(z_0 - \zeta_1^{(0)})} \tag{14}$$

$$\frac{\zeta'^2 + (z' - \zeta_1)(z'_0 - \zeta_2^{(0)})}{\zeta'^2 + (z' - \zeta_2)(z'_0 - \zeta_2^{(0)})} = Me^{i\mu} \cdot \frac{\zeta^2 + (z - \zeta_1)(z_0 - \zeta_2^{(0)})}{\zeta^2 + (z - \zeta_2)(z_0 - \zeta_2^{(0)})}, \tag{15}$$

då jag satt

$$\frac{K_2}{K_1} = Me^{i\mu} .\ ^{1)}$$

---

[1]) Sättes $\zeta = 0$ och $\zeta' = 0$ öfvergå likheterna (14) och (15) uti:

$$\frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = Me^{i\mu} \cdot \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2},$$

hvilken är bekant från teorien för lineära substitutioner.

Här är att observera, att i likheterna (14) och (15) ej förekomma andra konstanter än ζ_1, ζ_2, M och μ.

Af (15) synes, att den cirkel, hvars eqv. är

$$\zeta^2 + (z - \zeta_1)\left(z_0 - \zeta_2^{(0)}\right) = 0,$$

är invariant linie. Denna invarianta cirkel är förut funnen af Poincaré.

A. Den generaliserade substitutionen är loxodromisk.

För att substitutionen skall vara loxodromisk, fordras, att

$$M \neq 1 \qquad \mu \neq 0 .$$

Öfversta eqvationen i (2) Inl. och (13) gifva, om (4) och (5) iakttagas,

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1^2 P_2^2}{\zeta'^2} &= \frac{\varrho_1^2 \cdot \varrho_2^2}{\zeta^2} \\ \frac{S^2}{\zeta'^2} &= \frac{s^2}{\zeta^2} \\ \frac{S^2}{P_1^2 \cdot P_2^2} &= \frac{s^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Uti likheterna (17) förekomma inga andra konstanter än ζ_1 och ζ_2.

Genom kombination af (17) kan jag få fram huru många invarianta analytiska uttryck som helst, hvilka endast bero af ζ_1 och ζ_2.

(14) och (15) gifva, om (5) iakttages,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log} \frac{P_1^2}{S} &= \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} + \operatorname{Log} M \\ \Sigma &= \sigma + \mu . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log} \frac{S}{P_2^2} &= \operatorname{Log} \frac{s}{\varrho_2^2} + \operatorname{Log} M \\ \Sigma &= \sigma + \mu . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Adderas de tvenne öfre likheterna uti (18) och (19), erhålles efter division med 2

$$\operatorname{Log} \frac{P_1}{P_2} = \operatorname{Log} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \operatorname{Log} M . \tag{20}$$

(18) gifver

$$\mu \operatorname{Log} \frac{P_1^2}{S} - \operatorname{Log} M \cdot \Sigma = \mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma. \qquad (21)$$

(19) gifver

$$\mu \operatorname{Log} \frac{S}{P_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \Sigma = \mu \operatorname{Log} \frac{s}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma. \qquad (22)$$

Af nedre likheten i (19) och af (20) följer

$$\mu \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_2} - \operatorname{Log} M \cdot \Sigma = \mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma. \qquad (23)$$

Uti likheten (23) hafva vi antagit, att alla punkter befinna sig i öfre halfrymden.

Genom att på olika sätt kombinera de invarianta uttrycken (17), (21)—(23) kunna huru många invarianta uttryck som helst härledas. Uti likheterna (21)—(23) förekomma konstanterna ζ_1, ζ_2 och $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$. Uttrycken (21)—(23) äro således specielt invarianta.

Utaf de af (17) och (21)—(23) härledda invarianta uttrycken äro de, hvaruti ingår något af uttrycken (21)—(23), endast specielt invarianta. Likheterna (17) gifva upphof åt samma klass af invarianta ytor

$$\frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\zeta^2} = k^2, \qquad (24)$$

der k är en arbiträr parameter.

Denna yta har den märkliga egenskapen, att den är alldeles oberoende af $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$. Det har således lyckats, att för den loxodromiska substitutionen angifva en hel klass af invarianta ytor, då endast ζ_1 och ζ_2 äro på förhand gifna. Denna yta är en allmänt invariant yta. De ytor, jag erhåller af de invarianta uttryck, som uppstå genom kombination af likheterna (17), äro också allmänt invarianta ytor [1]).

Vid den generaliserade loxodromiska substitutionen kommer jag således väsentligt längre än vid samma lineära substitution.

[1]) Hvarje sådan yta är antingen af slaget (24), eller utgör den sammanfattningen af flera dylika ytor, som endast skilja sig från hvarandra genom olika värden på k.

Jag vill nu skrifva eqv. (24) under en annan form. Transformeras koordinatsystemet, så att origo kommer i punkten $\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}$, och nya positiva ξ-axeln går genom ζ_2, nya η-axeln vinkelrät deremot i gamla $\xi\eta$-planet, och nya ζ-axeln fortfarande är vinkelrät mot de båda andra axlarne, och betecknas de nya koordinaterna med x, y och z, så öfvergår eqv. (24) uti

$$[(x - d)^2 + y^2 + z^2] \cdot [(x + d)^2 + y^2 + z^2] = k^2 z^2 , \qquad (25)$$

der d betyder halfva afståndet mellan dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2.

Plan parallela med koordinatplanen afskära på dessa ytor s. k. SIEBECKSKA kurvor.

Af likheten (21) erhåller man såsom invarianta ytor

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_1 , \qquad (26)$$

der l_1 är en arbiträr parameter.

Likheten (22) gifver till invarianta ytor

$$\mu \operatorname{Log} \frac{s}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_2 , \qquad (27)$$

der l_2 är en arbiträr parameter.

Dessa ytors eqvationer (26) och (27) öfvergå tydligen i hvarandra genom en enkel koordinaltransformation.

Likheten (23) gifver de invarianta ytorna

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = p , \qquad (28)$$

der p är en arbiträr parameter.

Andra invarianta uttryck, som bildas genom kombination af uttrycken (17), (21)—(23), äro — vi antaga här, att såväl ζ som ζ' äro positiva —

$$\left.\begin{aligned} &\mu \operatorname{Log} \frac{\zeta}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma \\ &\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{\zeta} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma . \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Dessa uttryck gifva upphof åt de båda grupperna af invarianta ytor

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\zeta}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = q_1 \tag{30}$$

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{\zeta} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = q_2 , \tag{31}$$

der q_1 och q_2 äro arbiträra parametrar.

Dessa ytors eqvationer (30) och (31) öfvergå tydligen i hvarandra genom en enkel koordinattransformation.

Ytorna (26)—(31) bero af de båda dubbelpunkterna och $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$; de äro följaktligen invarianta för den grupp af loxodromiska substitutioner, hvilka hafva uppgifna dubbelpunkter och fixt värde på $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$. De äro således, hvad jag kallat, specielt invarianta ytor.

De ytor, jag erhåller af de invarianta uttryck, som uppstå genom kombination af (17) med någon af (21)—(23), äro också specielt invarianta ytor.

Invarianta linier för den generaliserade loxodromiska substitutionen med dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2 samt fixt värde på $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$ blifva alla de linier, som bestämmas af eqvationerna

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\zeta^2} &= k^2 \\ \mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma &= l_1 , \end{aligned} \right\}$$

der k och l_1 äro alldeles arbiträra.

Häri inbegripas de båda gränsfall, då fjerdegradsytan breder ut sig i $\xi\eta$-planet, och då den drager sig tillsammans till en cirkel, som till diameter har afståndet mellan dubbelpunkterna, och hvars plan är vinkelrätt mot $\xi\eta$-planet, hvilket senare inträffar, då uti (24)

$$k^2 = 4d^2 ;$$

i förra fallet blir invarianten den loxodromiska linie, som är invariant för den grupp af lineära loxodromiska substitutioner, som har dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2 samt fixt värde på $\frac{\mu}{\text{Log } M}$; i senare fallet erhålles POINCARÉS invarianta cirkel[1]), hvilken redan är funnen å sidan 142.

Dessa invarianta linier, som utgöra skärningslinierna mellan (44) och (26), kallar jag i det följande *dubbelkrökta loxodromer* med polerna ζ_1 och ζ_2 och parametern $\frac{\mu}{\text{Log } M}$.

B. **Den generaliserade substitutionen är elliptisk.**

Vid den elliptiska substitutionen är

$$M = 1 \qquad \mu \neq 0 .$$

I detta fall erhållas till invarianta ytor fjerdegradsytorna (24). Ytorna (26) och (27) reduceras till två andra grupper af fjerdegradsytor, hvilkas eqvationer äro

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho_1^2}{s} &= \lambda_1 \\ \frac{\varrho_2^2}{s} &= \lambda_2 . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Genom en enkel koordinattransformation öfvergår

$$\varrho_1^2 = \lambda_1 s$$

uti

$$\varrho_2^2 = \lambda_2 s .$$

Ytorna (28) reduceras till sfärer, som till storcirklar hafva de cirklar uti $\xi\eta$-planet, hvilka harmoniskt och orthogonalt skära afståndet mellan dubbelpunkterna. Att dessa sfärer äro invarianta, är förut visadt af POINCARÉ i hans ofvannämnda afhandling.

[1]) Denna linie är invariant för hela den grupp af generaliserade substitutioner, som till dubbelpunkter har ζ_1 och ζ_2.

De invarianta ytorna (30) och (31) öfvergå i ett system af tvenne lika stora sfärer, hvilka på motsatta sidor tangera $\xi\eta$-planet uti endera af dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2.

Invarianta linier blifva skärningslinierna mellan ytorna (24) och (32). Häri inbegripes det gränsfall, då ytan (24) breder ut sig i $\xi\eta$-planet; då utgöras invarianterna af de cirklar i $\xi\eta$-planet, som harmoniskt och orthogonalt skära afståndet mellan ζ_1 och ζ_2.

Alla dessa invarianta ytor och linier äro invarianta för den grupp af elliptiska substitutioner, som till dubbelpunkter har ζ_1 och ζ_2.

Finnes det några dubbelpunkter utom ζ_1 och ζ_2?

Antag ζ och ζ' positiva.

Formlerna (2) Inl. gifva i förening med (11)

$$\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0 = K_1K_1^{(0)} = K_2K_2^{(0)}$$

$$\alpha\gamma_0\zeta^2 + GK_0 = z\cdot K_1K_1^{(0)} = z\cdot K_2K_2^{(0)}.$$

Dessa eqvationer representera tvenne sfärer, som hafva sina medelpunkter i $\xi\eta$-planet, och båda gå genom ζ_1 och ζ_2. Skärningslinien mellan dem är följaktligen POINCARÉS invarianta cirkel, hvilken — såsom POINCARÉ på annan väg visat — vid den elliptiska substitutionen blir dubbelcirkel.

C. **Den generaliserade substitutionen är hyperbolisk.**

Vid den hyperboliska substitutionen är

$$M \neq 1 \qquad \mu = 0.$$

I detta fall erhålles utom fjerdegradsytorna (24) ingen ny invariant yta.

Ytorna (26)—(31) reduceras nemligen alla till sfärer, som gå genom ζ_1 och ζ_2 och hafva sina medelpunkter i $\xi\eta$-planet. Att dessa sfärer äro invarianta, har POINCARÉ visat.

Invarianta linier blifva skärningslinierna mellan de invarianta ytorna (24) och de sfärer, som gå genom ζ_1 och ζ_2 och hafva sina medelpunkter i $\xi\eta$-planet.

Samtliga dessa invarianta ytor och linier äro invarianta för den grupp af generaliserade hyperboliska substitutioner, som till dubbelpunkter har ζ_1 och ζ_2.

Vid den hyperboliska substitutionen finnas inga andra dubbelpunkter än ζ_1 och ζ_2.

§ 2.

Invarianta ytor och linier för den grupp af generaliserade substitutioner, som har *en* ändlig dubbelpunkt ζ_1.

Här är

$$\zeta_1 = \zeta_2 .$$

Substitutionen är parabolisk.

Öfversta likheten i (2) Inl. är

$$\zeta' = \pm \frac{\sqrt{\varDelta \varDelta_0}}{Q} \cdot \zeta . \tag{1}$$

Likheten (13) § 1 ersättes af

$$P_1^2 = \frac{\sqrt{\varDelta \varDelta_0}}{Q} \cdot \varrho_1^2 . \tag{2}$$

Af (12) § 1 följer slutligen

$$\left.\begin{aligned} \frac{z' - \zeta_1}{P_1^2} &= \frac{z - \zeta_1}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma_0}{K_1^{(0)}} \\ \frac{z'_0 - \zeta_1^{(0)}}{P_1^2} &= \frac{z_0 - \zeta_1^{(0)}}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma}{K_1} . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

För $\zeta = o$ öfvergå dessa likheter uti

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - \zeta_1} &= \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{\gamma}{K_1} \\ \frac{1}{z'_0 - \zeta_1^{(0)}} &= \frac{1}{z_0 - \zeta_1^{(0)}} + \frac{\gamma_0}{K_1^{(0)}} , \end{aligned}$$

hvilka formler äro bekanta från teorien för lineära substitutioner.

Af likheterna (1)—(3) följer, att

$$\frac{P_1^4}{\zeta'^2} = \frac{\varrho_1^4}{\zeta^2}. \tag{4}$$

$$\frac{P_1^2}{\frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}}(z' - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varDelta_0}}(z'_0 - \zeta_1^{(0)})} = \frac{\varrho_1^2}{\frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}}(z - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varDelta_0}}(z_0 - \zeta_1^{(0)})}. \tag{5}$$

$$\left[\frac{\zeta'}{\frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}}(z' - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varDelta_0}}(z'_0 - \zeta_1^{(0)})}\right]^2 = \left[\frac{\zeta}{\frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}}(z - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varDelta_0}}(z_0 - \zeta_1^{(0)})}\right]^2. \tag{6}$$

Af dessa kunna genom kombination erhållas huru många invarianta uttryck som helst.

Likheten (4) ger upphof till den invarianta yta, hvars eqvation är

$$\varrho_1^2 = \pm\, 2\bar{\omega}\zeta, \tag{7}$$

der $\bar{\omega}$ betyder en godtycklig parameter.

Detta är eqvationen för ett system af tvenne lika stora sfärer, hvilka gå genom ζ_1 och hafva sina medelpunkter på räta linien

$$z = \zeta_1$$

på motsatta sidor om $\xi\eta$-planet.

Eqvationen (7) innehåller endast konstanten ζ_1. De ytorna äro följaktligen invarianta för hela den grupp af generaliserade substitutioner, som har *en* dubbelpunkt ζ_1 inom ändligt område. (7) utgör sål. eqv. för ett system af allmänt invarianta ytor.

Likheten (5) ger upphof åt den invarianta yta, som till eqvation har

$$\varrho_1^2 = \varkappa \cdot \frac{\frac{\gamma}{\sqrt{\varDelta}}(z - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varDelta_0}}(z_0 - \zeta_1^{(0)}),}{i}, \tag{8}$$

der $\varkappa$ betecknar en godtycklig parameter.

För hvarje grupp af generaliserade substitutioner med *en* gifven dubbelpunkt ζ_1 och fixt värde på $\sqrt{\frac{\varDelta_0}{\varDelta}} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0}$ eller $\frac{\alpha_0 + \delta_0}{\gamma_0} \cdot \frac{\gamma}{\alpha + \delta}$

äro sålunda samtliga de sfärer invarianta, hvilkas storcirklar äro belägna i $\xi\eta$-planet och i ζ_1 tangera en *viss* rät linie. Likheten (6) ger upphof till en invariant yta, som består af tvenne plan, som gå genom ζ_1 och skära $\xi\eta$-planet utefter en *viss* rät linie; dessutom skola de båda planen bilda samma vinkel med $\xi\eta$-planet. Dessa invarianta ytor äro också specielt invarianta.

Invarianta linier äro de cirklar, som utgöra skärningslinierna mellan de invarianta ytorna. De invarianta linierna äro tydligen specielt invarianta.

Några invarianta punkter finnas ej utom ζ_1.

§ 3.

Invarianta ytor och linier för den klass af generaliserade substitutioner, som har ena dubbelpunkten i ∞ och den andra dubbelpunkten ζ_1 inom ändligt område.

I detta fall är den generaliserade substitutionen hel. Den lineära substitutionen har formen

$$z' = \alpha z + \beta . \tag{1}$$

Formlerna (2) Inl. reduceras till

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \pm \sqrt{\alpha\alpha_0} \cdot \zeta \\ z' &= \alpha z + \beta \\ z'_0 &= \alpha_0 z_0 + \beta_0 . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Man erhåller

$$z' - \zeta_1 = \alpha(z - \zeta_1) . \tag{3}$$

Häraf synes, att räta linien

$$z = \zeta_1 ,$$

d. v. s. den räta linie, som går genom ζ_1 och är vinkelrät mot $\xi\eta$-planet, är invariant.

Denna räta linie motsvarar POINCARÉS invarianta cirkel.

Inför beteckningarne

$$\alpha = Me^{i\mu} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} z' - \zeta_1 &= R_1 e^{i\Phi_1} \\ z - \zeta_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

A. **Den generaliserade substitutionen är loxodromisk.**

För att den generaliserade substitutionen skall vara loxodromisk, fordras

$$M \neq 1 \qquad \mu \neq 0$$

Af (3) och (5) erhålles

$$R_1 e^{i\Phi_1} = Me^{i\mu} \cdot r_1 e^{i\varphi_1} ,$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log} R_1 &= \operatorname{Log} r_1 + \operatorname{Log} M \\ \Phi_1 &= \varphi_1 \quad\; + \mu . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Af (2) och (4) får man

$$\zeta' = \pm M \cdot \zeta . \qquad (7)$$

(6) och (7) gifva

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1^2}{\zeta'^2} &= \frac{P_1^2}{\zeta^2} \\ \frac{R_1^2}{\zeta'^2} &= \frac{r_1^2}{\zeta^2} \\ \frac{R_1^2}{P_1^2} &= \frac{r_1^2}{\varrho_1^2} , \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

vidare

$$\left.\begin{aligned} \mu \operatorname{Log} R_1 - \Phi_1 \operatorname{Log} M &= \mu \operatorname{Log} r_1 - \varphi_1 \operatorname{Log} M \\ \mu \operatorname{Log} P_1 - \Phi_1 \operatorname{Log} M &= \mu \operatorname{Log} \varrho_1 - \varphi_1 \operatorname{Log} M , \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

der

$$P_1^2 = R_1^2 + \zeta'^2 ; \; \varrho_1^2 = r_1^2 + \zeta^2 .$$

Vid detta sista uttryck hafva vi antagit, att såväl ϱ_1 som P_1 äro positiva.

Uti likheterna (8) förekomma inga parametrar utom ζ_1.

Genom att på olika sätt kombinera de invarianta uttrycken (8) kan man få huru många invarianta uttryck som helst, hvilka endast bero af ζ_1 och ζ_2.

Uti likheterna (9) förekomma parametrarne ζ_1 och $\frac{\mu}{\operatorname{Log} M}$. Uttrycken (9) äro specielt invarianta.

Den första invarianten — den härledes af (8) — har till eqvation

$$\zeta^2 = k'^2 r_1^2,$$

der k' betecknar en godtycklig parameter. Detta är tydligen eqvationen för en rät cirkulär dubbelkon, hvars axel är parallel med ζ-axeln, och hvars spets är belägen i dubbelpunkten ζ_1. Dess eqvation kan ock skrifvas

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 + \frac{v}{\sqrt{1+k'^2}} \operatorname{Cos} u \\ \eta &= m'_1 + \frac{v}{\sqrt{1+k'^2}} \cdot \operatorname{Sin} u \\ \zeta &= \quad \pm \frac{vk'}{\sqrt{1+k'^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

der m_1 och m'_1 betyda ξ- och η-koordinaterna för ζ_1. Denna yta är en allmänt invariant yta.

De ytor jag erhåller af de invarianta uttryck, som uppstå genom kombination af (8), äro också allmänt invarianta ytor [1]).

Den andra invarianta ytans eqvation

$$\mu \operatorname{Log} r_1 - \varphi_1 \operatorname{Log} M = l'$$

— l' betyder en godtycklig parameter — kan ock skrifvas under formen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 + e^u \cdot \operatorname{Cos} \frac{\mu u - l'}{\operatorname{Log} M} \\ \eta &= m'_1 + e^u \cdot \operatorname{Sin} \frac{\mu u - l'}{\operatorname{Log} M} \\ \zeta &= v. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Detta är tydligen eqvationen för en cylinder, hvars fundamentalkurva är en enkel loxodrom med sin pol uti $z = \zeta_1$, och hvars generatriser äro parallela med ζ-axeln.

Denna cylinder kallar jag i det följande den *loxodromiska cylindern.*

[1]) Hvarje sådan yta är antingen en kon af slaget (10), eller utgör den sammanfattningen af flera dylika koner, som endast skilja sig från hvarandra genom olika värden på k'.

Den tredje invarianta ytans eqvation är

$$\mu \operatorname{Log} \varrho_1 - \varphi \operatorname{Log} M - p' = 0\,; \tag{12}$$

p' betecknar den arbiträra parametern.

Denna yta kallar jag i det följande för den *enkla loxodromiska ytan* eller *loxodromiden.*

Ett invariant uttryck, som bildas genom kombination af första likheten uti (9) och andra likheten uti (8), är — vi antaga här, att såväl ζ som ζ' äro positiva —

$$\mu \operatorname{Log} \zeta - \varphi \cdot \operatorname{Log} M$$

Af detta uttryck erhålles den invarianta yta, hvars eqvation är

$$\mu \operatorname{Log} \zeta - \varphi \cdot \operatorname{Log} M = q'\,;$$

q' betecknar en arbiträr parameter.

Denna, som är eqvationen för en konoid, kan ock skrifvas

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 + v \operatorname{Cos} u \\ \eta &= m'_1 + v \operatorname{Sin} u \\ \zeta &= e^{\dfrac{u \operatorname{Log} M + q'}{\mu}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Fundamentalkurvan är den räta linie, som till eqvation har

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 \\ \eta &= m'_1 \end{aligned}\right\}$$

Samtliga generatriser äro parallela med $\xi\eta$-planet.

Direktrisen för denna konoid är den kurva, som utgör skärningslinie mellan konerna (10) och cylindrarne (11). — Denna konoid kallar jag i det följande för den *loxodromiska konoiden.*

Samtliga ytorna (11)—(13) äro specielt invarianta. De ytor, som erhållas af de analytiska uttryck, hvilka uppstå genom kombination af (8) och någon af (9), äro specielt invarianta ytor.

Invarianta linier blifva skärningslinierna mellan konerna (10) och cylindrarne (11). Häri inbegripas de båda gränsfall, då konerna breda ut sig i $\xi\eta$-planet, och då de draga sig tillsammans till en rät linie, som går genom ζ_1 och är vinkelrät mot $\xi\eta$-planet; i förra fallet blir invarianterna den grupp af loxodromer,

som äro invarianta för den hela lineära loxodromiska substitutionen; i senare fallet blir invarianten den räta linie, som till eqvation har

$$\left.\begin{array}{l}\xi = m_1\\ \eta = m'_1\end{array}\right\}$$

Denna invarianta linie är funnen förut sidan 150 nedtill.

Den invarianta linien är speciellt invariant [1]).

Den invarianta linien, som utgör skärningslinie mellan konerna (10) och de loxodromiska cylindrarne (11), kallar jag i det följande för den *dubbelkrökta enkelloxodromen.*

Några invarianta punkter finnas ej utom ζ_1 och ∞.

B. Den generaliserade substitutionen är elliptisk.

Vid den elliptiska substitutionen är

$$M = 1 \qquad \mu \neq 0 .$$

(6) och (7) öfvergå uti

$$\begin{aligned}\text{Log}\, R_1 &= \text{Log}\, r_1\\ \Phi_1 &= \varphi_1 + \mu\\ \zeta' &= \pm\, \zeta .\end{aligned}$$

Konerna (10) blifva invarianta.

Dessutom är

$$\zeta^2 = \lambda'^2 ,$$

der λ' betecknar en godtycklig parameter, eqvationen för en invariant.

Detta är eqvationen för två plan, som äro parallela med $\xi\eta$-planet och belägna på hvar sin sida *om* och på samma afstånd *från* $\xi\eta$-planet. Cylindrarne (10) öfvergå uti räta cirkulära cylindrar, som till gemensam axel hafva den räta linie, som går genom ζ_1 och är parallel med ζ-axeln. De loxodromiska ytorna (12) öfvergå uti sfärer, som hafva sina medelpunkter uti ζ_1.

De invarianta ytorna bero endast af ζ_1.

---

[1]) Här af undantages den invarianta linien

$$\left.\begin{array}{l}\xi = m_1\\ \eta = m'_1\end{array}\right\}$$

Invarianta linier blifva skärningslinierna mellan konerna (10) och de räta cirkulära cylindrarne. Häri inbegripes det gränsfall, då konen breder ut sig i $\xi\eta$-planet, då invarianten blir en cirkel i $\xi\eta$-planet, som har sin medelpunkt i ζ_1. — Dessa skärningslinier äro ingenting annat än cirklar, hvilka hafva sina medelpunkter på den räta linien

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 \\ \eta &= m'_1 , \end{aligned}\right\}$$

och hvilkas plan äro parallela med $\xi\eta$-planet.

Den invarianta linien beror endast af dubbelpunktens ζ_1 läge.

Antager man, att ζ och ζ' alltid äro positiva, blir den räta linie, som till eqvation har

$$\left.\begin{aligned} \xi &= m_1 \\ \eta &= m'_1 , \end{aligned}\right\}$$

en dubbellinie, d. ä. hvarje punkt på densamma är en dubbelpunkt. Denna dubbellinie motsvarar POINCARÉS dubbelcirkel. Dubbellinien beror endast af ζ_1:s läge.

C. **Den generaliserade substitutionen är hyperbolisk.**

Vid den hyperboliska substitutionen är

$$M \neq 1 \qquad \mu = 0 .$$

(6) och (7) öfvergå uti

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log} R_1 &= \operatorname{Log} r_1 + \operatorname{Log} M \\ \Phi_1 &= \varphi_1 \\ \zeta' &= \pm M \cdot \zeta . \end{aligned}\right\}$$

Konen (10) blir äfven här invariant. Ytorna (10)—(13) ersättas af plan, som äro vinkelräta mot $\xi\eta$-planet och gå genom ζ_1.

Samtliga ytor äro beroende endast af ζ_1.

Invarianta linier blifva skärningslinierna mellan konerna (10) och de mot $\xi\eta$-planet vinkelräta plan, som gå genom ζ_1. De invarianta linierna äro följaktligen två räta linier, som gå genom ζ_1, och båda ligga i samma plan som linien

$$\left.\begin{array}{l}\xi = m_1\\ \eta = m'_1 .\end{array}\right\}$$

De invarianta linierna äro beroende endast af ζ_1.

Vid den hyperboliska substitutionen finnas inga dubbelpunkter utom ζ_1 och ∞.

§ 4.

Invarianta ytor och linier för den klass af generaliserade substitutioner, som har sina båda dubbelpunkter ζ_1 och ζ_2 sammanfallande i ∞.

I detta fall är substitutionen hel och parabolisk.

Man har

$$z' = z + \beta . \tag{1}$$

Sätt

$$\beta = Ne^{i\nu} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}z' = \xi' + i\eta'\\ z = \xi + i\eta .\end{array}\right\} \tag{3}$$

Jag erhåller

$$\left.\begin{array}{l}\xi' = \xi + N \operatorname{Cos} \nu\\ \eta' = \eta + N \operatorname{Sin} \nu .\end{array}\right\} \tag{4}$$

Vidare är

$$\zeta' = \pm \zeta . \tag{5}$$

De invarianta uttrycken blifva

$$\zeta'^2 = \zeta^2 \tag{6}$$

$$\xi' \operatorname{Sin} \nu - \eta' \operatorname{Cos} \nu = \xi \operatorname{Sin} \nu - \eta \operatorname{Cos} \nu . \tag{7}$$

Genom kombination af dessa uttryck kunna huru många invarianta uttryck som helst framställas. Ofvanstående invarianta uttryck gifva upphof åt de invarianta ytorna

$$\zeta^2 = \lambda'^2 \tag{8}$$

$$\xi \operatorname{Sin} \nu - \eta \operatorname{Cos} \nu = \mu' , \tag{9}$$

der λ' och μ' äro godtyckliga parametrar, men ν har ett bestämdt värde.

Den första eqvationen representerar tvenne plan, som befinna sig på samma afstånd från, men på motsatta sidor om $\xi\eta$-planet, med hvilket de äro parallela. Detta är en allmänt invariant yta.

Den senare eqvationen representerar ett system af mot $\xi\eta$-planet vinkelräta plan, hvilkas skärningslinie med $\xi\eta$-planet bildar vinkeln ν med ξ-axeln. Dessa plan äro invarianta för hela den grupp af generaliserade substitutioner, hvilka hafva ∞ till enda dubbelpunkt och dessutom hafva samma värde på ν.

De invarianta linierna äro räta linier på detta plan, hvilka äro parallela med $\xi\eta$-planet.

De invarianta linierna äro invarianta för den grupp af generaliserade substitutioner, hvilka hafva ∞ till enda dubbelpunkt och samma värde på ν.

§ 5.

Geometriska egenskaper hos några invarianta ytor och linier.

1. Plan, som gå genom ζ_1 och äro vinkelräta mot $\xi\eta$-planet, afskära oändligt många koncentriska cirklar på den enkla loxodromoiden.

2. Hvar och en af de enkla loxodromoiderna, som till eqvation hafva

$$\mu \operatorname{Log} \varrho - \operatorname{Log} M \cdot \varphi = p',$$

bildar i hvarje punkt rät vinkel med samtliga dubbelkoner, hvilkas eqvation är

$$\zeta^2 = k'^2 \cdot r_1^2 .$$

3. Den dubbelkrökta enkelloxodromen bildar i hvarje punkt konstant vinkel med konens axel.

4. Såväl krökningen som torsionen är i hvarje punkt på den dubbelkrökta loxodromen omvändt proportionel mot båglängden.

Definition: Den generaliserade substitution, som till lineär substitution har den, som afbildar medelst reciproka radier, kallar jag den generaliserade operationen medelst reciproka radier.

Låt ξ', η', ζ' och ϱ' beteckna de ursprungliga koordinaterna, refererade till ett koordinatsystem, som har origo i ζ_2 och ξ'-axeln gående genom ζ_1, η'-axeln i gamla $\xi\eta$-planet vinkelrät emot ξ'-axeln samt ζ'-axeln vinkelrät mot $\xi'\eta'$-planet. Låt dessa genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier transformeras i koordinaterna ξ'', η'', ζ'' och ϱ''^2, refererade till samma koordinatsystem. Då är, om till transformationsmedelpunkt tages origo, och till transformationsradie tages afståndet mellan dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_1 d. ä. $2d$,

$$\xi'' = \frac{4d^2\xi'}{\varrho'^2}$$

$$\eta'' = -\frac{4d^2\eta'}{\varrho'^2}$$

$$\zeta'' = \frac{4d^2\zeta'}{\varrho'^2}$$

$$\varrho''^2 = \frac{16d^4}{\varrho'^2},$$

och omvändt

$$\xi' = \frac{4d^2\xi''}{\varrho''^2}$$

$$\eta' = -\frac{4d^2\eta''}{\varrho''^2}$$

$$\zeta' = \frac{4d^2\zeta''}{\varrho''^2}$$

$$\varrho'^2 = \frac{16d^4}{\varrho''^2}$$

I det följande tagas $2d$ alltid till transformationsradie och ζ_1 till transformationscentrum.

5. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår en rät cirkulär dubbelkon, som har sin spets uti ζ_1 och till axel har räta linien

$$z = \zeta_1,$$

uti den invarianta yta, som till eqvation har

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 = k^2 \zeta^2 .$$

Denna sats bevisas lätt med tillhjelp af formlerna å förra sidan.

På grund af denna egenskap hos ytan (24) § 1, kallar jag den i det följande för den *transformerade dubbelkonen.*

6. Likasom konen är genererad af räta linier, hvilka gå genom samma punkt ζ_1 och bilda samma vinkel med en gifven rät linie, så genereras den transformerade dubbelkonen af cirklar, hvilka gå genom de båda dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2 och bilda samma vinkel med den cirkel, som till diameter har afståndet mellan dubbelpunkterna, och hvars plan är vinkelrätt emot $\xi\eta$-planet.

7. Krökningslinierna på den transformerade dubbelkonen utgöras dels af de genererande cirklarne, dels af ytans skärningslinier med de sfärer, som gående genom en dubbelpunkt hafva sina medelpunkter på den räta linie, som genom samma dubbelpunkt drages vinkelrätt emot $\xi\eta$-planet.

8. Plan, som gå genom de båda dubbelpunkterna, afskära cirklar på den transformerade dubbelkonen.

9. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår en loxodromisk cylinder, hvars eqvation är

$$\mu \operatorname{Log} r_1 - \operatorname{Log} M \cdot \varphi_1 = l'_1 ,$$

uti de invarianta ytorna

$$\mu \operatorname{Log} \frac{s}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_1 ,$$

och

$$\mu \operatorname{Log} r_2 - \operatorname{Log} M \cdot \varphi_2 = l'_2$$

uti

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_2 ;$$

i förra fallet tages ζ_1 till transformationscentrum, i senare ζ_2. Dessa ytor kallas på grund häraf *transformerade loxodromiska cylindrar.*

10. Likasom de loxodromiska cylindrarne genereras af räta linier, som äro vinkelräta mot $\xi\eta$-planet, så genereras den transformerade loxodromiska cylindern af cirklar, hvilka hafva sina medelpunkter *uti* och plan vinkelräta *emot* $\xi\eta$-planet samt gå genom transformationscentrum ζ_1 eller ζ_2.

11. Krökningslinierna på den transformerade loxodromiska cylinder, som till eqvation har

$$\mu \operatorname{Log} \frac{s}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_1 ,$$

utgöras dels af de genererande cirklarne, dels af ytans skärningslinier med sfärer, som gå genom ζ_2 och hafva sina medelpunkter på den räta linie, som går genom ζ_2 och är vinkelrät mot $\xi\eta$-planet.

En analog sats gäller naturligen om den transformerade loxodromiska cylinder, som till eqvation har

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{s} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = l_2 .$$

12. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår en rät cirkulär cylinder, hvars axel är

$$z = \zeta_\alpha ,$$

uti de vid elliptiska substitutionen invarianta ytorna

$$\varrho_\alpha^2 = \lambda_\alpha s .$$

Här har $\zeta_\beta (\beta \neq \alpha)$ tagits till transformationscentrum.

Dessa fjerdegradsytor kallar jag med anledning häraf *transformerade cirkulära cylindrar.*

13. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår hvarje plan genom ζ_1 uti de vid den hyperboliska substitutionen invarianta sfärerna, som till eqvation hafva

$$\sigma = \vartheta$$

14. Hvar och en af de transformerade loxodromiska cylindrarne (26) och (27) § 1 skär under konstant vinkel samtliga transformerade dubbelkoner (24) § 1.

15. Den transformerade cirkulära cylindern (32) § 1 skär under konstant vinkel samtliga transformerade dubbelkoner (24) § 1.

16. De genom ζ_1 och ζ_2 gående sfärer, som hafva sina medelpunkter i $\xi\eta$-planet, skära under konstant vinkel samtliga transformerade dubbelkoner (24) § 1.

17. Hvar och en af de transformerade loxodromiska cylindrarne (26) och (27) § 1 skär under konstant vinkel samtliga sfärer, som gå genom dubbelpunkterna och hafva sina medelpunkter uti $\xi\eta$-planet.

18. Hvar och en af de transformerade loxodromiska cylindrarne (26) och (27) § 1 skär under konstant vinkel samtliga transformerade cirkulära cylindrar (32) § 1.

19. Hvarje sfär, som går genom dubbelpunkterna och har sin medelpunkt uti $\xi\eta$-planet, skär under rät vinkel samtliga transformerade cirkulära cylindrar (32) § 1.

20. Två transformerade loxodromiska cylindrar med samma poler, som skära hvarandra en gång, — bortsedt från polerna — skära hvarandra i oändligt många punkter och i hvar och en under samma vinkel.

21. Genom hvarje punkt i rymden går en och blott en transformerad loxodromisk cylinder med gifna poler, hvilken under konstant vinkel skär de sfärer, som gå genom polerna och hafva sina medelpunkter uti $\xi\eta$-planet.

22. Genom hvarje punkt i rymden går en och blott en transformerad loxodromisk cylinder med gifna poler, hvilken under konstant vinkel skär de transformerade cirkulära cylindrarne (32) § 1.

23. Transformerade loxodromiska cylindrar med parametrarne

$$l = 0$$

skära aldrig hvarandra utom i polerna.

24. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår den loxodromiska ytan

$$\mu \operatorname{Log} \varrho - \operatorname{Log} M \cdot \varphi = p'$$

uti den invarianta ytan

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = p$$

På grund häraf kallar jag denna yta för den *loxodromiska ytan.*

25. Hvar och en af de loxodromiska ytorna

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = p$$

bildar i hvarje punkt rät vinkel med samtliga transformerade dubbelkoner, som till eqvation hafva

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 = k^2 \zeta^2$$

26. Genom den generaliserade operationen medelst reciproka radier öfvergår ytan

$$\mu \operatorname{Log} \zeta - \operatorname{Log} M \cdot \varphi_\alpha = q'_\alpha$$

uti ytorna

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\zeta}{\varrho_2^2} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = q_1$$

$$\mu \operatorname{Log} \frac{\varrho_1^2}{\zeta} - \operatorname{Log} M \cdot \sigma = q_2;$$

i den förra om $\alpha = 1$ och ζ_2 tages till transformationscentrum; i den senare om $\alpha = 2$ och ζ_1 tages till transformationscentrum.

Dessa ytor kallar jag med anledning häraf *transformerade loxodromiska konoider.*

27. Likasom den loxodromiska konoiden genereras af räta linier, hvilka gå genom en och samma räta linie, som af dem skäres under räta vinklar, så genereras den transformerade loxodromiska konoiden af cirklar, hvilka gå genom en och samma cirkel, som af dem skäres under räta vinklar. Dessa cirklar gå dessutom genom en och samma punkt.

28. Den dubbelkrökta loxodromen bildar konstant vinkel med den cirkel, som till diameter har den räta linie, som förenar dubbelpunkterna, och hvars plan är vinkelrätt mot $\xi\eta$-planet.

Stockholm, 1890. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 4.

Onsdagen den 9 April.

INNEHÅLL:

Hr S. LOVÉN sedogjorde för arbetena vid Akademiens zoologiska station Kristineberg i Bohuslän och för de undersökningar, som derstädes utförts af Docenterne C. AURIVILLIUS, D. BERGENDAL och A. WIRÉN.

Hr ROSÉN lemnade några meddelanden om utförbarheten af en gradmätning på Spetsbergen och om önskvärdheten af fortsatta förberedande rekognosceringar för detta ändamål.

Hr Frih. NORDENSKIÖLD dels omnämnde, i sammanhang med herr ROSÉNS meddelande, att tre unga vetenskapsidkare, åt hvilka den ifrågasatta rekognosceringen kunde uppdragas, instundande sommar komma att besöka Spetsbergen, och dels refererade en af Kandidat O. NORDENSKIÖLD utförd analys af mikroskopiska vätskeinneslutningar i topas.

Hr MITTAG-LEFFLER meddelade en uppsats af Docenten A. BERGER: »Om användningen af invarianter och halfinvari-

anter vid lösningen af allmänna algebraiska eqvationer af de fyra lägsta graderna»*.

Hr WITTROCK öfverlemnade en afhandling af fröken ALIDA OLBRS: »Om fruktväggens byggnad hos Labiaterna» (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Sekreteraren öfverlemnade dels en afhandling: »Några undersökningar öfver accidentel dubbelbrytning hos gelatinösa ämnen», af Filos. Licentiaten P. AF BJERKÉN (se Bihang etc.), och dels en uppsats: »Om inverkan af jodvätesyra på 1—5-nitronaftalinsulfonsyreamid», af Filos. Kandidaten A. EKBOM*.

Genom anstäldt val kallades Professorn i Statsekonomi och Statistik vid Christiania universitet Dr THORKIL HALVORSEN ASCHEHOUG till ledamot af Akademien.

Genom val utsågs hr DAHLANDER till Præses under det ingående akademiska året, hvarefter afgående Præses hr GYLDÉN nedlade præsidium med ett tal om de geometriska axiomernas beskaffenhet.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Berlin. *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd. 33(1889): H. 2. 8:o.
Buenos Aires. *Museo nacional.*
Anales. Entr. 16. 1890. Fol.
Cambridge, U. S. *Cambridge entomological club.*
Psyche. Vol. 4(1885): N:o 138—40. 4:o.
— *Museum of comparative zoology.*
Memoirs. Vol. 17: N:o 1. 1890. 4:o.
— *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annual report. 44(1889). 8:o.
Campinas, Brazil. *Estação agronomica.*
Relatorio annual. 1889. 4:o.
Frankfurt a/M. *Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd. 16: H. 1. 1890. 4:o.
Haag. *K. Nederländska regeringen.*
BOERLAGE, J. G., Handleiding tot de Kennis der Flora van Nederlandsch Indië. St. 1. Leiden 1890. 8:o.
Halifax. *Nova Scotian institute of natural science.*
Proceedings and transactions. Vol. 5: P. 1—4; 6: 1—4; 7: 1—2. 1878—88. 8:o.

(Forts. å sid. 221.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 4.
Stockholm.

Om användningen af invarianter och halfinvarianter vid lösningen af allmänna algebraiska eqvationer af de fyra lägsta graderna.

Af Alexander Berger.

[Meddeladt den 9 April 1890 genom G. Mittag-Leffler.]

Vid framställningen af metoderna att lösa allmänna eqvationer af tredje och fjärde graderna (der således koefficienten i den andra termen icke är noll) bruka läroboksförfattarne åtnöja sig med att visa, att sådana eqvationer alltid kunna algebraiskt lösas, d. v. s. att rötterna kunna uttryckas såsom algebraiska funktioner af eqvationernas koefficienter, men de visa i allmänhet icke, huru dessa koefficienter ingå i rotuttrycken. Ändamålet med denna uppsats är att uppvisa, att dessa rotuttryck äro bildade af eqvationernas invarianter och halfinvarianter. Som jag ej velat förutsätta hos läsaren några kunskaper i invariant-teorien, skall jag, efter att i § 1 hafva behandlat eqvationers transformation, i § 2 på ett fullkomligt elementärt sätt framställa det, som för det följande behöfves af den nämnda teorien. I § 3 skall jag lösa de allmänna eqvationerna af de fyra lägsta graderna, och de dervid erhållna uttrycken för rötterna skall jag i § 4 använda till bestämningen af dessa eqvationers diskriminanter.

De arbeten i eqvationsteori och nyare algebra, hvilka jag mer eller mindre begagnat vid utarbetandet af denna afhandling, äro följande:

TODHUNTER, An elementary treatise on the theory of equations.
PETERSEN, De algebraiske Ligningers Theori.
SERRET, Cours d'Algèbre supérieure.
JORDAN, Traité des substitutions et des équations algébriques.
NETTO, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra.
FIEDLER, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen.
SALMON, Lessons introductory to the modern higher Algebra.
CLEBSCH, Theorie der binären algebraischen Formen.

§ 1.

Eqvationers transformation.

Om vi med $f(x)$ beteckna en rationel hel funktion af n:te graden af en variabel x, så är $f(x)$ af formen

$$(1) \quad f(x) = (n)_0 a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + (n)_2 a_2 x^{n-2} + \ldots + (n)_{n-1} a_{n-1} x + (n)_n a_n,$$

der koefficienterna $a_0, a_1, \ldots a_n$ äro konstanter hvilka som hälst, med den inskränkning likväl, att a_0 ej är lika med noll, och der

$$(n)_0, (n)_1, (n)_2, \ldots (n)_n$$

beteckna de till exponenten n hörande binomialkoefficienterna, så att

$$(2) \quad (n)_0 = 1, \; (n)_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots . r} \quad \text{för } 1 \leqq r \leqq n.$$

Den allmänna eqvationen af n:te graden sättes då i öfverensstämmelse härmed under formen

$$(3) \qquad (n)_0 a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + \ldots + (n)_n a_n = 0,$$

och eqvationerna af de fyra lägsta graderna skrifvas med detta beteckningssätt sålunda:

$$(4) \qquad a_0 x + a_1 = 0,$$

$$(5) \qquad a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

$$(6) \qquad a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0,$$

$$(7) \qquad a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0.$$

Vi skola nu undersöka den förändring, som funktionen $f(x)$ undergår genom de två substitutionerna

$$x = \beta y + \gamma, \quad x = \frac{1}{\beta y}, \tag{8}$$

der y är en ny variabel, och der β, γ äro koefficienter, som blott äro underkastade vilkoret, att β ej är noll.

Om vi i eqv. (1) införa de af eqv. (8) bestämda värdena på x, så finna vi efter några enkla reduktioner följande teorem.

Teorem I. Genom substitutionerna

$$x = \beta y + \gamma, \quad x = \frac{1}{\beta y}$$

transformeras funktionen

$$f(x) = a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} a_{n-1} x + a_n$$

till

$$f(\beta y + \gamma) = A_0 y^n + \frac{n}{1} A_1 y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_2 y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} A_{n-1} y + A_n$$

och till

$$f\left(\frac{1}{\beta y}\right) = \frac{1}{\beta^n y^n}\left\{B_0 y^n + \frac{n}{1} B_1 y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} B_2 y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} B_{n-1} y + B_n\right\},$$

der koefficienterna $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ äro bestämda af likheterna

$$A_0 = a_0 \beta^n,$$
$$A_1 = (a_0 \gamma + a_1)\beta^{n-1},$$
$$A_2 = (a_0 \gamma^2 + 2a_1 \gamma + a_2)\beta^{n-2},$$
$$A_3 = (a_0 \gamma^3 + 3a_1 \gamma^2 + 3a_2 \gamma + a_3)\beta^{n-3},$$

. . . .

$$A_{n-1} = \left(a_0 \gamma^{n-1} + \frac{n-1}{1} a_1 \gamma^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} a_2 \gamma^{n-3} + \ldots + \frac{n-1}{1} a_{n-2} \gamma + a_{n-1}\right)\beta,$$

$$A_n = a_0 \gamma^n + \frac{n}{1} a_1 \gamma^{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} a_{n-1} \gamma + a_n,$$

och der koefficienterna $B_0, B_1, B_2, \ldots B_n$ äro bestämda af likheterna

$$B_0 = a_n \beta^n, \; B_1 = a_{n-1} \beta^{n-1}, \; B_2 = a_{n-2} \beta^{n-2}, \ldots B_{n-1} = a_1 \beta, \; B_n = a_0.$$

Af detta teorem följer, att eqvationen

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

genom de två substitutionerna (8) transformeras till nya eqvationer af n:te graden, nämligen

$$A_0 y^n + \frac{n}{1} A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

och

$$B_0 y^n + \frac{n}{1} B_1 y^{n-1} + \ldots + B_n = 0.$$

Koefficienterna i dessa eqvationer äro beroende af den gifna eqvationens koefficienter $a_0, a_1, \ldots a_n$ samt af substitutionskoefficienterna β, γ.

§ 2.

Eqvationers invarianter och halfinvarianter.

Med bibehållande af samma beteckningar, som användts i den föregående paragrafen, uppställa vi följande definition.

Definition. Om

$$f(x) = a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} a_{n-1} x + a_n$$

är en rationel hel funktion af n:te graden, som genom substitutionerna

$$x = \beta y + \gamma, \quad x = \frac{1}{\beta y}$$

transformeras till

$$f(\beta y + \gamma) = A_0 y^n + \frac{n}{1} A_1 y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_2 y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} A_{n-1} y + A_n$$

och

$$f\left(\frac{1}{\beta y}\right) = \frac{1}{\beta^n y^n} \left\{ B_0 y^n + \frac{n}{1} B_1 y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} B_2 y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} B_{n-1} y + B_n \right\},$$

och om det finnes en rationel hel homogen funktion

$$H(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

af koefficienterna $a_0, a_1, \ldots a_n$, som uppfyller vilkoren

$$H(A_0, A_1, A_2, \ldots A_n) = \beta^w H(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

och

$$H(B_0, B_1, B_2, \ldots B_n) = \beta^w H(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

der w är något helt tal, så säges $H(a_0, a_1, \ldots a_n)$ vara en invariant till funktionen $f(x)$ eller till eqvationen $f(x) = 0$; är blott det första vilkoret uppfyldt, så säges $H(a_0, a_1, \ldots a_n)$ vara en halfinvariant till funktionen $f(x)$ eller till eqvationen $f(x) = 0$.

I denna definition har jag uttryckt invariantegenskapen medelst två likheter, under det att det i den nyare algebran är vanligt att uttrycka densamma medelst en enda likhet. Skälen, hvarför jag vidtagit denna ändring, äro för det första, att den gifna funktionen $f(x)$ här betraktas som en funktion af blott en variabel och icke som en homogen funktion af två oberoende variabler, såsom brukligt är i den nyare algebran, och för det andra, att genom den nu uppstälda definitionen den för invarianter och halfinvarianter gemensamma egenskapen uttryckes medelst en och samma likhet.

Jag skall nu uppvisa existensen af invarianter och halfinvarianter till eqvationer af andra, tredje och fjärde graden.

För eqvationen af andra graden

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0 \tag{9}$$

erhålles enligt teorem I

$$A_0 = a_0\beta^2,\ A_1 = (a_0\gamma + a_1)\beta,\ A_2 = a_0\gamma^2 + 2a_1\gamma + a_2 \tag{10}$$

samt

$$B_0 = a_2\beta^2,\ B_1 = a_1\beta,\ B_2 = a_0, \tag{11}$$

och af likheterna (10) och (11) härledas lätt formlerna

$$A_0A_2 - A_1^2 = \beta^2(a_0a_2 - a_1^2), \tag{12}$$

$$B_0B_2 - B_1^2 = \beta^2(a_0a_2 - a_1^2), \tag{13}$$

hvaraf följer, att uttrycket

$$a_0a_2 - a_1^2,$$

hvilket vi skola beteckna med $I_{2,2}$, är en invariant till eqv. (9). Vi uppställa nu följande teorem.

Teorem II. Eqvationen af andra graden

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0$$

har invarianten

$$I_{2,2} = a_0a_2 - a_1^2.$$

Vi skola i det följande i allmänhet beteckna invarianter med $I_{n,g}$ der n och g äro hela tal, valda så, att n är den eqvations gradtal, till hvilken $I_{n,g}$ är invariant, och g är invariantens gradtal, då invarianten betraktas som en funktion af koefficienterna $a_0, a_1, \ldots a_n$. Likaledes skola vi beteckna halfinvarianter med $I'_{n,g}$ och vid denna beteckning låta talen n och g ha samma betydelse som vid invarianter.

För eqvationen af tredje graden

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{14}$$

gälla enligt teorem I formlerna

$$A_0 = a_0\beta^3,\ A_1 = (a_0\gamma + a_1)\beta^2,\ A_2 = (a_0\gamma^2 + 2a_1\gamma + a_2)\beta, \tag{15}$$
$$A_3 = a_0\gamma^3 + 3a_1\gamma^2 + 3a_2\gamma + a_3$$

samt

$$B_0 = a_3\beta^3,\ B_1 = a_2\beta^2,\ B_2 = a_1\beta,\ B_3 = a_0. \tag{16}$$

Af likheterna (15) följer

$$A_0A_2 - A_1^2 = \beta^4\left(a_0a_2 - a_1^2\right), \tag{17}$$

och således är det första invariantvilkoret uppfyldt för funktionen $a_0a_2 - a_1^2$. Denna funktion är, som man lätt finner, blott en halfinvariant, ty det andra invariantvilkoret är icke uppfyldt. Af detta vilkor följer en egenskap hos alla invarianter, af hvilken man ofta kan omedelbart sluta, att ett uppgifvet uttryck *icke* är en invariant. Sätta vi nämligen i det andra invariantvilkoret $\beta = 1$, så erhålles likheten

$$H(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0) = H(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n),$$

hvilken således måste vara uppfyld, om uttrycket $H(a_0, a_1, \ldots a_n)$ är en invariant. Emedan detta vilkor vid eqvationer af tredje graden icke är uppfyldt för uttrycket $a_0a_2 - a_1^2$, så är detta uttryck blott en halfinvariant till eqvationen af tredje graden, fastän det är en invariant till eqvationen af andra graden.

Vi ha alltså halfinvarianten

(18) $$I'_{3,2} = a_0 a_2 - a_1^2.$$

Af eqv. (15) och (17) härledas lätt relationerna

(19) $$A_0^2 A_3 - A_1^3 = 3a_0 \beta^6 \gamma\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) + \beta^6\left(a_0^2 a_3 - a_1^3\right)$$

och

(20) $$-3A_1\left(A_0 A_2 - A_1^2\right) = -3a_0\beta^6\gamma\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) - 3a_1\beta^6\left(a_0 a_2 - a_1^2\right),$$

och genom addition af eqv. (19) och (20) finna vi

(21) $$A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3 = \beta^6\left(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3\right),$$

hvarmed vi ha funnit en ny halfinvariant

(22) $$I'_{3,3} = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$$

till eqvationen af tredje graden.

Af likheterna (17) och (21) följer

(23) $$4\left(A_0 A_2 - A_1^2\right)^3 + \left(A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3\right)^2 = \beta^{12}\left\{4\left(a_0 a_2 - a_1^2\right)^3 + \left(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3\right)^2\right\}.$$

Genom enkla reduktioner och med iakttagande af relationen

(24) $$A_0 = a_0 \beta^3$$

erhålles af eqv. (23) formeln

(25) $$A_0^2 A_3^2 + 4A_0 A_2^3 - 6A_0 A_1 A_2 A_3 + 4A_1^3 A_3 - 3A_1^2 A_2^2 = \beta^6\left\{a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2\right\},$$

och på samma gång erhålla vi äfven likheten

(26) $$a_0^2\left\{a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2\right\} = 4I'^3_{3,2} + I'^2_{3,3}.$$

Af formlerna (16) följer

(27) $$B_0^2 B_3^2 + 4B_0 B_2^3 - 6B_0 B_1 B_2 B_3 + 4B_1^3 B_3 - 3B_1^2 B_2^2 = \beta^6\left\{a_0^2 a_3^2 + 4a_1^3 a_3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 3a_1^2 a_2^2\right\},$$

och af eqv. (25) och (27) kunna vi sluta, att uttrycket

(28) $$I_{3,4} = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2$$

är en invariant till eqv. (14).

Teorem III. Eqvationen af tredje graden.

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

har halfinvarianterna

$$I'_{3,2} = a_0 a_2 - a_1^2 ,$$

$$I'_{3,3} = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$$

samt invarianten

$$I_{3,4} = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 ,$$

och mellan dessa existerar sambandet

$$a_0^2 I_{3,4} = 4I'^3_{3,2} + I'^2_{3,3} .$$

För eqvationen af fjärde graden

$$(29) \qquad a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

gälla enligt teorem I formlerna

$$(30) \quad A_0 = a_0\beta^4, \; A_1 = (a_0\gamma + a_1)\beta^3, \; A_2 = (a_0\gamma^2 + 2a_1\gamma + a_2)\beta^2,$$
$$A_3 = (a_0\gamma^3 + 3a_1\gamma^2 + 3a_2\gamma + a_3)\beta,$$
$$A_4 = a_0\gamma^4 + 4a_1\gamma^3 + 6a_2\gamma^2 + 4a_3\gamma + a_4$$

samt

$$(31) \quad B_0 = a_4\beta^4, \; B_1 = a_3\beta^3, \; B_2 = a_2\beta^2, \; B_3 = a_1\beta, \; B_4 = a_0 .$$

Af eqv. (30) följer

$$(32) \qquad A_0 A_2 - A_1^2 = \beta^6\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) ,$$

hvarmed vi för eqvationen af fjärde graden hafva erhållit halfinvarianten

$$(33) \qquad I'_{4,2} = a_0 a_2 - a_1^2 .$$

Af eqv. (30) och (32 följer

$$(34) \qquad A_0^2 A_3 - A_1^3 = 3a_0\beta^9\gamma\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) + \beta^9\left(a_0^2 a_3 - a_1^3\right)$$

och

$$(35) \qquad -3A_1\left(A_0 A_2 - A_1^2\right) = -3a_0\beta^9\gamma\left(a_0 a_2 - a_1^2\right)$$
$$-3a_1\beta^9\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) ,$$

och genom addition af eqv. (34) och (35) finna vi

$$(36) \quad A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3 = \beta^9\left(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3\right) ,$$

hvarmed vi funnit, att eqv. (29) äfven har halfinvarianten

$$(37) \qquad I'_{4,3} = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 .$$

Af eqv. (30), (32), (36) härledas följande tre formler

$$(38)\quad A_0^3 A_4 - A_1^4 = 6\beta^{12}\gamma^2 a_0^2\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) + 4\beta^{12}\gamma a_0\left(a_0^2 a_3 - a_1^3\right) + \beta^{12}\left(a_0^3 a_4 - a_1^4\right),$$

$$(39)\quad -4A_1\left(A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3\right)$$
$$= 4\beta^{12}\gamma a_0\left(-a_0^2 a_3 + 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3\right) - 4\beta^{12} a_1\left(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3\right),$$

$$(40)\quad -6A_1^2\left(A_0 A_2 - A_1^2\right) = -6\beta^{12}\gamma^2 a_0^2\left(a_0 a_2 - a_1^2\right)$$
$$+ 4\beta^{12}\gamma a_0\left(-3a_0 a_1 a_2 + 3a_1^3\right) - 6\beta^{12} a_1^2\left(a_0 a_2 - a_1^2\right),$$

genom hvilkas addition vi erhålla likheten

$$(41)\quad A_0^3 A_4 - 4A_0^2 A_1 A_3 + 6A_0 A_1^2 A_2 - 3A_1^4 = \beta^{12}\left(a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4\right),$$

och alltså är uttrycket

$$(42)\quad I'_{4,4} = a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4$$

en halfinvariant till eqv. (29).

Af likheterna (32) och (41) följer

$$(43)\quad 3\left(A_0 A_2 - A_1^2\right)^2 + A_0^3 A_4 - 4A_0^2 A_1 A_3 + 6A_0 A_1^2 A_2 - 3A_1^4$$
$$= \beta^{12}\left\{3\left(a_0 a_2 - a_1^2\right)^2 + a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4\right\}.$$

Efter några enkla reduktioner och med iakttagande af relationen

$$(44)\quad A_0 = a_0\beta^4$$

erhålles af eqv. (43) likheten

$$(45)\quad A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2 = \beta^4\left(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2\right),$$

och på samma gång finna vi äfven relationen

$$(46)\quad a_0^2\left(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2\right) = 3I'^2_{4,2} + I'_{4,4}.$$

Af formlerna (31) följer

$$(47)\quad B_0 B_4 - 4B_1 B_3 + 3B_2^2 = \beta^4\left(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2\right),$$

och af likheterna (45) och (47) kunna vi sluta, att uttrycket

$$(48)\quad I_{4,2} = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

är en invariant till eqv. (29).

Af eqv. (32), (36), (41) erhålles

$$(49)\quad \left(A_0 A_2 - A_1^2\right)\left(A_0^3 A_4 - 4A_0^2 A_1 A_3 + 6A_0 A_1^2 A_2 - 3A_1^4\right)$$
$$- \left(A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3\right)^2 - \left(A_0 A_2 - A_1^2\right)^3$$

$$= \beta^{18}\Big\{\Big(a_0a_2 - a_1^2\Big)\Big(a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4\Big) - \Big(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3\Big)^2 - \Big(a_0a_2 - a_1^2\Big)^3\Big\}.$$

Om vi här verkställa reduktioner samt använda eqv. (44), så finna vi

$$(50) \qquad A_0A_2A_4 + 2A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4 - A_2^3 = \beta^6\Big(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\Big),$$

hvarjämte vi äfven erhålla relationen

$$(51) \qquad a_0^3\Big(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\Big) = I'_{4,2}\cdot I'_{4,4} - I'^2_{4,3} - I'^3_{4,2}.$$

Af eqv. (31) följer

$$(52) \qquad B_0B_2B_4 + 2B_1B_2B_3 - B_0B_3^2 - B_1^2B_4 - B_2^3 = \beta^6\Big(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\Big),$$

och enligt eqv. (50) och (52) är alltså uttrycket

$$(53) \qquad I_{4,3} = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3$$

en invariant till eqv. (29).

Härmed är följande teorem bevisadt:

Teorem IV. Eqvationen af fjärde graden

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

har halfinvarianterna

$$I'_{4,2} = a_0a_2 - a_1^2,$$

$$I'_{4,3} = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3,$$

$$I'_{4,4} = a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4$$

samt invarianterna

$$I_{4,2} = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$I_{4,3} = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3,$$

och mellan dessa existera relationerna

$$a_0^2I_{4,2} = 3I'^2_{4,2} + I'_{4,4},$$

$$a_0^3I_{4,3} = I'_{4,2}\cdot I'_{4,4} - I'^2_{4,3} - I'^3_{4,2}.$$

§ 3.

Eqvationers algebraiska lösning.

Vid lösningen af de fyra eqvationerna (4), (5), (6), (7) transformera vi först hvar och en af dessa till en ny eqvation af samma gradtal, men i hvilken koefficienten för den näst högsta digniteten af den obekanta är noll. Man finner lätt, att man härför kan för alla fyra eqvationerna använda en och samma substitution

$$x = \frac{y - a_1}{a_0}, \tag{54}$$

der y betecknar en ny obekant. Använder man de i den föregående paragrafen införda beteckningarne för invarianter och halfinvarianter, så erhålles lätt följande teorem.

Teorem V. Eqvationerna

$$a_0x + a_1 = 0,$$
$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0,$$
$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$
$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

transformeras medelst en och samma substitution

$$x = \frac{y - a_1}{a_0}$$

i ordning till

$$y = 0,$$
$$y^2 + I_{2,2} = 0,$$
$$y^3 + 3I'_{3,2}y + I'_{3,3} = 0,$$
$$y^4 + 6I'_{4,2}y^2 + 4I'_{4,3}y + I'_{4,4} = 0.$$

Vi öfvergå nu till lösningen af de allmänna eqvationerna af de fyra lägsta graderna.

Eqvationen af första graden

$$a_0x + a_1 = 0 \tag{55}$$

transformeras enligt teorem V genom substitutionen

$$x = \frac{y - a_1}{a_0} \tag{56}$$

till

$$y = 0. \tag{57}$$

Införes detta värde på y i eqv. (56), så erhålles

$$x = -\frac{a_1}{a_0}. \tag{58}$$

Teorem VI. Eqvationen af första graden

$$a_0x + a_1 = 0$$

har en rot, och denna erhålles af formeln

$$x = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Eqvationen af andra graden

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \tag{59}$$

transformeras enligt teorem V genom substitutionen

$$x = \frac{y - a_1}{a_0} \tag{60}$$

till

$$y^2 + I_{2,2} = 0. \tag{61}$$

Denna eqvations två rötter erhållas tydligen af formeln

$$y = \sqrt{-I_{2,2}}, \tag{62}$$

om den här förekommande qvadratroten erhåller sina två värden. Af eqv. (60) och (62) följer nu

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\sqrt{-I_{2,2}}. \tag{63}$$

Vi sätta detta uttryck för rötterna x under formen

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\sqrt{-u_1}, \tag{64}$$

der u_1 är roten till eqvationen af första graden

$$u - I_{2,2} = 0. \tag{65}$$

Teorem VII. Eqvationen af andra graden

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0$$

har två rötter, hvilka erhållas af formeln

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\sqrt{-u_1},$$

der man har att iakttaga, att u_1 är roten till eqvationen af första graden

$$u - I_{2,2} = 0,$$

samt att man tilldelar qvadratroten dess två värden.

Om $\sqrt{-u_1}$ betyder en bestämd qvadratrot, och om den gifna eqvationens två rötter betecknas med x_1 och x_2, så är

$$(66)\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{a_0}\sqrt{-u_1}\,, \\ x_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} - \dfrac{1}{a_0}\sqrt{-u_1}\,. \end{cases}$$

För att lösa eqvationen af tredje graden

$$(67)\qquad a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

hvilken enligt teorem V medelst substitutionen

$$(68)\qquad x = \frac{y - a_1}{a_0}$$

transformeras till

$$(69)\qquad y^3 + 3I'_{3,2}y + I'_{3,3} = 0,$$

sätta vi y under formen

$$(70)\qquad y = \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_1} + \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_2}\,,$$

der u_1 och u_2 äro två nya obekanta, som skola bestämmas så, att det af likheten (70) gifna värdet på y satisfierar eqv. (69). Genom att upphöja båda membra af eqv. (70) till tredje digniteten erhålla vi

$$(71)\qquad y^3 = -I'_{3,3} - a_0(u_1 + u_2) + 3\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_1}\,\cdot$$
$$\cdot\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_2}\left(\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_1} + \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_2}\right).$$

Om vi nu pålägga qvantiteterna u_1 och u_2 vilkoret

$$(72)\qquad u_1 + u_2 = 0$$

samt använda eqv. (70), så erhålles af eqv. (71)

$$(73)\qquad y^3 - 3\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_1}\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_2}\cdot y + I'_{3,3} = 0,$$

hvaraf synes, att det af likheten (70) gifna uttrycket för y satisfierar eqv. (69), blott man förutom vilkoret (72) bestämmer u_1 och u_2 så, att dessa qvantiteter satisfiera likheten

$$(74) \qquad \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_1} \cdot \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_2} = - I'_{3,2}.$$

Af eqv. (74) erhålles genom upphöjning till kub

$$(75) \qquad \frac{I'^2_{3,3}}{4} + \frac{a_0 I'_{3,3}}{2}(u_1 + u_2) + a_0^2 u_1 u_2 = - I'^3_{3,2};$$

men då man ersätter eqv. (74) med eqv. (75), är det nödvändigt att tillägga det vilkoret, att produkten af de två kubikrötterna enligt eqv. (74) skall vara lika med $-I'_{3,2}$.

Af eqv. (72) och (75) följer

$$(76) \qquad 4a_0^2 u_1 u_2 + 4I'^3_{3,2} + I'^2_{3,3} = 0$$

och således enligt teorem III

$$(77) \qquad u_1 u_2 = -\frac{I_{3,4}}{4}.$$

Af eqv. (72) och (77) följer, att u_1 och u_2 äro rötterna till eqvationen af andra graden

$$(78) \qquad 4u^2 - I_{3,4} = 0.$$

Af eqv. (68) och (70) erhålles

$$(79) \quad x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\left\{\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_1} + \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_2}\right\},$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem VIII. Eqvationen af tredje graden

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

har tre rötter, hvilka erhållas af formeln

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\left\{\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_1} + \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_2}\right\},$$

der man har att iakttaga, att u_1 och u_2 äro rötterna till eqvationen af andra graden

$$4u^2 - I_{3,4} = 0,$$

samt att man tilldelar de två kubikrötterna sådana värden, som äro förenliga med vilkoret

$$\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_1} \cdot \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0 u_2} = - I'_{3,2}.$$

Om man med

$$\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_1}\,,\quad \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_2}$$

betecknar två bestämda kubikrötter, som uppfylla det nämnda vilkoret, och om eqvationens (67) tre rötter betecknas med x_1, x_2, x_3, och om vidare γ och γ^2 betyda de imaginära kubikrötterna ur enheten, så att

$$(80)\qquad \gamma = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

så är

$$(81)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{1}{a_0}\left\{\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_1}+\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_2}\right\}, \\ x_2 = -\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{1}{a_0}\left\{\gamma\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_1}+\gamma^2\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_2}\right\}, \\ x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{1}{a_0}\left\{\gamma^2\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_1}+\gamma\sqrt[3]{-\dfrac{I'_{3,3}}{2}-a_0u_2}\right\}. \end{cases}$$

Jag öfvergår nu till lösningen af eqvationen af fjärde graden

$$(82)\qquad a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0;$$

denna eqvation transformeras enligt teorem V medelst substitutionen

$$(83)\qquad x=\frac{y-a_1}{a_0}$$

till

$$(84)\qquad y^4+6I'_{4,2}y^2+4I'_{4,3}y+I'_{4,4}=0,$$

och för dennas lösning sätta vi y under formen

$$(85)\quad y=\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_1}+\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_2}+\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_3},$$

der u_1, u_2, u_3 äro tre nya obekanta, hvilka skola bestämmas så, att detta värde på y satisfierar eqv. (84). Genom qvadrering erhålles af eqv. (85)

$$(86)\quad y^2+3I'_{4,2}+a_0(u_1+u_2+u_3)=2\left\{\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_1}\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_2}+\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_1}\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_3}+\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_2}\sqrt{-I'_{4,2}-a_0u_3}\right\}.$$

Om vi pålägga qvantiteterna u_1, u_2, u_3 vilkoret

$$(87)\qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

samt qvadrera ännu en gång, så finna vi

$$(88)\quad (y^2 + 3I'_{4,2})^2 = 4(I'_{4,2} + a_0u_1)(I'_{4,2} + a_0u_2) + 4(I'_{4,2} + a_0u_1)(I'_{4,2} + a_0u_3) + 4(I'_{4,2} + a_0u_2)(I'_{4,2} + a_0u_3)$$
$$+ 8\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1}\cdot\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2}\cdot\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\left(\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right).$$

Pålägga vi nu qvantiteterna u_1, u_2, u_3 äfven vilkoret

$$(89)\qquad 4a_0^2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + 3I'^2_{4,2} + I'_{4,4} = 0$$

eller enligt teorem IV

$$(90)\qquad u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -\frac{I_{4,2}}{4},$$

samt använda eqv. (85), (87), (89) på eqv. (88), så erhålles

$$(91)\quad y^4 + 6I'_{4,2}y^2 - 8\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\cdot y + I'_{4,4} = 0,$$

hvaraf framgår, att det af eqv. (85) gifna värdet på y satisfierar eqv. (84), blott man förutom vilkoren (87) och (90) bestämmer u_1, u_2, u_3 så, att

$$(92)\quad \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3} = -\frac{I'_{4,3}}{2}.$$

Af eqv. (92) erhålles efter qvadrering

$$(93)\quad I'^3_{4,2} + a_0(u_1 + u_2 + u_3)I'^2_{4,2} + a_0^2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3)I'_{4,2} + a_0^3u_1u_2u_3 = -\frac{I'^2_{4,3}}{4},$$

hvarvid vi anmärka, att då man ersätter eqv. (92) med eqv. (93), det är nödvändigt att tillägga det vilkoret, att produkten af de tre qvadratrötterna enligt eqv. (92) skall vara lika med $-\frac{I'_{4,3}}{2}$.

Af eqv. (87), (89), (93) erhålles

$$(94)\qquad 4a_0^3u_1u_2u_3 = I'_{4,2}\cdot I'_{4,4} - I'^2_{4,3} - I'^3_{4,2}$$

och således enligt teorem IV

$$(95)\qquad u_1u_2u_3 = \frac{I_{4,3}}{4}.$$

Af eqv. (87), (90), (95) följer, att qvantiteterna u_1, u_2, u_3 äro de tre rötterna till eqvationen

$$4u^3 - I_{4,2}u - I_{4,3} = 0. \tag{96}$$

Af eqv. (83) och (85) följer nu

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\left\{\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\}, \tag{97}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem IX. Eqvationen af fjärde graden

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

har fyra rötter, hvilka erhållas af formeln

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\left\{\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\},$$

der man har att iakttaga, att u_1, u_2, u_3 äro rötterna till eqvationen af tredje graden

$$4u^3 - I_{4,2}u - I_{4,3} = 0,$$

samt att man tilldelar de tre qvadratrötterna sådana värden, som äro förenliga med vilkoret

$$\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1}\,\sqrt{-I'_{4.2} - a_0u_2}\,\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3} = -\frac{I'_{4,3}}{2}.$$

Om man med

$$\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1}, \quad \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2}, \quad \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}$$

förstår tre bestämda qvadratrötter, som uppfylla det nämnda vilkoret, och om eqvationens (82) fyra rötter betecknas med x_1, x_2, x_3, x_4, så är

$$(98)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{a_0}\left\{\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\}, \\ x_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{a_0}\left\{\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} - \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} - \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\}, \\ x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{a_0}\left\{-\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} - \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\}, \\ x_4 = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{a_0}\left\{-\sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_1} - \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_2} + \sqrt{-I'_{4,2} - a_0u_3}\right\}. \end{cases}$$

§ 4.

Eqvationers diskriminanter.

Om man med $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ betecknar rötterna till eqvationen af n:te graden

(99) $(n)_0 a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + \ldots + (n)_{n-1} a_{n-1} x + (n)_n a_n = 0,$

så är uttrycket

$$\prod_{\substack{\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots n \\ \lambda \gtrless \mu}} (x_\lambda - x_\mu)$$

en symetrisk rationel hel funktion af eqvationens (99) rötter. Emedan vidare den högsta exponent, hvarmed x_1 (eller hvilken annan rot som hälst) är försedd i denna produkt, är lika med $2(n-1)$, så kan densamma enligt de symetriska funktionernas teori uttryckas i eqvationens (99) koefficienter $a_0, a_1, \ldots a_n$ medelst en likhet af formen

$$(100) \qquad \prod_{\substack{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ \lambda \gtrless \mu}} (x_\lambda - x_\mu) = \frac{\Delta_n(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)}{a_0^{2(n-1)}},$$

der $\Delta(a_0, a_1, \ldots a_n)$ är en rationel hel homogen funktion af $a_0, a_1, \ldots a_n$ af gradtalet $2(n-1)$. Vi uppställa nu följande definition:

Definition. Med diskriminanten till eqvationen af n:te graden

$$(n)_0 a_0 x^n + (n)_1 a_1 x^{n-1} + \ldots + (n)_{n-1} a_{n-1} x + (n)_n a_n = 0,$$

hvars rötter betecknas med $x_1, x_2, \ldots x_n$, förstås det af likheten

$$\Delta_n(a_0, a_1, \ldots a_n) = a_0^{2(n-1)} \prod_{\substack{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ \lambda \gtrless \mu}} (x_\lambda - x_\mu)$$

definierade uttrycket $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots a_n)$, betraktadt som en funktion af eqvationens koefficienter $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Emedan faktorernas antal i den här förekommande produkten är lika med $n(n-1)$, och emedan mot hvarje faktor $x_\lambda - x_\mu$ svarar en annan faktor $x_\mu - x_\lambda = -(x_\lambda - x_\mu)$, så kan den ofvanstående likheten sättas under formen

(101) $$\Delta_n(a_0, a_1, \ldots a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2(n-1)} \prod_{\substack{\lambda,\mu = 1,2,\ldots n \\ \lambda < \mu}} (x_\lambda - x_\mu)^2 .$$

I det följande skola vi för korthetens skull i stället för uttrycket $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots a_n)$ använda beteckningen Δ_n. Vid beräkningen af diskriminanterna till eqvationerna af de fyra lägsta graderna skola vi begagna oss af de i den föregående paragrafen härledda uttrycken för deras rötter.

Eqvationen af första graden, som har blott en rot, har naturligtvis ingen diskriminant, ty i diskriminantens definition förutsättes existensen af minst två rötter.

För eqvationen af andra graden

(102) $$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

erhålles enligt formeln (101), alldenstund $n = 2$,

(103) $$\Delta_2 = - a_0^2 (x_1 - x_2)^2 ;$$

men enligt eqv. (66) är

(104) $$x_1 - x_2 = \frac{2}{a_0} \sqrt{-u_1} ,$$

der u_1 är roten till eqvationen

(105) $$u - I_{2,2} = 0 ,$$

d. v. s.

(106) $$u_1 = I_{2,2} .$$

Af eqv. (104) erhålles

(107) $$u_1 = - \frac{a_0^2}{4} (x_1 - x_2)^2 ,$$

och således är enligt eqv. (103)

(108) $$\Delta_2 = 4u_1$$

och enligt eqv. (106)

(109) $$\Delta_2 = 4I_{2,2}$$

eller enligt teorem II

(110) $$\Delta_2 = 4\left(a_0 a_2 - a_1^2\right) .$$

Teorem X. För eqvationen af andra graden

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

gälla formlerna

$$u_1 = -\frac{a_0^2}{4}(x_1 - x_2)^2,$$

$$\Delta_2 = -a_0^2(x_1 - x_2)^2,$$

$$\Delta_2 = 4u_1,$$

$$\Delta_2 = 4I_{2,2},$$

$$\Delta_2 = 4\left(a_0a_2 - a_1^2\right).$$

För eqvationen af tredje graden

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \tag{111}$$

ha vi att i eqv. (101) sätta $n = 3$, och vi erhålla då

$$\Delta_3 = -a_0^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2. \tag{112}$$

Af eqv. (81) följer

$$x_1 + \gamma^2x_2 + \gamma x_3 = \frac{3}{a_0}\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_1} \tag{113}$$

och

$$x_1 + \gamma x_2 + \gamma^2x_3 = \frac{3}{a_0}\sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - a_0u_2}, \tag{114}$$

der u_1 och u_2 äro rötterna till eqvationen

$$4u^2 - I_{3,4} = 0. \tag{115}$$

Af eqv. (113) och (114) erhålles

$$(x_1 + \gamma x_2 + \gamma^2x_3)^3 - (x_1 + \gamma^2x_2 + \gamma x_3)^3 = \frac{27}{a_0^2}(u_1 - u_2), \tag{116}$$

och efter reduktioner i venstra membrum af denna likhet finner man

$$u_1 - u_2 = \frac{a_0^2 i}{3\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3). \tag{117}$$

Emedan u_1 och u_2 äro rötterna till eqv. (115), så är

$$u_1 + u_2 = 0, \quad u_1u_2 = -\frac{I_{3,4}}{4}, \tag{118}$$

och af eqv. (117), (118) följer alltså

$$u_1 = \frac{a_0^2 i}{6\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \tag{119}$$

och

$$(120)\qquad u_2 = -\frac{a_0^2 i}{6\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Af eqv. (112) och (117) erhålla vi

$$(121)\qquad \Delta_3 = 27(u_1 - u_2)^2$$

och således enligt formlerna (118)

$$(122)\qquad \Delta_3 = 27 I_{3,4}$$

eller enligt teorem III

$$(123)\qquad \Delta_3 = 27\left(a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2\right).$$

Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem XI. För eqvationen af tredje graden

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

gälla formlerna

$$u_1 = \frac{a_0^2 i}{6\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),$$

$$u_2 = -\frac{a_0^2 i}{6\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),$$

$$\Delta_3 = -a_0^4 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

$$\Delta_3 = 27(u_1 - u_2)^2,$$

$$\Delta_3 = 27 I_{3,4},$$

$$\Delta_3 = 27\left(a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2\right).$$

Vi öfvergå nu till beräkningen af diskriminanten till eqvationen af fjärde graden

$$(124)\qquad a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

och sätta för den skull $n = 4$ i formeln (101), då vi erhålla

$$(125)\qquad \Delta_4 = a_0^6 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2.$$

Af eqv. (98) följer

$$(126)\qquad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \frac{4}{a_0}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0 u_1},$$

$$(127)\qquad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \frac{4}{a_0}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0 u_2},$$

$$(128)\qquad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \frac{4}{a_0}\sqrt{-I'_{4,2} - a_0 u_3},$$

der u_1, u_2, u_3 äro eqvationens

$$(129) \qquad 4u^3 - I_{4,2}u - I_{4,3} = 0$$

tre rötter. Af eqv. (126), (127), (128) erhålles

$$(130) \qquad (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = -\frac{16}{a_0}(u_2 - u_3),$$

$$(131) \qquad (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = -\frac{16}{a_0}(u_3 - u_1),$$

$$(132) \qquad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 = -\frac{16}{a_0}(u_1 - u_2)$$

eller

$$(133) \qquad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = -\frac{4}{a_0}(u_2 - u_3),$$

$$(134) \qquad (x_1 - x_3)(x_4 - x_2) = -\frac{4}{a_0}(u_3 - u_1),$$

$$(135) \qquad (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = -\frac{4}{a_0}(u_1 - u_2).$$

Om vi subtrahera dessa tre likheter från hvarandra två och två samt iakttaga, att enligt eqv. (129) summan af de tre qvantiteterna u_1, u_2, u_3 är noll, samt att

$$(136) \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{6a_2}{a_0},$$

alldenstund x_1, x_2, x_3, x_4 äro eqvationens (124) rötter, så erhållas följande tre formler

$$(137) \qquad u_1 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_2 + x_3x_4)}{4},$$

$$(138) \qquad u_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_3 + x_2x_4)}{4},$$

$$(139) \qquad u_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_4 + x_2x_3)}{4}.$$

Om vi på formeln (125) använda eqv. (133), (134), (135), så erhålles

$$(140) \qquad \Delta_4 = 4096(u_1 - u_2)^2(u_1 - u_3)^2(u_2 - u_3)^2.$$

Emedan u_1, u_2, u_3 äro eqvationens (129) tre rötter, så är

$$(141) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

$$(142) \qquad u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -\frac{I_{4,2}}{4},$$

(143) $$u_1 u_2 u_3 = \frac{I_{4,3}}{4},$$

och om vi qvadrera dessa tre likheter samt kombinera dem med hvarandra, så finna vi

(144) $$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{I_{4,2}}{2},$$

(145) $$u_1^2 u_2^2 + u_1^2 u_3^2 + u_2^2 u_3^2 = \frac{I_{4,2}^2}{16},$$

(146) $$u_1^2 u_2^2 u_3^2 = \frac{I_{4,3}^2}{16}.$$

Af eqv. (141) och (142) erhållas lätt likhéterna

(147) $$-4(u_1 - u_2)(u_1 - u_3) = I_{4,2} - 12u_1^2,$$

(148) $$-4(u_2 - u_1)(u_2 - u_3) = I_{4,2} - 12u_2^2,$$

(149) $$-4(u_3 - u_1)(u_3 - u_2) = I_{4,2} - 12u_3^2,$$

och om vi på eqv. (140) använda dessa tre likheter, så finna vi

(150) $$\Delta_4 = 64\left(I_{4,2} - 12u_1^2\right)\left(I_{4,2} - 12u_2^2\right)\left(I_{4,2} - 12u_3^2\right),$$

och om vi multiplicera tillsammans faktorerna i högra membrum samt använda eqv. (144), (145), (146), så erhålles

(151) $$\Delta_4 = 256\left(I_{4,2}^3 - 27I_{4,3}^2\right)$$

eller enligt teorem IV

(152) $$\Delta_4 = 256\left\{\left(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2\right)^3 - 27\left(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\right)^2\right\}.$$

Vi sammanföra nu de för eqvationen af fjärde graden bevisade formlerna i följande teorem.

Teorem XII. För eqvationen af fjärde graden

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

gälla formlerna

$$u_1 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_2 + x_3x_4)}{4},$$

$$u_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_3 + x_2x_4)}{4},$$

$$u_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0(x_1x_4 + x_2x_3)}{4},$$

$$\Delta_4 = a_0^6(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2,$$

$$\Delta_4 = 4096(u_1 - u_2)^2(u_1 - u_3)^2(u_2 - u_3)^2,$$

$$\Delta_4 = 256\left(I_{4,2}^3 - 27I_{4,3}^2\right),$$

$$\Delta_4 = 256\left\{\left(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2\right)^3 - 27\left(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\right)^2\right\}.$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 4.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

179. Om inverkan af jodvätesyra på 1—5-Nitronaftalinsulfonsyreamid.

Af ALFR. EKBOM.

[Meddeladt den 9 April 1890 genom P. T. CLEVE.]

För närvarande känner man konstitutionen å sex af fjorton teoretiskt möjliga mononitronaftalinmonosulfonsyror. Alla dessa sex ha nitrogruppen i α-ställning. Prof. CLEVE, som framstält och karaktäriserat dem, har äfven undersökt jodvätesyras inverkan på ν-(1—3)[1], δ-(1—7)[2] och 1—4[3])-nitronaftalinsulfonsyreamid och har därvid funnit, att nitrogruppen reduceras, hvarigenom amidonaftalinsulfonsyreamider erhållas.

Om nämnda syras inverkan på peri-(1—8)[4], β-(1—6)[5] och α (1—5)[6])-nitrosulfonsyreamid är ännu ej något kändt, hvarför jag på Prof. CLEVES uppmaning till en början utfört nedanstående undersökning öfver α-syran.

Innan jag går in på en närmare redogörelse för de föreningar jag lyckats isolera, vill jag lemna en schematisk framställning af reaktionsförloppen.

Upphettas nitronaftalinsulfonsyreamid med jodvätesyra bildas allt efter omständigheterna dels amidonaftalinsulfonsyreamid samt något litet diamidodinaftyldisulfid, dels endast den sistnämnda. Reaktionerna åskådliggöras af ekvationerna:

---

1) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1888, N:o 5, pag. 273 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXI: 2, pag. 3264.

2) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1888, N:o 5, pag. 283 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXI: 2, pag. 3271.

3) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1889, N:o 9, pag. 537 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXIII, pag. 958.

4) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1889, N:o 9, pag. 544 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXIII, pag. 962.

5) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1876, N:o 7, pag. 47.

6) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1875, N:o 9, pag. 13.

$$\underset{SO_2 \cdot NH_2}{\overset{NO_2}{C_{10}H_6}} + 7HJ = \underset{SO_2 \cdot NH_2}{\overset{NH_2 \cdot HJ}{C_{10}H_6}} + 3J_2 + 2H_2O\,.$$

$$2\,\underset{SO_2 \cdot NH_2}{\overset{NH_2 \cdot HJ}{C_{10}H_6}} + 10HJ = \underset{S\;-}{\overset{NH_2 \cdot HJ}{C_{10}H_6}}\underset{S}{\overset{NH_2 \cdot HJ}{C_{10}H_6}} + 5J_2 + 2H_3N + 4H_2O\,.$$

Utbytet, beräknadt med afseende å nitronaftalinsulfonsyreamiden, blef i förra fallet ungefär 54 % amidonaftalinsulfonsyreamid och 9 % diamidodinaftyldisulfid; i senare fallet utgjorde detsamma 43 % af det teoretiska.

Jag öfvergår nu till den speciella undersökningen.

1—5-amidonaftalinsulfonsyreamid,

$$C_{10}H_6 \begin{matrix} \diagup NH_2 \\ \diagdown SO_2 \cdot NH_2 \end{matrix}\,.$$

Behandlar man motsvarande nitronaftalinsulfonsyras amid — smältpunkt 226° C. — med jodvätesyra af spec. vigt 1,5 och röd fosfor samt upphettar alltsammans öfver asbestbad 6 timmar, utfaller vid afsvalning en i gula nålar kristalliserande produkt, jodvätesyradt salt af amidonaftalinsulfonsyreamid. Detta salt löses lätt i alkohol. Till alkohollösningen sattes svafvelsyrlighet — för att öfverföra den i lösningen varande fria joden till jodväte — och amoniak. Härvid erhölls ibland en voluminös amorf, ibland en i nålar kristalliserande produkt, hvilken tvättades med alkohol, utpressades och omkristalliserades ur nyss nämnda ämne.

Amiden är i kall alkohol så godt som olöslig, löser sig lättare i varm och utfaller vid alkohollösningens afsvalning i

glänsande, färglösa taflor, hvilka vid 259—260° C. smälta till en starkt brunfärgad, segflytande vätska.

I vatten är amiden olöslig samt så godt som olöslig i benzol; af isättika löses den lätt.

Amiden förlorar intet i vigt vid torkning till 110° C.

Analyser[1]) å öfver svafvelsyra till konstant vigt torkadt material:

1) 0,1576 gr. gaf vid förbränning 0,0733 gr. H_2O, motsvarande 0,00814 gr. H, och 0,3113 gr. CO_2, motsvarande 0,0849 gr. C.

2) 0,1578 gr. gaf vid förbränning 0,0742 gr. H_2O, motsvarande 0,00824 gr. H, och 0,3102 gr. CO_2, motsvarande 0,0846 gr. C.

3) 0,1513 gr. gaf vid förbränning med CuO 16,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 766,75 mm. barometertryck och 16,5° C. Detta motsvaras af 0,019589 gr. N.

4) 0,0828 gr. gaf vid förbränning med soda och kaliumklorat i glasrör efter afskiljande af SiO_2 0,0856 gr. $BaSO_4$, motsvarande 0,011759 gr. S.

I procent:

		Beräknadt för $C_{10}H_6\langle^{NH_2}_{SO_2 \cdot NH_2}$.	Funnet. 1.	2.	3.	4.
C_{10}	120	54,1	54,2	53,6	—	—
H_{10}	10	4,5	5,2	5,2	—	—
N_2	28	12,6	—	—	12,9	—
S	32	14,4	—	—	—	14,2
O_2	32	14,4	—	—	—	—
	222	100,0.				

Hydrokloratet,

$$C_{10}H_6\langle^{NH_2 \cdot HCl}_{SO_2 \cdot NH_2},$$

erhölls genom att lösa amidonaftalinsulfonsyreamiden i alkohol och till alkohollösningen sätta klorvätesyra. Vid lösningens kon-

[1]) Kol- och vätebestämningarne äro utförda i bajonettrör med ett lager CuO i rörets bakre ända, där framom $PbCrO_4$.

centration utkristalliserar hydrokloratet än i färglösa, glänsande fjäll, än i stjernformigt grupperade nålar.

Å mellan sugpapper pressadt och öfver svafvelsyra till konstant vigt torkadt material gjordes följande

Analys:

0,3636 gr. gaf 0,1984 gr. AgCl, d. ä. 0,050499 gr. HCl.

I procent:

	Ber. på $C_{10}H_6 \langle {NH_2 . HCl \atop SO_2 . NH_2}$.	Funnet.
HCl	14,1	13,9.

Hydrojodatet är såsom ofvan nämts den första reduktionsprodukten. Det kristalliserar i nålar och är i alkohol lösligt.

Sulfatet,

$$\left(C_{10}H_6 \langle {NH_2 \atop SO_2 . NH_2}\right)_2 . H_2SO_4,$$

erhölls i form af prismer vid utkristallisering af amidosulfonsyreamidens lösning i svafvelsyra.

Å öfver svafvelsyra till konstant vigt torkadt material gjordes nedanstående

Analyser:

1) 0,4109 gr. gaf 0,1730 gr. $BaSO_4$, d. ä. 0,072762 gr. H_2SO_4.

2) 0,5344 gr. gaf 0,2264 gr. $BaSO_4$, d. ä. 0,095222 gr. H_2SO_4.

I procent:

	Beräknadt på $\left(C_{10}H_6 \langle {NH_2 \atop SO_2 . NH_2}\right)_2 . H_2SO_4$.	Funnet. 1.	2.
H_2SO_4	18,1	17,7	17,8.

Monoacetamidonaftalinsulfonsyreamid,

$$C_{10}H_6 \langle {NH \cdot CO \cdot CH_3 \atop SO_2 \cdot NH_2},$$

erhålles lätt, om man lindrigt upphettar amidosulfonsyreamiden med beräknad mängd ättiksyreanhydrid. Kristalliserar dåligt

såväl ur alkohol som vatten. Monoacetylderivatet smälter vid 231—232° C. Det förlorade ej något i vigt vid torkning till 100° C.

Å på detta sätt behandladt material gjordes följande

Analys:

0,1574 gr. gaf vid förbränning med CuO 15 ccm. N-gas vid 14,8° C och 750,8 mm. barometertryck, d. ä. 0,01765 gr. N.

I procent:

	Ber. för $C_{10}H_6\langle {NH . CO . CH_3 \atop SO_2 . NH_2}$.	Funnet.
N	10,6	11,2 .

Diacetamidonaftalinsulfonsyreamid,

$$C_{10}H_6 \langle {N \langle {CO \cdot CH_3 \atop CO \cdot CH_3} \atop SO_2 \cdot NH_2} .$$

Om amiden behandlas med öfverskott af acetanhydrid och massan upphettas till kokning, löser sig amiden. Sedan kokningen fortgått en half timme, tillsattes vatten, hvarvid en hvit olja afskilde sig, hvilken, när $(CH_3CO)_2O$ öfverförts i CH_3CO_2H, gaf diacetylderivatet i form af färglösa nålar. Det omkristalliserades ur alkohol — diacetylderivatet är däri svårlösligt — och utföll detsamma vid afsvalning i tunna, färglösa fjäll med smältpunkten 200° C.

Substansen förlorade ej något i vigt vid torkning till 105° C.

Analyser:

1) 0,1530 gr. gaf 0,0757 gr. H_2O, motsvarande 0,008411 gr. H och 0,3103 gr. CO_2, motsvarande 0,084627 gr. C.

2) 0,1317 gr. gaf vid förbränning med CuO 10,8 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 760,9 mm. barometertryck och 16° C., d. ä. 0,012828 gr. N.

3) 0,1702 gr. gaf vid förbränning med CuO 13,9 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 765 mm. och 17° C., d. ä. 0,016542 gr. N.

4) 0,2398 gr. gaf vid förbränning med CuO 19,5 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 14°,6 C. och 763 mm. barometertryck, d. ä. 0,0233 gr. N.

5) 0,1979 gr. gaf vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,15432 gr. $BaSO_4$, motsvarande 0,021194 gr. S.

I procent:

		Beräknadt för $C_{10}H_6\langle{N(CO.CH_3)_2 \atop SO_2.NH_2}$	Funnet. 1.	2.	3.	4.	5.
C_{14}	168	54,9	55,3	—	—	—	—
H_{14}	14	4,6	5,5	—	—	—	—
N_2	28	9,2	—	9,7	9,7	9,7	—
S	32	10,4	—	—	—	—	10,7
O_4	64	20,9	—	—	—	—	—
	306	100,0.					

1—5-Diamidodinaftyldisulfid,

$$C_{10}H_6(NH_2)S — S(NH_2)H_6C_{10}.$$

I filtratet efter amidonaftalinsulfonsyreamiden uppstod efter en tids förlopp eller efter lösningens koncentration en hvit, kristallinisk fällning. Denna togs å filtrum, tvättades med vatten och omkristalliserades upprepade gånger ur alkohol. Substansen är föga löslig i kall alkohol, löser sig i varm alkohol lättare än amidonaftalinsulfonsyreamiden; i isättika är densamma lätt löslig, i vatten olöslig. Ur alkohollösningen utföllo vackra fjäll. Dessa smälte vid 193° C. till en segflytande brun vätska. De voro i luften beständiga samt gåfvo med vätesyror och svafvelsyra salter. Om alkohollösningen behandlades med konc. svafvelsyra iakttogs ingen färgförändring.

Å vid 123° C. torkadt material gjordes följande analys:

0,1555 gr. gåfvo vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,0730 gr. H_2O, motsvarande 0,0081 gr. H samt 0,3955 gr. CO_2, motsvarande 0,107863 gr. C.

I procent:

C	69,4
H	5,2.

Jag har genom att behandla 1—5-nitrodinaftyldisulfid[1]) med jodvätesyra på samma sätt, som vid amidonaftalinsulfonsyreamiden är beskrifvet, erhållit en vid 192° C. smältande förening. Denna måste dels på grund af sättet, hvarpå den framstälts, dels på grund af sina egenskaper — dessa öfverensstämma i allt med den nyss omnämnda föreningens — utgöras af 1—5-diamidodinaftyldisulfid.

Å vid 110° C. torkadt material gjordes följande analyser:

1) 0,1886 gr. gåfvo vid förbränning i bajonettrör med $PbCrO_4$, 0,0869 gr. H_2O, motsvarande 0,009656 gr. H, och 0,4738 gr. CO_2, motsvarande 0,129218 gr. C.

2) 0,1405 gr. gåfvo vid förbränning på samma sätt, 0,0726 gr. H_2O, motsvarande 0,008066 gr. H, och 0,3550 gr. CO_2, motsvarande 0,096818 gr. C.

3) 0,1492 gr. gåfvo vid förbränning med CuO 9,8 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 768 mm. barometertryck och 14°,7 C., motsvarande 0,011802 gr. N.

4) 0,1889 [2]) gr. gåfvo vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,26022 gr. $BaSO_4$, motsvarande 0,035738 gr. S.

I procent:

	Ber. för $C_{20}H_{16}N_2S_2$.		Funnet. 1.	2.	3.	4.
C_{20}	240	69,0	68,5	68,9	—	—
H_{16}	16	4,6	5,1	5,7	—	—
N_2	28	8,0	—	—	7,9	—
S_2	64	18,4	—	—	—	18,9
	348	100,0.				

Häraf framgår, att den vid reduktionen af nitronaftalinsulfonsyreamiden bildade produkten är identisk med den, som

[1]) Öfvers. K. V. Akad. Förh. 1887, N:o 5, pag. 243 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XX, pag. 1534 och XXI: 1, pag. 1099.

[2]) Som substansen är mycket svår förbränd, omsatte svaflet sig ej till sulfat, förrän oxidation med brom egt rum.

erhölls vid reduktion af nitrodinaftyldisulfiden, och följaktligen utgöres af diamidodinaftyldisulfid,

NH_2 NH_2

S — S

Användes jodvätesyra af spec. vigt 1,96, erhålles efter 3 timmars uppvärmning öfver asbestbad blott diamidodinaftyldisulfid vid reduktionen af nitronaftalinsulfonsyreamiden.

Hydrokloratet,

$$(C_{10}H_6(NH_2)S — (NH_2)H_6C_{10}) \cdot 2HCl.$$

Genom att lösa disulfiden i spritblandad klorvätesyra erhöll jag saltet i mikroskopiska prismer. Detsamma sönderdelas af vatten och alkohol. Å öfver svafvelsyra till konstant vigt torkadt material gjordes följande

Analys:

0,1486 gr. förbrändes med CaO och gaf 0,096881 gr. AgCl, motsvarande 0,024659 gr. HCl.

I procent:

	Beräknadt ur $(C_{10}H_6(NH_2)S — S(NH_2)H_6C_{10}) . 2HCl$.	Funnet.
HCl	17,3	16,6.

Hydrojodatet och *sulfatet* kristallisera i nålar.

Diacetdiamidodinaftyldisulfid,

$$C_{10}H_6(NH \cdot CO \cdot CH_3)S — S(NH \cdot CO \cdot CH_3)H_6C_{10}.$$

Redan vid lindrig uppvärmning af diamidodinaftyldisulfiden med acetanhydrid äger omsättning rum. Sedan öfverskott af acetanhydrid öfverförts i ättiksyra, omkristalliserades acetylderivatet ur isättika, sedan jag förgäfves försökt få detsamma att kristalli-

sera ur alkohol äfvensom vatten. Ur isättikelösningen utfaller acetylderivatet i färglösa, vackra fjäll, hvilka under förkolning smälta vid 274° C. Acetylderivatet förlorade ej något i vigt vid 110° C.

Analys:

0,1691 gr. gaf vid förbränning med CuO 9,8 ccm. N-gas vid 15° C och 757,5 mm. barometertryck, d. ä. 0,011628 gr. N.

I procent:

	Ber. för $C_{24}H_{20}N_2O_2S_2$.	Funnet.
N	6,5	6,9.

Dipropionyldiamidodinaftyldisulfid,

$$C_{10}H_6(NH \cdot COC_2H_5)S - S(NH \cdot COC_2H_5)H_6C_{10}.$$

Behandlas disulfiden med propionsyreanhydrid på samma sätt som ofvan är beskrifvet, erhålles propionylderivatet. Genom omkristallisation ur isättika fås detsamma i form af fjäll, liknande acetylderivatets, med smältpunkten 242° C.

Propionylderivatet förlorar intet i vigt vid 105° C.

Analys:

1) 0,2174 gr. gaf 11,6 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 16°,2 C och 755 mm. barometertryck, d. ä. 0,013662 gr. N.

2) 0,1896 gr. gaf vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,19835 gr. $BaSO_4$, d. ä. 0,027241 gr. S.

I procent:

	Ber. för $C_{26}H_{24}N_2S_2O_2$.	Funnet. 1.	2.
N	6,1	6,3	—
S	13,9	—	14,3.

Amidonaftalinsulfonsyreamiden äfvensom diamidodinaftyldisulfiden böra vid stark reduktion gifva amidotionaftol. Jag har försökt reducera den förstnämnda genom upphettning i slutet rör med beräknade mängder jodvätesyra (spec. vigt 1,5) och röd

fosfor under 2 timmars tid vid 140° C. Härvid har jag erhållit ett i taflor kristalliserande ämne — antagligen jodvätesyradt salt af amidotionaftol —. Detta ämne löser sig *mycket lätt* i alkohol. Sättes till alkohollösningen ammoniak, uppstår en gul, amorf fällning, hvilken hastigt oxiderar sig och har en mercaptanartad lukt. Med konc. svafvelsyra färgades alkohollösningen intensivt röd. Allt detta tyder på, att en SH-grupp finnes i denna förening. Vidare utfaller en voluminös, gul fällning, om alkohollösningen behandlas med klorvätesyra.

Berättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenskaps-Akademien under året 1889—1890. Af Akademiens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 31 Mars 1890.

Svenska Vetenskaps-Akademiens bestämmelse är, enligt hennes Grundreglors föreskrift, »att främja vetenskaperna, följa deras utveckling samt genom tryckta skrifter utbreda deras kännedom». Hon uppfyller denna bestämmelse, då hon främjar vetenskaperna så väl genom verksamheten vid henne underlydande särskilda vetenskapliga institutioner, — sitt observatorium, sitt fysiska kabinett, det naturhistoriska Riksmuseum, den meteorologiska centralanstalten och hennes botaniska trädgård, — som ock genom de stipendier, prisbelöningar och understöd, som hon genom framfarne fosterländska mäns donationer är i tillfälle att årligen för vetenskapliga ändamål utdela; då hon följer vetenskapernas framsteg och för detta ändamål underhåller och stadigt förkofrar ett dyrbart bibliothek, som inom den naturvetenskapliga litteraturen torde vara det rikhaltigaste i den skandinaviska norden; och slutligen då hon utbreder kännedomen om vetenskapernas framsteg genom sina tryckta skrifter, som allt mer och mer tillväxa i antal, omfång och innehållsrikedom. Det är för sin verksamhet under det sistförflutna året i dessa olika rigtningar Akademien nu går att på denna åt minnet af hennes stiftelse egnade dag offentligen aflägga en kortfattad redogörelse.

Men dessförinnan är det hennes pligt att uttala sin djupa tacksamhet för det hägn och den omvårdnad, hvarmed hon och

de vetenskaper, hvilkas odling är hennes förnämsta uppgift, blifvit jemväl under det sista året utaf statsmakterna hugnade.

Sålunda har 1889 års Riksdag på Kongl. Maj:ts derom gjorda framställning på extra stat för innevarande år beviljat

dels ett anslag af 2,000 kronor för inköp och insamling af naturalier vid det Naturhistoriska Riksmuseets afdelning för arkegoniater och fossila växter, till arbetsbiträden derstädes och till bestridande af andra med arbetena vid afdelningen förenade utgifter, och

dels ett anslag af 2,800 kronor till underhåll och förkofran af Riksmuseets etnografiska samling,

samt på Akademiens underdåniga förord ett anslag af 4,000 kronor att tillhandahållas utgifvaren af tidskriften »Acta mathematica» för fortsatt utgifvande af denna tidskrift.

Kongl. Maj:t har för öfrigt af under hand hafvande medel täckts anvisa

2,000 kronor till bestridande under år 1889 af utgifterna för vård och vidmakthållande af Riksmuseets etnografiska samling,

2,150 kronor till ersättning åt telegrafverket för väderlekstelegraferingen under år 1889,

och, på Akademiens underdåniga förord, 4,500 kronor åt Professorn Frih. NORDENSKIÖLD för till staten inlösta exemplar af hans nyligen utgifna facsimile-atlas af geografiska kartor, tryckta före år 1600.

Äfvenledes på Akademiens förord har Kongl. Maj:t utaf statsanslaget till resestipendier samt läroböckers och lärda verks utgifvande anvisat understöd

åt f. d. Professorn vid universitetet i Upsala W. LILLJEBORG 1,000 kronor för fortsatt utgifvande af arbetet »Sveriges och Norges fiskar», och

åt Kollegan vid allmänna läroverket i Ronneby C. A. WESTERLUND 800 kronor för fortsättning af arbetet »Fauna der in der palæarktischen Region lebenden Binnenconchylien».

Äfven enskilda personer hafva under året haft Akademien eller dess institutioner i åtanka med frikostiga penningegåfvor,

hvilka jemväl påkalla Akademiens tacksamhet. Konsuln O. Ekman har till Akademien öfverlemnat 1,500 kronor till inlösen åt Riksmuseum af en i Östra Ljungby socken i Skåne förlidet år nedfallen meteorsten, och Grosshandlaren Fr. Warburg har skänkt 1,816 kronor hufvudsakligen såsom bidrag till en entomologs utsändande till Kamerun för anställande derstädes af entomologiska forskningar och insamlingar.

Öfver vetenskapliga arbeten, som med understöd af Akademien blifvit utförda, har hon mottagit och låtit sig föredragas berättelser

af Docenten K. Ångström, som med understöd af Wallmarkska donationsfonden utfört undersökningar öfver det strålande värmet,

af Docenten J. R. Rydberg, som med understöd af samma fond idkat studier inom atomtheorien i samband med de kemiska grundämnenas periodiska system,

af Docenten C. V. L. Charlier, som med understöd jemväl från Wallmarkska fonden på Akademiens Observatorium anställt undersökningar om de förmånligaste metoderna att uppmäta stjernfotografier,

af Filos. Licentiaten R. Larssén, som enligt uppdrag af Akademien gemensamt med Professor P. G. Rosén under sistlidne sommar utfört telegrafiska longitudbestämningar mellan Stockholm, Hernösand och Haparanda, samt anställt pendeliakttagelser å de två sistnämnda orterna, och

af Läroverksadjunkten K. H. Sohlberg, hvilken såsom Beskowsk stipendiat vid Akademiens fysiska kabinett anställt undersökningar öfver luftens halt af fuktighet i fast eller flytande form vid klart väder.

Om vetenskapliga resor, som blifvit utförda med understöd af Akademien, hafva följande berättelser blifvit afgifna:

af Docenten A. Wirén om undersökningar anställda vid Kristinebergs zoologiska station öfver hafsdjurs byggnad och utveckling,

af Docenten C. Aurivillius om forskningar öfver krustacéer jemväl vid Kristineberg,

af Docenten A. N. LUNDSTRÖM om växtgeografiska och växtbiologiska forskningar vid Gellivara och angränsande delar af Luleå lappmark,

af Filos. Kandidaten R. SERNANDER om undersökning af floran inom de postfossila aflagringarne längs Ångermanlands och Medelpads floddalar,

af Filos. Kandidaten L. ROMELL om idkade studier öfver Ombergstraktens svampflora,

af Filos. Kandidaten G. ANDERSSON om undersökningar af de olika växtformationerna samt deras fördelning och utbredning på de svenska torfmossarne,

af Filos. Kandidaten H. SCHÖTT om forskningar öfver insektgruppen Collembola inom Jemtlands fjelltrakter, och

af Filos. Doktor F. LAURELL om idkade dendrologiska studier i Östergötland, på Gotland, i Skåne och trakten af Göteborg.

Slutligen har Byzantinske stipendiaten, Hortikultören W. HARTMAN afgifvit en särdeles sakrik berättelse om sina under resor och uppehåll i Tyskland, Frankrike och Amerika gjorda iakttagelser öfver cider-beredning, fruktkonservering, trädskolor och fröodling.

Samtidigt med att, enligt hvad kändt är, från norsk sida ett förslag är under allvarlig öfverläggning att utrusta en expedition till de norra polartrakterna under den bekante Doktor NANSENS ledning, har Akademien erhållit meddelande om en tilltänkt expedition till de södra polartrakterna, hvilken expedition skulle komma att utrustas för gemensam svensk och australisk räkning. Genom Kongl. Utrikes-Departementet hade nämligen Akademien fått sig meddeladt ett af Australiska Geografiska Sällskapet i Melbourne framställdt förslag om en dylik kombinerad expedition, öfver hvilket förslag Akademien beslöt inhemta yttrande af sina sakkunniga ledamöter Friherrarne NORDENSKIÖLD och DICKSON, hvilka i sitt derpå afgifna svar förklarade sig villiga att, under förutsättning af en lika fördelning mellan Sverige och Australien af kostnaderna, beräknade till 10,000 pund sterling

eller 180,000 kronor, utrusta denna expedition och derför anskaffa ett lämpligt svenskt fartyg. Expeditionen, som skulle komma att afgå från Sverige under loppet af år 1891, vore afsedd dels för påbörjande af en fullständig naturhistorisk undersökning af de antarktiska landen och hafven, dels för geografiska forskningar rörande utsträckningen och beskaffenheten af det land, som anses omgifva sydpolen, och dels för undersökningar, huruvida några nya värdefulla jagt- och fiske-områden förefinnas i den del af antarktiska oceanen, som expeditionen komme att besöka. Det sålunda framställda förslaget skänker Akademien å sin sida det fullaste erkännande, då en dylik expedition skulle bilda en, särskildt i naturhistoriskt hänseende, löftesrik och värdig anslutning till de forsknings-expeditioner till den höga norden, hvilka i senare tider från Sverige utgått.

På Kongl. Maj:ts befallning har Akademien under året haft att afgifva utlåtanden i åtskilliga administrativa mål, hvarvid någon vetenskaplig utredning erfordrats, bland hvilka utlåtanden, förutom de redan omnämnda rörande sökta anslag eller understöd för vetenskapliga ändamål, följande må anföras:

angående en af Kongl. Maj:ts Befallningshafvande i Göteborgs och Bohuslän gjord hemställan om utredning och vetenskaplig granskning af frågan om behofvet af utsträckt fridlysningstid för hummer;

angående en gemensam framställning af Nautisk-Meteorologiska Byrån och Generalstabens Topografiska afdelning om utsträckning till landets nordliga delar af de systematiska precisionsafvägningar, som sedan några år pågått inom södra och mellersta delarne af landet, och hvilka inom dessa senare landsdelar snart äro afslutade;

angående föreskrifter för de från Paris nyligen hitkomna och på Kongl. Maj:ts befallning hos Akademien tills vidare deponerade nya rikslikarnes för mått och vigt framtida förvaring och användning.

Utgifvandet från trycket af Akademiens skrifter har under året oafbrutet fortskridit. Af Akademiens Handlingar har det

22:dra bandet ännu icke fullständigt lemnat pressen, då dess slutliga utgifvande blifvit af vissa oförutsedda omständigheter längre fördröjdt än önskligt varit, dock torde det inom helt kort tid blifva tillgängligt. Af det 23:dje bandet, för åren 1888 och 1889, är den betydligare delen redan färdigtryckt. — Af Bihanget till Handlingarne har det 14:de bandet, innehållande 35 särskilda afhandlingar, utkommit, hvarjemte större delen af 15:de bandet, för år 1889, lemnat pressen. — Af Öfversigten af Akademiens Förhandlingar föreligger det 46:te bandet, för år 1889, färdigtryckt, hvarförutom månadshäftena för Jannari och Februari innevarande år jemväl lemnat pressen. — Af arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige», som innehåller de vid statens meteorologiska stationer utförda iakttagelser, har 26:te bandet, och af arbetet »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms Observatorium» 4:de bandets 1:sta och 3:dje häften utgifvits. — Tryckningen af arbetet »Observations faites au Cap Thordsen», innehållande de af 1882 och 1883 årens svenska expedition till Spetsbergen anställda iakttagelser, har blifvit fortsatt, men ännu icke fullt afslutad. — Akademien har dessutom genom penningebidrag understödt utgifvandet af framlidne Riksrådet A. J. von Höpkens skrifter genom Kammarherrn C. G. U. Silfverstolpe, af hvilket arbete 1:sta delen redan utkommit, samt genom inlösen af ett större antal exemplar af Friherre A. E. Nordenskiölds »Facsimile-Atlas af geografiska kartor tryckta före år 1600» i sin mån bidragit till detta dyrbara arbetes utgifvande.

På Akademiens **Observatorium** hafva arbetena fortgått efter samma plan som under föregående år så väl i afseende på observationerna med meridiancirkeln som i afseende på försöken att fotografiskt afbilda delar af stjernhimmeln samt att efter de erhållna fotografiska bilderna uppmäta stjernornas inbördes lägen. Åtskilliga resultat af dessa sistnämnda försök hafva blifvit nedlagda i en af Observatoriets t. f. Amanuens Dr. C. V. L. Charlier derom utgifven afhandling. — Beräkningen af hufvudplaneternas absoluta element, hvarför ett särskildt statsanslag

varit anvisadt, har i följd af mellankommande hinder icke kunnat under året afslutas, men har dock ej oväsentligt skridit framåt. De under året utförda räkningarne hafva omfattat den nedre planetgruppen jemte systemet Neptunus—Uranus—Saturnus. — Under året hafva utländska astronomerna Herr MASAL, Dr. WOLF och Baron Dr. HÄRDTL någon tid vistats vid Observatorium för utförande af vetenskapliga arbeten.

Akademiens **Fysiska kabinett** har, sedan dess nye Fysiker Professor HASSELBERG den 1 sistlidne Juni tillträdde sin befattning, undergått åtskilliga omgestaltningar, särskildt för anställande af spektroskopiska och spektrofotografiska undersökningar, — ett ämne, hvarmed han sedan flera år varit sysselsatt på observatorium i Pulkowa. För samma ändamål hafva äfven åtskilliga nya apparater blifvit anskaffade, hvaribland förnämligast är att omnämna ett ROWLANDS diffraktionsgitter på spegelmetall af utomordentlig fulländning. Äfven med andra apparater har den fysiska instrumentsamlingen blifvit riktad, såsom med en dyrbar pendelapparat efter STERNECKS konstruktion, förfärdigad af Akademiens instrumentmakare P. M. SÖRENSEN, och anskaffad för anställande af pendeliakttagelser inom landet. — Efter sitt tjenstetillträde har Fysikern egnat sin tid, utom åt nämnda och andra nödiga anordningar inom kabinettet, äfven åt utförandet af åtskilliga spektroskopiska försök såsom förberedelse till precisionsundersökningar af färgade gasers absorptionsspectra. Dessutom har han under sistlidna November och Januari månader i Akademiens hörsal hållit åtta Thamiska föreläsningar öfver elementerna af spektroskopien och dess användningar.

Vid **Bergianska Stiftelsen** hafva arbetena för ordnande af dess nya trädgård oafbrutet fortgått. Bland verkställda nyanläggningar må nämnas planteringen af trädgårdens frukträdsmoderskola, fullbordandet af den botaniska afdelningens försöksfält, byggandet af ett mindre växthus för öfvervintring och förökning, samt anläggning af en del af den växtsystematiska afdelningen. — Stiftelsen har under året ihågkommits med talrika gåfvor såväl af lefvande växter som af frön från Skandinaviens

olika delar. Sålunda har en betydande samling af lefvande växter från Dovre-fjäll förärats af Adjunkt C. I. LALIN. Mindre samlingar af lefvande växter hafva lemnats af Dr. C. NYSTRÖM, Lektor S. ALMQVIST, Fru A. AURIVILLIUS, Magister G. BLADINI, Kamrer C. H. BRANDEL, Herr H. DAHLSTEDT, Ingeniör P. DUSÉN, Professor F. L. EKMAN, Handlanden C. F. HOLM, Apotekaren C. INDEBETOU, Licentiat O. JUEL, Kollega G. W. LAGERSTEDT, Direktör E. LINDGREN, Lektor C. A. M. LINDMAN, Trädgårdsmästaren N. H. LINDSTRÖM, Kollega C. A. MELANDER, Professor A. G. NATHORST, Dr. C. F. O. NORDSTEDT, Direktör F. PETTERSSON, Professor O. T. SANDAHL, Grosshandlaren C. C. SÖDERSTRÖM, Apotekaren H. THEDENIUS, Lektor K. F. THEDENIUS och Dr. N. WILLE. Frön hafva erhållits från Professor A. G. NATHORST, Magister BLADINI, Kamrer BRANDEL, Fröken S. DANIELSSON, Lektor K. F. DUSÉN, studeranden O. EKSTAM, Kandidat M. ELFSTRAND, Jägmästaren O. R. HEDENSTRÖM, Kollega LAGERSTEDT, Adjunkt LALIN, Lektor LINDMAN, Fröken A. OLBERS, Jägmästaren H. SAMZELIUS, Lektor THEDENIUS, Provisor R. WALLENGREN och Dr. WILLE. — Såsom deltagare i det allmänna, internationella fröbytet har trädgården utdelat frön till och mottagit frön från omkring 70 botaniska trädgårdar och likartade institutioner. — Undervisningen åt trädgårdseleverna har under året omfattat den praktiska och teoretiska hortikulturens olika grenar, botanik, fysik, kemi, aritmetik, väl- och rättskrifning, bokhålleri samt ritning.

Akademiens **Bibliotek** har fortfarande hållits tillgängligt för besökande under bestämda timmar hvarje Onsdag och Lördag samt, med undantag för sommarmånaderna, jemväl de flesta öfriga förmiddagar så väl för studier på stället som för hemlåning af böcker. I närvarande stund äro derifrån utlånade 9,162 band och lösa nummer af tidskrifter. Genom gåfvor, inköp och byten har boksamlingen tillväxt med 3,664 band och småskrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 781 institutioner och personer, hvaraf 231 inom och 550 utom landet.

Vid **Statens Meteorologiska Centralanstalt** har verksamheten under det förflutna året fortgått på enahanda sätt som hittills, hvad angår så väl uppgörandet af synoptiska kartor på grund af inkomna dagliga in- och utländska väderlekstelegram, som ock dessa kartors bekantgörande genom tidningar och genom offentliga anslag på åtskilliga ställen i hufvudstaden. Äfvenledes har en sammanfattning af de rådande väderleksförhållandena dagligen blifvit utarbetad och bekantgjord både i tidningar och genom telegrafiska meddelanden till åtskilliga kommuner och större jernvägsstationer i riket. Under sommarmånaderna hafva derjemte anstaltens meddelanden lemnats till föreståndaren för Stockholms läns Hushållningssällskaps frökontroll-anstalt, som genom telefon spridt desamma till ett större antal platser inom länet. Från en del af dessa platser hafva medelst flaggors hissande, efter ett af Centralanstalten angifvet system, väderleksutsigterna blifvit än ytterligare spridda. Dylika telefonmeddelanden hafva äfven dagligen lemnats till Stockholm—Rimbo jernvägs styrelse, genom hvars försorg väderleksunderrättelserna delgifvits allmänheten i trakterna af denna banas hela sträckning. För öfrigt publiceras de inländska dagliga telegrammen fortfarande i tidskriften »Bulletin du Nord», hvars utgifvande gemensamt bekostas af de tre skandinaviska ländernas Meteorologiska Centralanstalter. — Statens meteorologiska stationer äro fortfarande 34 till antalet, hvartill komma åtskilliga privata stationer, der iakttagelser öfver nederbörd och temperatur anställas. Från sådana privata stationer hafva fullständiga observationsserier till Anstalten inlemnats af Läroverkskollega R. BILLMANSON i Nora, Jägmästaren J. J. VON DÖBELN i Björkholm, Kapten TH. EKENMAN i Helmershus, Telegrafkommissarien J. G. ERICSSON i Nässjö, från Ronneby helsobrunn, Gysinge bruk, Experimentalfältet vid Stockholm samt från en station i Hallands och en i Upsala län. De af skogsmedel bekostade meteorologiska försökstationerna för iakttagelser öfver nederbörd, afdunstning och jordtemperatur, äfvensom de utförligare nederbördstationerna i Hjorthagen och på Tegeludden vid Stockholm samt de af Hus-

hållningssällskapen anordnade nederbördsstationerna, hafva alla under året varit i fortsatt oförminskad verksamhet. Sammanlagda antalet stationer, der iakttagelser öfver nederbörden inom riket utföras, således med inbegrepp äfven af statens stationer och dem, som stå under Nautisk-Meteorologiska Byråns inseende, belöper sig för närvarande till 438, fördelade på rikets samtliga län. Iakttagelserna vid alla dessa stationer insändas vid hvarje månads utgång till Anstalten och offentliggöras i tidskriften: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvilken under Anstaltens inseende redigeras af dess Amanuens Dr. H. E. HAMBERG och hufvudsakligen uppehålles genom prenumeration af Hushållningssällskapen. I samma tidskrift har under året afslutats en för några år sedan påbörjad klimatbeskrifning öfver rikets särskilda län. — Det system af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser, hvilket allt sedan år 1881 stått under Anstaltens ledning, har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till Anstalten inkommit journaler från 33 observatörer öfver isläggning och islossning, från 35 öfver iakttagna åskväder och från 45 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurverlden. — Så kallade synoptiska tabeller hafva vid Anstalten upprättats för året 1888, upptagande nederbördens art och mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskinlighet, solrök, norrsken m. m. I dessa tabeller ingå landets samtliga stationer. — Under sistlidne sommar och höst inspekterades af Dr. HAMBERG stationerna i Visby, Sveg, Östersund, Husä, Hernösand och Dalboda. — Slutligen har Anstalten meddelat en mängd upplysningar åt så väl in- som utländska auktoriteter och enskilda personer.

Det **Naturhistoriska Riksmuseum** har under året hållits för allmänheten öppet alla Onsdagar och Lördagar kl. 12—2 samt Söndagar kl. 1—3 på dagen. Tillträdet har varit afgiftsfritt utom om Lördagarne, då en afgift af 25 öre för person erlagts. Äfven på andra tider har, då särskild begäran derom framställts, museum hållits tillgängligt, isynnerhet för skolungdom under lärares ledning och undervisning.

Riksmuseets *Mineralogiska afdelning* har äfven under sista året erhållit den största mängden af nya eller förut kända, vackert utbildade mineral genom köp från de i mineralogiskt hänseende berömda jern- och mangangrufvorna i Filipstads bergslag, hvilka i afseende på antalet af egendomliga, för vetenskapen vigtiga och lärorika mineral, som vid dem förekomma, stå nära nog oöfverträffade bland alla jordens mineralfyndorter. En medtäflare i detta hänseende hafva de dock i mineralförekomsten i trakten af Brevig i Norge. Äfven från denna fyndort hafva vigtiga mineralsviter under årets lopp för museum förvärfvats. Bland inköp må för öfrigt nämnas några meteoriter från fyndorter, som ej förut varit representerade i museets samling, några genom deras meteoritlika form märkliga svarta diamanter från Brasilien, en del utländska mineral inköpta under resor på kontinenten af afdelningens intendent och af dess Amanuens Herr G. LINDSTRÖM, några naturliga magneter och andra mineral från Dannemora, diverse mineral från Kårarfvet, Hitterö, Spangereid i Norge m. m. — Genom skänker har under detta år en ovanligt dyrbar tillökning för museum vunnits, hvarvid i främsta rummet förtjenar omnämnas dels den i Östra Ljunghy socken i Skåne den 3 April sistlidet är nedfallna meteorsten, skänkt till Museum af Konsul O. EKMAN, dels ett antal särdeles värderika mineral från Norge, skänkta af Bergmästaren T. DAHLL. Vackra sviter af siberiska mineral hafva erhållits dels af Statsrådet M. HIRIAKOFF i St. Petersburg, dels af Folkskoleläraren G. FLINK, som sistlidne sommar utförde en mineralogisk resa till Ural. En i vetenskapligt hänseende väl utvald samling af bernsten har erhållits såsom gåfva från firmorna A. F. JANTZEN och H. L. PERLBACH i Danzig samt det vestpreussiska provinzialmuseum dersammastädes. Vidare har Museum emottagit flera stora stuffer Boulangenit från Hellefors af grufvans egare, två märkliga stuffer svafvelkis från trakten af Sulitelma af Konsul N. PERSSON, några vanadinitstuffer från Böhlet af Brukspatron M. F. WÆRN, diverse mineral från Gladhammar af Bergsingeniör A. E. FAHLCRANTZ, en vacker stuff tungspat från Spexeryd af Disponenten

E. Råf, en större svit grafit från utländska lokaler af Ingeniör Th. Andrée. — Genom byte mot svenska mineral hafva förvärfvats två meteorstenar från nya fyndorter, den ena från Mr. A. de Mauroy och den andra från museum i Pau. — För insamlande af mineral hafva under året resor till åtskilliga fyndorter blifvit för museets räkning företagna af Assisten G. Lindström och Kandidat G. Nordenskiöld. Såsom vanligt har arbets- och undervisningsmaterial tillhandahållits så väl in- som utländska forskare.

Den *botaniska afdelningen* af Riksmuseum har under året förkofrats så väl genom skänker som genom köp. Akademien har till afdelningen öfverlemnat de växtsamlingar, som Kandidaterne G. Andersson och L. Romell, hvilka af Akademien åtnjutit reseunderstöd, enligt föreskrift insändt. Bland öfriga gåfvor må främst anföras en synnerligen värdefull samling af nyzeländska svampar med färglagda originalafbildningar efter lefvande exemplar af Professor S. Berggren, en vacker och intressant samling af svenska hafsalger, skänkt af Generaldirektör M. Huss, samt 5:te fascikeln af »Algæ exsiccatæ Americæ borealis» af Professor G. Farlow. Vidare må nämnas alger af Docenten C. Aurivillius, Professor G. Lagerheim i Quito, Kollega N. G. W. Lagerstedt, Dr. C. F. O. Nordstedt, Dr. P. Richter i Leipzig, Amanuensen Hj. Stolpe, samt exsiccatverken: »Hauck et Richter, Phycotheca universalis» fasc. 5 och »Wittrock et Nordstedt, Algæ aquæ dulcis exsiccatæ» fasc. 21, båda öfverlemnade af afdelningens intendent; svampar af Prof. A. G. Nathorst och Dr. N. Wille; lafvar af Obergerichtsrath F. Arnold i München; fanerogamer af studeranden G. Ageli, Kyrkoherden S. J. Enander, Dr. C. A. Håkansson, Dr. J. A. Leffler, Professor C. S. Sargent i Brooklyne och Dr. H. O. Waldenström; morfologiska föremål af Prof. Chr. Aurivillius, Ingeniör Boje af Gennäs, Lektor K. F. Dusén, Kassör G. Hofgren, Docenten G. Holm, Adjunkten T. O. B. N. Krok, Lektor C. A. M. Lindman, Prof. Chr. Lovén, Byråchefen G. Mewes, Baron F. v. Mueller i Melbourne, Lektor

A. SKÅNBERG, Konservator A. SVENSSON och Herr ÅBOM, hvartill komma de under intendentens resa på Gotland gjorda samlingar af alger och fanerogamer. Bland de tillökningar, som afdelningen genom köp förvärfvat, må i främsta rummet nämnas Lektor N. J. SCHEUTZ' efterlemnade rika samlingar af fanerogamslägtena Rosa, Geum och Potentilla samt familjen Ranunculalceæ. Vidare hafva genom köp förvärfvats hafsalger från Bermudasöarne af Dr. C. V. FORSSTRAND, fanerogamer från Mexicos bergstrakter af C. G. PRINGLE, spanska fanerogamer af E. RÉVERCHON, samt exsiccatverken: »H. DAHLSTEDT, Hieracia exsiccata» fasc. 1—3, »E. M. HOLMES, Algæ britannicæ rariores exsiccatæ» fasc. 4, samt »WITTROCK et NORDSTEDT, Algæ aquæ dulcis exsiccatæ» fasc. 18—20. — Delar af de skandinaviska, arktiska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlånade till specialister i Sverige, Danmark, Finland, Tyskland, England och Frankrike. — Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen blifvit under året utförda, utom af Intendenten sjelf, af Lektor S. ALMQVIST, Kamrer C. H. BRANDEL, Kandidat M. ELFSTRAND, Licentiat O. JUEL, Professor F. R. KJELLMAN, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Dr. J. A. LEFFLER, Fröken MARIA LEWIN, Lektor LINDMAN, Docent A. NILSSON, Dr. O. NORDSTEDT, Kandidat C. F. NYMAN, Amanuensen Grefve H. STRÖMFELT och Dr. N. WILLE. — Såsom Regnellsk Amanuens har under år 1889 tjenstgjort Docenten A. NILSSON samt under den gångna delen af 1890 Doktorn Grefve H. STRÖMFELT.

Riksmusei *afdelning för vertebrerade djur* har under året fått mottaga många värderika gåfvor, bland hvilka i första rummet må nämnas åtskilliga sällsynta och dyrbara fiskar från Kattegat och Nordsjön samt en samling naturalier, hufvudsakligen fisk, från Argentina, hvilka förärats museum af Danske Grosshandlaren O. FREDRICKSEN. Från Boma har den i Kongostatens tjenst anställde Kapten EKBLOM insändt en rätt betydande samling vestafrikanska föremål. Friherre O. DICKSON har från Skeppsta djurgård skänkt en ståtlig Wapitihjort. Af

den under året till Sverige invandrade, eljest här sällsynta Bändelkorsnäbben hafva exemplar insändts så väl af Läroverkskollega A. V. ENGHOLM i Vadstena som af Trädgårdsmästaren A. WAHLBERG härstädes. Professor H. KINBERG, af hvars stora fogelsamling Museum kunnat inköpa en del exemplar, har ställt största öfriga delen till museets förfogande. Dessutom har Museum varit med skänker ihågkommet af Kaptenerne J. G. JOHANSSON och J. E. SÖDERHOLM, Advokatfiskalen E. MOBECK, samt Herrar T. HUSS, MARCUS, I. A. SANDELL, K. WESTPHAL och K. OHLSSON. I Bohuslän har den nitiske och skicklige samlaren Herr C. A. HANSSON åt Museum förvärfvat många sällsynta och dyrbara fiskar. Bland öfriga inköp må nämnas en samling fiskar och kräldjur från Ceylon, som af Docenten FRISTEDT derifrån hemsändts. — De vetenskapliga arbetena vid afdelningen hafva fortfarande hufvudsakligen egnats åt bearbetning af fisksamlingen. Arbetet vid konservatorsverkstaden har till största delen egnats åt den besvärliga och kostsamma, men särdeles väl lyckade uppställningen af det grönländska nordhvalskelettet, som nu, med barderna i naturlig ställning, utgör hvalmuseets förnämsta dyrbarhet. Dessutom hafva åtskilliga andra däggdjursskelett, såsom af Manatee (sjöko) från Senegal, lejon och orangutan blifvit uppställda, samt en Manatee från Vestindien, en svärdfisk från Öresund och åtskilliga foglar blifvit uppstoppade. — Den etnografiska samlingen har, såsom i föregående berättelse omnämnts, varit på två lokaler fördelad, och båda dessa lokaler äro nu till förevisning för allmänheten öppnade. Bland skänker till samlingen äro att nämna etnografiska föremål från Central-Amerika, hvilka förärats af Friherre A. E. NORDENSKIÖLD, och bland större inköp en samling indianska drägter och vapen från Ecuador.

Riksmusei *afdelning för lägre evertebrater* har under det förflutna året fått mottaga vackra gåfvor dels af oceaniska djur af Kaptenerna ALLAN AFZELIUS och TOR SUNDQVIST, dels arter från Congo af Kapten C. J. EKBLOM och från Kamerun af Herr E. BOVALLIUS. Ansenliga och vigtiga tillökningar har

den vunnit genom inlösen af värderika samlingar från Medelhafvet af Dr. A. APPELLÖF, från Ceylon af Dr. C. FRISTEDT, samt från Bermudas-öarne af Dr. C. FORSSTRAND, hvarjemte, bland annat, från Konservatorn A. HANSSON i Strömstad välkomna bidrag inkommit. För vetenskapliga studier hafva delar af museets förråder tillhandahållits Dr. G. ADLERZ samt Docenterna AURIVILLIUS, BERGENDAL, BOVALLIUS och WIRÉN. — Till bearbetning hafva, i förening med bidrag från andra museer, sviter af krustacé-gruppen Squillidæ blifvit utlånade till Dr. H. J. HANSSEN vid universitetets i Köpenhamn zoologiska museum, och af Echinider upplysande exemplar blifvit öfversända till British Museum i London. — Preparerandet af museets exemplar och registrerandet af inkomna tillökningar har oafbrutet fortgått. — Akademiens zoologiska station Kristineberg i Bohuslän har under förra sommaren varit begagnad af Docenterna AURIVILLIUS, BERGENDAL och WIRÉN samt Kandidat O. CARLGREN, äfvensom i Januari och Februari detta år af Docenten WIRÉN, och hafva derifrån värdefulla samlingar kommit Museum till godo, äfvensom blifvit meddelade åt andra offentliga institutioner.

Den *entomologiska afdelningen* af museum har under året såsom gåfvor fått mottaga en samling sällsynta Hemiptera från Dr. G. HORVATH i Budapest, en samling Coleoptera från E. FLEUTIAUX i Paris, ett stort antal Ostindiska Hemiptera och Coleoptera från E. F. ATKINSON i Calcutta, åtskilliga sydafrikanska skalbaggar från L. PÉRINGUEZ i Capstaden, ett stort och väl bibehållet bo af bålgetingen, Vespa crabro, från Konsul A. F. HÖGLUND, en samling lappska insekter från Jägmästaren H. SAMZELIUS i Pajala, en värdefull samling af Lepidoptera heteracera från Kamerun-floden af Grosshandlanden F. THEORIN, samt åtskilliga sällsyntare svenska insekter af Konservator S. LAMPA. — Genom inköp hafva afdelningens samlingar tillökats med en mindre samling fjärilar från Madagascar samt en dylik från södra Europa, en mängd sällsyntare och hufvudsakligen exotiska Coleoptera och Lepidoptera inköpta från Dr. O. STAUDINGER i Blasewitz, några nattfjärilar från Ceylon samt en sam-

ling af 200 fjärilar från stränderna af Napo-floden i det inre af Ecuador. — Med sedvanlig liberalitet har museum till en mängd vetenskapsidkare i olika länder utlånat en mängd insekter för vetenskaplig bearbetning. Bland dessa låntagare må nämnas E. FLEUTIAUX i Paris, G. HORVATH i Budapest, J. FAULT i Libau, W. L. DISTANT i London, H. TOURNIER i Genève och C. D. v. PORAT i Jönköping. För öfrigt hafva museets samlingar för studier och forskningar på platsen anlitats af Konservator S. LAMPA, Häradshöfding J. HULTGREN, Dr. H. NERÉN från Skeninge, Herr G. MÖLLER från Helsingborg, Löjtnant C. GRILL, Konservator W. MEVES, Ingeniör C. G. ANDERSSON från Säter, Jägmästaren J. H. WERMELIN, Byråchefen J. MEVES m. fl.

Den *palæontologiska afdelningen* af Riksmuseum har vunnit tillökning genom gåfvor från J. BÄCKVALL, Professor N. P. HAMBERG, Lektor M. KLINTBERG, Tullförvaltare I. F. LYTH, Byggmästare PALMBERG, Akademiker FR. SCHMIDT och Dr. FR. SVENONIUS. Genom utbyten hafva tillkommit samlingar från universitetsmuseum i Königsberg, Professor LAHUSEN i St. Petersburg, M. PISANI i Paris, Professor SCHLÜTER i Bonn, Professor SZAJROCHA i Krakau och Professor ZITTEL i München. Större och mindre samlingar hafva blifvit inköpta från Östergötland och Gotland samt från mesozoiska och tertiära formationer i Tyskland. — För vetenskapliga arbeten hafva samlingarne begagnats af Dr. APPELLÖF, Mr. DAVIS, Baron G. DE GEER, Dr. G. HOLM, Professor KAISER i Marburg, Dr. KIESOW i Danzig, Docenten MOBERG, Akademiker SCHMIDT, Dr. H. SCHRÖDER i Berlin samt Mr. A. SMITH-WOODWARD i London.

Till *Riksmusei afdelning för arkegoniater och fossila växter* hafva såsom gåfvor lemnats: en särdeles värderik samling preparerade och bestämda mossor från Japan, Korea, Vladivostock och Singapore, innehållande flera för vetenskapen nya arter, af Löjtnanten vid Kongl. Maj:ts flotta STEN ANKARKRONA genom Generaldirektören M. HUSS; mossor från norra Amerika af Lektor N. C. KINDBERG; fossila hasselnötter från Dalarne af Professor H. VON POST; fossila frukter från Australien af Baron FERD.

VON MUELLER i Melbourne; diverse växtfossil från Australien af »Departement for mines» i Melbourne genom svensk-norske Konsuln H. GUNDERSEN derstädes; förstenadt trä från Tyskland och St. Barhelemy af Professor G. LINDSTRÖM, från Island af Läroverksadjunkten TH. THORODDSEN i Reykjavik, från Tyskland af Herr A. F. CARLSON i Limhamn; ett växtaftryck från Italien af Professor M. YOKAYAMA i Tokio; en större samling tertiärväxter från trakten af Bonn af Docenten H. RAUF; fossila trapa-frukter från kusten af Norfolk af statsgeologen CLEMENT REID i London; en instruktiv samling bernsten från Östersjökusten, deribland några i bernsten inneslutna växtlemningar af »West Preussisches Provinzialmuseum» i Danzig, samt en samling brunkolsväxter från Rixhöft af »Naturforschende Gesellschaft zu Danzig», de båda sistnämnda gåfvorna förmedlade genom Director H. CONWENTZ derstädes; diverse gåfvor från Intendenterne för de botaniska och mineralogiska afdelningarne. Genom byte har erhållits fossilt trä från Autun i Frankrike, och genom inköp diverse barrträdskottar, fossila juraväxter från Krakau, fossila trapafrukter från en ny fyndort i Småland, en större samling stenkolsväxter från Tyskland, innehållande vigtiga original till GOLDENBERGS och SCHIMPERS arbeten, juraväxter från England, växtfossil från Skåne, en samling mikroskopiska preparat af stenkolsväxter från England samt silurväxter från Böhmen. — För vetenskaplig bearbetning hafva samlingarne anlitats af Lektor H. W. ARNELL, Professor S. BERGGREN, Doktor V. F. BROTHERUS i Helsingfors, Director H. CONWENTZ i Danzig, Docenten A. NILSSON, Professor V. WITTROCK samt Geheimerath A. SCHENK i Leipzig.

Genom donationer, som af nitälskan för den fosterländska odlingen tid efter annan blifvit till Akademien öfverlemnade, är hon satt i tillfälle att årligen genom belöningar, stipendier eller understöd verka för vetenskapernas främjande. De under det förflutna året sålunda tillgängliga medel hafva blifvit på efterföljande sätt använda.

Räntan å den fond, som af H. M. Konung OSCAR II och några enskilda män blifvit Akademien anförtrodd för astronomiska föreläsningars anordnande i hufvudstaden, har, enligt föreskrift, blifvit lemnad till Akademiens astronom, som under året fortfarande hållit föreläsningar i theoretisk astronomi vid Stockholms Högskola.

Den *Letterstedtska donationen* har afkastat samma årsränta, 9,000 kronor, som under närmast föregående år, hvilken ränta blifvit använd i öfverensstämmelse med donationsurkundens föreskrifter. Sålunda har Letterstedtska resestipendiet, för närvarande belöpande sig till 4,200 kronor, blifvit af universitetskonsistorium i Lund tilldeladt Docenten i zoologi vid samma universitet D. BERGENDAL, som under sin utländska resa hufvudsakligen kommer att egna sig åt studiet af medelhafvets djurverld. Han har, på grund af giltiga skäl, erhållit tillstånd att uppskjuta sin resa intill slutet af innevarande år, hvarför någon reseinstruktion ännu icke blifvit för honom utfärdad. — Det Letterstedtska priset för utmärkta originalarbeten och vigtiga upptäckter har Akademien anvisat åt den i Italien bosatte svenske zoologen Professor TAMERLAN THORELL för hans under året på italienska språket utgifna förtjenstfulla arbete: »Aracnidi Artrogastri Birmani, raccolti da L. FEA. — Det Letterstedtska priset för öfversättning till svenska språket af någon förtjenstfull skrift har blifvit tillerkändt Professor A. G. NATHORST för hans öfversättning och bearbetning af M. NEUMAYERS »Erdgeschichte», med särskild hänsyn till Nordens urverld. — De Letterstedtska räntemedlen för särskildt maktpåliggande vetenskapliga undersökningar har Akademien ställt till Professor P. G. ROSÉNS förfogande för anställande af pendeliakttagelser i Sala grufva. — Af den Letterstedtska donationens årsränta hafva för öfrigt föreskrifna andelar öfverlemnats till Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förtjenta folkskolelärare inom Linköpings stift, till Pastorsembetet i Wallerstads församling af samma stift för utdelande af premier i församlingens folkskola, för bildande af ett sockenbibliotek m. m., samt till Direktionen för Serafimerlasa-

rettet i Stockholm för nödlidande sjuke resandes vård å detta lasarett.

Den *Letterstedtska Föreningens* fonder, hvilka enligt testators bestämmelse stå under Akademiens förvaltning, uppgingo vid 1889 års slut till en sammanlagd summa af 610,385 kronor 89 öre. Af årets räntemedel har ett disponibelt belopp af 16,584 kronor 14 öre blifvit till Föreningens styrelse öfverlemnadt.

Årsräntan af *Wallmarkska donationsfonden*, fördelad i två lika lotter, har Akademien tilldelat dels Fru SOPHIE KOWALEWSKI för en af henne i tidskriften Acta mathematica offentliggjord afhandling med titel: »Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe», och dels Lektorn vid Tekniska Högskolan E. JÄDERIN för en af honom konstruerad apparat att medelst metallsträngar uppmäta geodetiska baslinier.

Framlidne Professor EDLUNDS donationsränta, öfver hvilken Akademien detta år för första gången egt att förfoga, har hon öfverlemnat åt Docenten C. A. MEBIUS såsom understöd för anställande af undersökningar öfver elektricitetens fortplantning genom gaser och dermed sammanhängande fenomen, samt till anskaffande af derför erforderligt starkt elektriskt batteri.

Den *Fernerska belöningen* har hon tillerkänt Professor G. MITTAG-LEFFLER för hans i Öfversigten af Akademiens Förhandlingar införda uppsatser: »Analytisk framställning af integralerna till en lineär homogen differentialeqvation för en cirkelring, hvilken icke innesluter något singulärt ställe», samt: »Analytisk framställning af invarianterna till en lineär differentialeqvation».

Den *Lindbomska belöningen* har Akademien med ena hälften tilldelat Filos. Kandidaten D. S. HECTOR för hans i Öfversigten meddelade undersökning om derivat af svafvelurinämne, och med den andra hälften Filos. Kandidaten W. PALMÆR för hans jemväl i Öfversigten intagna uppsats om iridiums amoniakaliska föreningar.

Den *Flormanska belöningen* har anvisats åt Filos. Doktorn G. ADLERZ för hans i Bihanget till Akademiens Handlingar

offentliggjorda afhandling: »Om digestionssekretionen jemte några dermed sammanhängande fenomen hos insekter och myriopoder».

Det *Beskowska stipendiet*, som äfven denna gång skolat bortgifvas för idkande af biologiska studier, har Akademien tilldelat Docenten CARL AURIVILLIUS för att bereda honom tillfälle att vid Riksmuseum fortsätta och afsluta föregående undersökningar öfver de skandinaviska cirripederna och att studera dervarande exotiska samlingar af krustaceer, tillhörande samma grupp.

Utaf årsräntan af *Regnells zoologiska gåfvomedel* har Akademien anvisat:

till Professor F. A. SMITTS förfogande 400 kronor till bestridande af kostnaderna för resor, som företagas för Riksmusei Vertebratafdelnings räkning,

till Professor CHR. AURIVILLII förfogande 400 kronor för bearbetning af samlingar vid Riksmusei Entomologiska afdelning,

till Docenten C. BOVALLIUS 600 kronor för fortsatt bearbetning af Riksmusei pelagiska amfipoder.

För *vetenskapliga resor* inom landet har Akademien för innevarande år anslagit följande understöd:

åt Professor CHR. AURIVILLIUS 150 kronor för anställande af entomologiska forskningar på Öland samt till besök i Lunds och Malmö museer för granskning af nordiska Lepidoptera,

åt Docenten CARL AURIVILLIUS 150 kronor för biologiska forskningar öfver vissa krustaceer m. m. vid Kristinebergs zoologiska station,

åt Docenten J. C. MOBERG 150 kronor för undersökning af Skånes Kemperbildningar,

åt Herr HUGO DAHLSTEDT 300 kronor för idkande af studier öfver växtslägtet Hieracium inom Medelpad, Jemtland och Herjeådalen,

åt Filos. Kandidaten G. O. ANDERSSON 125 kr. för studerande af laffloran i östra Skåne,

åt Filos. Kandidaten L. ROMELL 125 kronor för undersökningar, hufvudsakligen af kritiska hymenomyceter inom Femsjö och andra trakter af södra Sverige,

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kronor för fortsatta forskningar vid Kristineberg öfver Bohusläns Actinier,

åt Filos. Kandidaten O. HOLMQVIST 150 kronor för undersökningar vid Kristineberg dels öfver visceralskelettets muskulatur hos fiskar, och dels öfver Ophiuridernas anatomi och biologi.

De till Akademiens förfogande ställda statsmedel till instrumentmakeriernas uppmuntran har hon i lika lotter tilldelat fysiska och mathematiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Den minnespenning, som Akademien för detta tillfälle låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot Generallöjtnanten CARL FREDRIK AKRELL.

Genom döden har Akademien under året förlorat bland sina inländska ledamöter: f. d. Professorn vid Tekniska Högskolan VICTOR EGGERTZ, Kongl. Landtbruks-Akademiens f. d. Sekreterare Professor JOHAN ARRHENIUS, Professorn vid Tekniska Högskolan FREDRIK LAURENTS EKMAN, f. d. Professorn vid Upsala universitet PEHR ERIK BERGFALK och f. d. Lotsdirektören och Kommendören i Kongl. Maj:ts Flotta CARL BERTIL LILLIEHÖÖK; samt bland sina utländska ledamöter: f. d. Professorn vid Lucée Henri IV och Jardin des plantes i Paris MICHEL EUGÈNE CHEVREUL, och Civilingeniören i Logelbach vid Colmar GUSTAVE ADOLPHE HIRN.

Med sitt samfund har Akademien deremot förenat, såsom Förste Hedersledamot H. K. H. Hertigen af Nerike Prins EUGEN NAPOLEON NICOLAUS, och såsom inländska ledamöter: Professorn vid Tekniska Högskolan ANDERS LINDSTEDT, Öfverdirektören och Chefen för Kongl. Mariningeniörstaten GÖTHE WILHELM SVENSON, Professorn vid Stockholms Högskola VICTOR RYDBERG, Kemie-Laboratorn vid Lunds universitet JOHAN PETER KLASON samt Bruksegaren och ledamoten af Riksdagens Första

Kammare CARL EDWARD EKMAN; och i utlandet: Professorn i kemi vid universitetet i Bryssel JEAN SERVAIS STAS, Botanicus primarius vid Kejserliga Botaniska trädgården i St. Petersburg CARL JOHAN MAXIMOWICZ, och Professorn i Fysiologi vid universitetet i Berlin EMIL DU BOIS-REYMOND.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 164.)

Kiel. *Sternwarte.*
Lamp, E., Das æquinoctium für 1860.0, abgeleitet aus den ... am Meridiankreise der Altonaer Sternwarte 1859—1862 angestellten Sonnenbeobachtungen. 1882. 4:o.
London. *Entomological society.*
Transactions. Year 1888—89. 8:o.
Moskwa. *Société Imp. des naturalistes.*
Bulletin. Année 1888: 4; 1889: 1, 3. 8:o.
New Haven, U. S. *Observatory of Yale university.*
Report. Year 1888/89. 8:o.
Potsdam. *Astrophysikalisches Observatorium.*
Publicationen. Bd. 4: Th. 2; 6. Berlin 1889. 4:o.
Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-Naturw. Klasse. Jahr 1889: 2. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1889. 8:o.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 31: Text & Atlas; 32. 1888—89. 8:o.
Arbeiten. (2) H. 6. 1889. 8:o.
San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Almanaque nautico. 1890. 8:o.
Taschkend. *Astronomiska och fysikaliska observatoriet.*
Sapiski. B. 3. Moskwa 1889. 4:o.
Tokio. *Observatoire astronomique.*
Annales. T. 1: F. 1. 1889. 4:o.
— *Seismological society of Japan.*
Transactions. Vol. 13: P. 1; 14. 1889. 8:o.
Utrecht. *Sterrenwacht.*
Kaiser, F., De Sterrenhemel. 4:e Druk. D. 2. Deventer 1888. 8:o.
Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Abhandlungen. Bd. 13: H. 1; 15: 1. 1889. st. 4:o.
Jahrbuch. Bd. 39 (1889): H. 1—4. 8:o.
— *K. K. Universitäts-Sternwarte.*
Annalen. (4) Bd. 6 (1886). 4:o.
Författarne.
Lindberg, G. A., Rhipsalis Regnellii G. A. Lindberg. Berlin 1890. 8:o.
— Lepismium(?) dissimile G. A. Lindberg. Berlin 1890. 8:o.
Albert Prince de Monaco, Recherche des animaux marins; progrès réalisés sur l'Hirondelle dans l'outillage spécial. Paris 1889. 8:o.
— Småskrift. 1.
Arnold, F., Die Lichenen des Fränkischen Jura. Stadtamhof 1890. 4:o.
Bonaparte, Prince Roland, Le glacier de l'Aletsch et le lac de Märjelen. Paris 1889. 4:o.

— Le premier établissement des Néerlandais à Maurice. Paris 1890. 4:o.
FOLIE, F., Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde. P. 2. Bruxelles 1888. 4:o.
PETER, B., Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 1444, sowie einer Sterngruppe bei *o*Piscium. Lpz. 1889. st. 8:o.

Stockholm, 1890. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 5.

Onsdagen den 14 Maj.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att bland Akademiens svenska och norska ledamöter genom döden afgått f. d. Generaldirektören och Ordföranden i Sundhetskollegium MAGNUS HUSS, f. d. Professorn i medicin vid Christiania universitet FRANZ CHRISTIAN FAYE, och f. d. Professorn i astronomi vid Upsala universitet HERMAN SCHULTZ.

Friherre NORDENSKIÖLD förevisade och redogjorde för fynd af vulkaniska bergarter vid sjön Dellen i Helsingland och sjön Mien i Småland, som blifvit gjorda af geologerna D:r N. A. HOLST och D:r F. V. SVENONIUS.

Professor AURIVILLIUS lemnade en redogörelse för Kandidaten H. SCHÖTTS berättelse om den resa i Jemtlands fjelltrakter, som han med understöd af Akademien under förlidet år företagit hufvudsakligen för att studera poduridfaunan i dessa trakter. Densamme meddelade äfven några af honom sjelf gjorda iakttagelser angående könens fördelning i galläplen till Andricus ramuli.

Hr LINDSTRÖM refererade en af Docenten G. HOLM författad och inlemnad afhandling om Gotlands Graptoliter (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr MITTAG-LEFFLER meddelade för intagande i Akademiens skrifter följande uppsatser: 1:o) »Om användningen af oändliga determinanter inom teorin för lineära homogena differentialeqvationer» af Fil. Kandidaten H. VON KOCH*, 2:o) »Om en generalisering af de KLEINska funktionerna af tredje familjen» af Fil. Kandidaten G. CASSEL*, 3:o) »Invarianta uttryck för den POINCARÉska generaliserade substitutionen» af Fil. Kandidaten F. DE BRUN*, 4:o) »Integralernas form vid lineära differentialeqvationer» af Fil. Kandidaten A. M. JOHANSON*.

Sekreteraren öfverlemnade på författarnes vägnar följande inkomna afhandlingar: 1:o) »Bidrag till kännedomen om Sveriges Chlorophyllophyceer. I. Chlorophyllophyceer från Roslagen» af Fil. Kandidaten O. F. ANDERSSON (se Bihang etc.), 2:o) »Helminthologische Beobachtungen von der Westküste Norwegens. Th. I. Cestoden» af Fil. Licentiaten E. LÖNNBERG (se Bihang etc.), 3:o) »Einige Muriceiden der Gattungen Acanthogorgia, Paramuricea och Echinomuricea im zoologischen Museum von Upsala» af Fil. Kandidaten T. HEDLUND (se Bihang etc.).

Genom anstäldt val kallades Akademiens Fysiker Professorn D:r KLAS BERNHARD HASSELBERG till ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

H. MAJ:T KONUNGEN.

Amerika's Nordwestküste. Neueste Ergebnisse ethnologischer Reisen. Berlin 1883. Fol.

MAHLER, E., Chronologische Vergleichungs-Tabellen. Bd. 1. Wien 1889. 4:o.

Stockholm. *Svenska turistföreningen.*

Årsskrift. År 1890. 8:o.

Albany. *New York state museum of natural history.*

Annual report. 42 (1888). 8:o.

(Forts. å sid. 282.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 104.

Om användningen af oändliga determinanter inom teorin för lineära homogena differentialeqvationer.

I.

Af HELGE VON KOCH.

[Meddeladt den 14 Maj 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

Låt koefficienterna $P_r(x)$ i den lineära homogena differentialekvationen

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

vara entydiga analytiska funktioner, hvilka i omgifningen af ett visst ställe — låt vara punkten $x = 0$ — kunna utvecklas i LAURENT'ska serier; det existerar då som bekant åtminstone en integral, som i omgifningen af $x = 0$ låter skrifva sig under formen

$$y = x^{\varrho}\left\{\mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

där ϱ betecknar en viss af x oberoende storhet och $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ äro potensserier, hvilka fortskrida, den förra efter positiva, den senare efter negativa potenser af x [1]). I det speciella fall, att $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ endast innehåller ett *ändligt* antal termer, kunna koefficienterna i serien y genom rekursionsformler framställas som funktioner af differentialekvationens konstanter [2]). Om man där-

---

[1]) FUCHS: »Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten»; Borchardt's J. Bd. 66.

[2]) FUCHS l. c.; FROBENIUS: »Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen»; Borchardt's J. Bd. 76. Jfr äfven JOHANSON: »Integralernas form vid lineära differentialeqvationer». Öfvers. af K. Vet.-Ak. förh. 1889, N:o 7.

emot i det allmänna fallet söker bestämma ifrågavarande koefficienter, finner man, att de måste satisfiera ett oändligt lineärt ekvationssystem. Ett sådant system har behandlats för första gången af G. W. HILL [1]), som vid integration af en viss lineär differentialekvation af andra ordningen infört och studerat en för det motsvarande oändliga ekvationssystemet karakteristisk determinent $\square\ (c)$. För konvergensen äfvensom för tillvaron af öfriga af HILL angifna egenskaper hos $\square\ (c)$ har POINCARÉ [2]), med tillhjelp af tvänne vigtiga satser om konvergensen hos oändliga determinanter, lemnat stränga och fullt tillfredsställande bevis. Om man begagnar sig af definitionen:

»En determinant Δ_n af ordningen n är konvergent om, sedan man fastställt ett godtyckligt positivt tal δ, det alltid är möjligt att finna ett positivt tal n' sådant att olikheten

$$|\Delta_n - \Delta_{n+p}| < \delta$$

för godtyckliga positiva heltalsvärden på p eger rum så snart $n > n'$,» kunna POINCARÉS satser uttalas på följande sätt:

»För att en determinant Δ_n, i hvilken de element som tillhöra principaldiagonalen äro ettor, skall vara konvergent, är det tillräckligt att summan af de element, som icke tillhöra principaldiagonalen, är absolut konvergent», och

»Om denna summa är absolut konvergent, förblir Δ_n konvergent i fall man ersätter elementen i en hvilken som helst af dess rader eller kolonner med storheter, hvilka till sitt absoluta belopp ej öfverstiga en viss ändlig gräns».

På uppmaning af Prof. MITTAG-LEFFLER har jag stält mig uppgiften att undersöka, huruvida icke det allmänna fallet,

---

[1]) »On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon», Cambridge, Wilson 1877; Acta mathematica. Bd. 8.

[2]) POINCARÉ: »Sur les déterminants d'ordre infini», Bulletin de la Société mathématique de France, T. 14. p. 77; se för öfrigt de litteraturanvisningar, som finnas bifogade förf:s uppsats: »Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta», Öfvers. af K. Vet.-Ak. förh. 1890. N:o 3, s. 109.

då en godtycklig lineär homogen differentialekvation är gifven, skulle kunna behandlas med tillhjelp af oändliga determinanter; i det arbete, hvars första afdelning här meddelas, skall jag söka visa huru en dylik undersökning kan genomföras.

Är den gifna differentialekvationen af n:te ordningen, kan man genom en bekant substitution transformera den till en annan, i hvilken den $n - 1$:ta derivatan saknas. Låt oss således betrakta en ekvation af formen

$$(1)\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0;$$

antag att i omgifningen af punkten $x = 0$ framställningen

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r = 2,\ 3 \ldots n)$$

gäller för alla värden på x som uppfylla olikheten

$$(2)\qquad R < |x| < R',$$

där R och R' äro vissa positiva tal om hvilka vi kunna antaga att

$$R < 1 < R';$$

ty vore detta icke fallet skulle man genom substitutionen

$$x = \sqrt{RR'} \cdot z$$

erhålla en differentialekvation i z, för hvilken detta vilkor vore uppfyldt.

Inom den genom (2) definierade cirkelringen (RR') existerar åtminstone en integral af formen

$$(3)\qquad y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\varrho+\lambda};$$

för att bestämma storheterna ϱ och g_λ införa vi serien (3) i $P(y)$ och ponera

$$\varphi(\varrho) = \varrho(\varrho - 1)\,..\,(\varrho - n + 1) + \varrho(\varrho - 1)\,..\,(\varrho - n + 3)\alpha_{2,-2} + \\ + \ldots + \alpha_{n,-n}$$

$$A_{m\lambda} = (\varrho + \lambda)(\varrho + \lambda - 1)\,..\,(\varrho + \lambda - n + 3)\alpha_{2,m-\lambda-2} + \ldots + \\ + (\varrho + \lambda)\alpha_{n-1,m-\lambda-n+1} + \alpha_{n,m-\lambda-n}$$

$$G_m(\varrho) = \varphi(\varrho + m)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda}g_\lambda\ ^{1)};$$

då blir

$$(4) \qquad P(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(\varrho)x^{\varrho+m-n};$$

således måste ϱ och g_λ satisfiera det oändliga ekvationssystemet

$$G_m(\varrho) = 0 \qquad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots .)$$

som, om vi sätta

$$\psi_{mm}(\varrho) = 1; \quad \psi_{m\lambda}(\varrho) = \frac{A_{m\lambda}}{\varphi(\varrho + m)} \quad (m \neq \lambda)$$

antar formen

$$\varphi(\varrho + m)\Sigma_\lambda \psi_{m\lambda}(\varrho)g_\lambda = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Bilda nu den oändliga determinanten

$$(5) \qquad \Omega(\varrho) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \ldots & \psi_{-m,0} & \ldots & \psi_{-m,m} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \psi_{0,-m} & \ldots & 1 & \ldots & \psi_{0,m} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \psi_{m,-m} & \ldots & \psi_{m,0} & \ldots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

För att densamma skall konvergera är det enl. den anförda satsen af POINCARÉ tillräckligt att dubbelserien

$$S = \Sigma_m \Sigma'_\lambda \,|\, \psi_{m\lambda}(\varrho) \,|$$

är konvergent.

---

1) Tecknet $'$ utmärker att vid summationen värdet $\lambda = m$ är uteslutet.

Skrif $m - \nu$ i stället för λ och ponera

$$(\varrho + m - \nu)(\varrho + m - \overline{\nu + 1}) \ldots (\varrho + m - \overline{\nu + n - k - 1}) =$$
$$= (\varrho + m)^{n-k} + h_1^{(k)}(\nu)(\varrho + m)^{n-k-1} + \ldots + h_{n-k}^{(k)}(\nu),$$

då med $h_r^{(k)}(\nu)$ förstås ett visst heltaligt polynom i ν af graden r. Då blir

$$A_{m,m-\nu} = H_2(\nu)(\varrho + m)^{n-2} + H_3(\nu)(\varrho + m)^{n-3} + \ldots + H_n(\nu)$$

$$H_2(\nu) = \alpha_{2,\nu-2}; \quad H_3(\nu) = h_1^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + \alpha_{3,\nu-3}; \ldots .$$

$$H_r(\nu) = h_{r-2}^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + h_{r-3}^{(3)}(\nu)\alpha_{3,\nu-3} + \ldots \alpha_{r,\nu-r}.$$

Således är

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} |\psi_{m,m-\nu}(\nu)| \leqq |H_2(\nu)| \left|\frac{(\varrho + m)^{n-2}}{\varphi(\varrho + m)}\right| \\ + |H_3(\nu)| \left|\frac{(\varrho + m)^{n-3}}{\varphi(\varrho + m)}\right| + \ldots + |H_n(\nu)| \left|\frac{1}{\varphi(\varrho + m)}\right| \end{aligned}$$

Serierna

$$S_r = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' |H_r(\nu)| \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

äro konvergenta eftersom punkten 1 antogs ligga inom konvergensområdet för serierna $P_r(x)$, vi kunna derför skrifva

$$S \leqq S_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{(\varrho + m)^{n-2}}{\varphi(\varrho + m)}\right| + S_3 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{(\varrho + m)^{n-3}}{\varphi(\varrho + m)}\right| + \ldots +$$
$$+ S_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\varphi(\varrho + m)}\right|.$$

Emedan $\varphi(\varrho + m)$ är af graden n i afseende på m äro serierna

$$\sigma_r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{(\varrho + m)^{n-r}}{\varphi(\varrho + m)}\right| (r = 2, 3, \ldots n)$$ konvergenta för alla värden på ϱ som *ej* uppfylla någon af likheterna

$$\varphi(\varrho + m) = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Således konvergerar serien S och häraf följer att *den oändliga determinanten $\Omega(\varrho)$ är konvergent.*

Betrakta nu $\varrho = u + iv$ såsom en variabel punkt i planet; låt B vara ett ändligt område sådant, att inom eller på gränsen till detsamma ej finnas några nollställen till funktionerna $\varphi(\varrho + m)$. Det är då lätt att se, att serierna σ_r äro *likformigt* konvergenta inom området B. Således är serien S och således äfven produkten

$$\Pi_m(1 + \Sigma'_\lambda \,|\, \psi_{m\lambda}(\varrho) \,|)$$

likformigt konvergent inom B; denna produkt låter derför utveckla sig i en viss likformigt konvergerande serie Σ. Således kan produkten

$$\Pi_m(1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda}(\varrho))$$

skrifvas under formen af en likformigt konvergerande serie Σ_1 i hvilken hvarje term till sitt absoluta belopp är mindre eller möjligen lika motsvarande term i Σ. Om vi nu i serien Σ_1 ersätta vissa termer med noll och multiplicera de öfriga, allt efter de olika fall som kunna inträffa, med $+1$ eller -1, erhålles en viss serie Σ_2, som är lika med utvecklingen af determinanten $\Omega(\varrho)$. Häraf och af en bekant egenskap hos likformigt konvergenta serier följer, att i omgifningen af en godtycklig punkt ϱ_0 inom B funktionen $\Omega(\varrho)$ kan framställas under formen

$$\Omega(\varrho) = \mathfrak{P}(\varrho - \varrho_0)\,.$$

Definiera nu tvänne områden C och C på följande sätt. Drag parallelt med den reela axeln i uv-planet tvänne räta linier K och K' så, att de innesluta samtliga nollställen till funktionerna $\varphi(\varrho + m)$. Drag sedan godtyckligt tvänne räta linier L och L' parallela med den imaginära axeln. Det område som begränsas af linierna L, L' och K må betecknas med C och det som begränsas af L, L' och K' med C'. Man bevisar då lätt, att serierna σ_r $(r = 2, 3 \ldots . n)$ äro likformigt konvergenta såväl inom C som inom C'; häraf följer att man erhåller $\lim\limits_{v=\pm\infty} \Omega(\varrho)$ om man i hvarje term af Σ_2 sätter $v = \pm\infty$; men Σ_2 har formen

$$\Sigma_2 = 1 + \text{termer som försvinna för } v = \pm\infty\,,$$

således:

$$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\varrho) = 1.$$

Man ser genast att

$$\psi_{m\lambda}(\varrho + 1) = \psi_{m+1,\,\lambda+1}(\varrho) \tag{7}$$

och häraf följer att $\Omega(\varrho)$ *är en periodisk funktion med perioden 1.*

Då det vidare är tydligt, att den analytiska funktionen $\Omega(\varrho)$ i omgifningen af hvart och ett af nollställena till funktionerna $\varphi(\varrho + m)$ är af rationel karakter, är härmed bevisadt, att $\Omega(\varrho)$ låter skrifva sig som ett aggregat af funktionerna $\cot g\,(\varrho - \varrho_\lambda)\pi$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \beta)$ och deras derivator [1]) då $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_\beta$ äro de af rötterna till likheten

$$\varphi(\varrho) = 0 \tag{8}$$

som icke skilja sig från hvarandra med noll eller hela tal. Antag för enkelhetens skull att $\beta = n$, d. v. s. att likheten (8) har n olika rötter

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n,$$

som ej skilja sig på hela tal. I omgifningen af ett ställe $\varrho = \varrho_\lambda$ gäller då en utveckling af formen

$$\Omega(\varrho) = \frac{M_\lambda}{\varrho - \varrho_\lambda} + \mathfrak{P}_\lambda(\varrho - \varrho_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n), \tag{9}$$

där M_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ äro vissa konstanter. På grund häraf kan $\Omega(\varrho)$ skrifvas

$$\Omega(\varrho) = M + \pi \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \cot g\,(\varrho - \varrho_\lambda)\pi\,.$$

Om vi i denna likhet låta v växa ena gången mot $+\infty$, andra gången mot $-\infty$, erhållas relationerna

$$1 = M - \pi i \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda$$

$$1 = M + \pi i \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda$$

[1]) Se t. ex. Cours de M. Hermite, 3:me édition p. 104.

d. v. s.

$$M = 1; \quad \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda = 0.$$

Således är

$$(10) \qquad \Omega(\varrho) = 1 + \pi \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \operatorname{cotg}(\varrho - \varrho_\lambda)\pi$$

och om vi ponera

$$e^{2\pi i \varrho} = \omega; \quad e^{2\pi i \varrho_\lambda} = \omega_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

erhåller denna likhet formen

$$(11) \qquad \Omega(\varrho) = 1 + 2\pi i \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{M_\lambda \omega_\lambda}{\omega - \omega_\lambda}.$$

Emedan serien Σ_2 är absolut konvergent, kunna dess termer ordnas efter behag; specielt kunna vi ordna dem efter elementen i en rad eller kolonn hvilken som helst i determinanten $\Omega(\varrho)$; om vi exempelvis välja den m:te raden [1]) och beteckna med $\Psi_{m\lambda}(\varrho)$ koefficienten för $\psi_{m\lambda}(\varrho)$ kunna vi skrifva

$$(12) \qquad \Omega(\varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\varrho) \Psi_{m\lambda}(\varrho).$$

Af relationen (7) och formen (5) för determinanten $\Omega(\varrho)$ framgår att

$$\Psi_{m\lambda}(\varrho + 1) = \Psi_{m+1, \lambda+1}(\varrho)$$

eller, allmännare, att relationen

$$(13) \qquad \Psi_{m\lambda}(\varrho + p) = \Psi_{m+p, \lambda+p}(\varrho),$$

hvarest p är ett godtyckligt helt tal, eger rum.

Emedan samtliga element i $\Omega(\varrho)$ till sitt absoluta belopp ej öfverstiga en viss ändlig gräns, kan man, utan att därigenom rubba konvergensen [2]), ersätta elementen i en rad hvilken som

[1]) = den rad där elementens *första* index är m; den λ:te kolonnen = den, i hvilken elementens *andra* index är λ.

[2]) Jfr sid. 226.

helst med de motsvarande elementen i en annan rad; men den så erhålla nya determinanten är noll, eftersom i densamma två rader äro identiska; således gälla likheterna

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\varrho) \Psi_{p\lambda}(\varrho) = 0\,, \tag{14}$$

där m och p blott äro underkastade vilkoret $m \neq p$. Af liknande skäl är

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\varrho) \Psi_{mq}(\varrho) = 0 \quad (\lambda \neq q)\,. \tag{15}$$

För att verkligen framställa funktionen $\Psi_{m\lambda}(\varrho)$ behöfver man blott observera, att man erhåller densamma genom att i den m:te raden eller i den λ:te kolonnen ersätta elementet $\psi_{m\lambda}$ med 1 och öfriga element med 0.

Af (4), (12) och (14) framgår nu att om vi ponera

$$y(x,\varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p\lambda}(\varrho) x^{\varrho+\lambda} \tag{16}$$

satisfierar serien $y(x, \varrho)$ formelt differentialekvationen

$$P(y) = \varphi(\varrho + p)\Omega(\varrho) x^{\varrho+p-n}\,. \tag{17}$$

För att bevisa konvergensen hos densamma kan man gå till väga på följande sätt. Ersätt elementen i den p:te raden i determinanten $\Omega(\varrho)$:

$$\ldots\, \psi_{p,-m}\,,\ \psi_{p,-m+1}\,, \ldots,\ \psi_{po}\,, \ldots,\ \psi_{p,m-1}\,,\ \psi_{pm}\,, \ldots$$

med storheterna

$$\ldots\, x^{\varrho-m},\ x^{\varrho-m+1}, \ldots,\ x^{\varrho}, \ldots,\ x^{\varrho+m-1},\ x^{\varrho+m}, \ldots;$$

den så erhållna determinanten är intet annat än serien $y(x,\varrho)$; multiplicera elementen i dess m:te kolonn med x^{-m} och elementen i dess m:te rad med x^{+m} och upprepa denna operation för hvarje positivt och negativt heltalsvärde på m. Determinantens värde har därigenom uppenbarligen ej undergått någon

förändring, men dess form är nu sådan, att elementen i den m:te raden äro

$$\ldots \psi_{m,-m}x^{2m},\ \psi_{m,-m+1}x^{2m-1}, \ldots \psi_{mo}x^{m}, \ldots, \psi_{m,m-1}x,\ 1, \ldots$$

under det att i den p:te samtliga element äro $= x^{\varrho+p}$; determinanten $y(x, \varrho)$ skrifven under denna form må betecknas med $\bar{y}(x,\varrho)$. För att öfvertyga sig om konvergensen hos $\bar{y}(x,\varrho)$ är det tillräckligt att observera att olikheten (6) kan skrifvas

$$|\psi_{m,m-\nu}(\varrho)x^{\nu}| \leqq \left|\frac{(\varrho+m)^{n-2}}{\varphi(\varrho+m)}\right| |H_2(\nu)x^{\nu}| + \ldots + \left|\frac{1}{\varphi(\varrho+m)}\right| \cdot |H_n(\nu)x^{\nu}|$$

och att serierna

$$\bar{S}_r = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |H_r(\nu)x^{\nu}| \qquad (r = 2, 3, \ldots n$$

äro konvergenta inom cirkelringen (RR'); ty däraf följer, att äfven serien

$$\bar{S} = \Sigma_m \Sigma'_\lambda |\psi_{m\lambda}(\varrho)x^{m-\lambda}|$$

är konvergent inom (RR') och således, på grund af de båda Poincaréska konvergenskriterien, att determinanten $\bar{y}(x,\varrho)$ konvergerar inom samma område. Följaktligen är serien $y(x, \varrho)$ konvergent och framställer inom området (RR') en integral till differentialekvationen (17). För att densamma skall vara en integral till den gifna differentialekvationen (1) är det nödvändigt och tillräckligt att ϱ satisfierar likheten

(18) $$\varphi(\varrho + p)\Omega(\varrho) = 0.$$

Antag nu att ingen af de genom (9) definierade storheterna $M_\lambda(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ är noll. I detta fall har likheten (18) samma rötter som likheten

(19) $$\Omega(\varrho) = 0;$$

om ϱ' är en rot till (19) är följaktligen $y(x, \varrho')$ en integral till den gifna differentialekvationen.

Är ϱ' en *enkelrot* till likheten (19), kunna ej samtliga funktionerna $\Psi_{m\lambda}(\varrho)$ försvinna för $\varrho = \varrho'$; ty på grund af de egenskaper hos produkten

$$\Pi = \Pi_m(1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda}),$$

som i det föregående framhållits, inses utan svårighet att man kan skrifva

$$\frac{d\Pi}{d\varrho} = \Sigma_m \Sigma'_\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}} \psi'_{m\lambda}. \tag{20}$$

Storheterna

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}} = \frac{\Pi}{1 + \Sigma_\lambda \psi_{m\lambda}}$$

ligga alla till sitt absoluta belopp under en viss ändlig gräns då ϱ befinner sig inom området B och serien

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda \psi'_{m\lambda}$$

är, såsom man lätt finner, absolut och likformigt konvergent inom samma område; således är serien i högra membrum af (20) absolut och likformigt konvergent; insätt på båda sidor af denna likhet istället för produkten Π den därmed ekvivalenta serien Σ_1 och öfvergå från serien Σ_1 till serien Σ_2 (se sid. 230); (20) antar då utseendet

$$\frac{d\Omega(\varrho)}{d\varrho} = \Sigma_m \Sigma'_\lambda \frac{\partial \Omega(\varrho)}{\partial \psi_{m\lambda}} \psi'_{m\lambda}.$$

Om nu för $\varrho = \varrho'$ samtliga funktionerna

$$\frac{\partial \Omega(\varrho)}{\partial \psi_{m\lambda}} = \Psi_{m\lambda}(\varrho)$$

försvunne, så vore ϱ' ett nollställe till funktionen $\dfrac{d\Omega(\varrho)}{d\varrho}$, hvilket strider mot förutsättningen.

Man kan således välja index p för funktionerna $\Psi_{p\lambda}(\varrho)$ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .)$ så, att serien (16) icke blir identiskt noll för $\varrho = \varrho'$; med användning af FUCHS' terminologi kan man säga, att *integralen* $y(x, \varrho')$ *hör till roten* $\varrho = \varrho'$.

Betrakta det fall, när den periodiska funktionen $\Omega(\varrho)$ har n inkongruenta nollställen

$$\varrho', \varrho'', \ldots, \varrho^{(n)};$$

hvilka då på grund af (10) måste vara *enkel*-rötter till likheten (19). Emot roten $\varrho = \varrho^{(r)}$ svarar ett helt tal p_r sådant, att

icke samtliga funktionerna $\Psi_{p_r\lambda}(\varrho)$ $(\lambda = 0, \pm 1, \ldots)$ försvinna för $\varrho = \varrho^{(r)}$; således: om vi ponera

$$y_r(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p_r\lambda}(\varrho) x^{\varrho+\lambda},$$

hör integralen $y_r(x, \varrho^{(r)})$ till roten $\varrho = \varrho^{(r)}$. På grund af (13) är

$$\Psi_{p_r\lambda}(\varrho) = \Psi_{0,\lambda-p_r}(\varrho + p_r);$$

sätt

$$Y(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{0,\lambda}(\varrho) x^{\varrho+\lambda},$$

då gäller relationen

$$y_r(x, \varrho) = Y(x, \varrho + p_r),$$

hvaraf slutligen följer att *serierna*

$$Y(x, \varrho' + p_1),\ Y(x, \varrho'' + p_2), \ldots, Y(x, \varrho^{(n)} + p_n)$$

framställa för cirkelringen (RR') *ett fundamentalsystem integraler till den gifna differentialekvationen.*

I det föregående har jag antagit att

1:o rötterna till likheten (8) äro olika och ej skilja sig på hela tal.

2:o samtliga storheterna $M_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots n)$ äro skilda från noll.

3:o funktionen $\Omega(\varrho)$ har n inkongruenta nollställen;

i en följande uppsats skall jag betrakta de fall, då dessa vilkor ej äro uppfylda.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 106.

Om en generalisering af de KLEIN'ska funktionerna af tredje familjen.

Af GUSTAV CASSEL.

[Meddeladt den 14 Maj 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

Jag har redan för en tid sedan haft tillfälle meddela en undersökning öfver problemet att konformt afbilda en af oändligt många cirklar begränsad plan figur på planet[1]). Detta problem leder, såsom jag visat, till en klass af entydiga analytiska funktioner, som äro oförändrade för oändligt många af hvarandra oberoende linjära substitutioner.

Allt sedan jag funnit detta speciela exempel, var det min sträfvan att i ett mera allmänt fall studera substitutionsgrupper, som härledas af ett system af oändligt många fundamentalsubstitutioner, samt att bilda de motsvarande invarianta funktionerna. Bland de olika familjer, hvari POINCARÉ indelar linjära substitutionsgrupper, torde de KLEIN'ska grupperna af tredje familjen ur flera synpunkter kunna anses såsom den enklaste[2]). Bortsedt från vissa väl kända specialfall, såsom de dubbelperiodiska funktionerna och modulfunktionen, äro också de mot denna familj svarande invarianta funktionerna bäst kända, detta tack vare SCHOTTKYS utmärkta afhandling: »Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt»[3]).

[1]) Bihang till K. V. A:s Handlingar 1890.

[2]) Jfr. POINCARÉ: Mémoire sur les groupes kleinéens § 6. Acta Mathematica. T. 3.

[3]) Journal für die Mathematik, T. 101, p. 227. Den klass af grupper, som SCHOTTKY behandlar, är dock endast ett specielt fall af den tredje familjen.

Det är en generalisering i nu antydda riktning af de KLEIN'ska grupperna och funktionerna af tredje familjen, som jag i det följande vill söka utföra.

1.

Låtom oss tänka oss tvänne oändliga rader af cirklar i planet

$$C_1\,C_2 \ldots C_i \ldots$$
$$C_{1'}C_{2'} \ldots C_{i'} \ldots$$

Dessa cirklar skola allesammans ligga utanför hvarandra. Häraf följer, att stället ∞ ligger utanför alla cirklarne. Man kan dessutom anta, att inga cirklar ligga i den närmaste omgifningen af stället ∞. Är detta vilkor icke uppfyldt, så kan man alltid genom ett enkelt ombyte af variabel reducera problemet på detta fall. Vi anta således, att vi kunna finna ett visst ändligt område i planet, inom hvilket alla cirklarne C befinna sig.

I det fall, att man har ett ändligt antal cirklar, fordrar man också för att erhålla en grupp af tredje familjen, att cirklarne ej få tangera hvarandra, d. v. s. att minsta afståndet mellan punkter tillhörande olika cirkelperiferier ej får understiga en viss ändlig kvantitet.

Detta vilkor är naturligtvis icke i vårt fall uppfyldt, men vi kunna finna ett analogt, som vi kunna precisera på följande sätt:

»Man måste kunna finna ett ändligt tal σ, sådant, att om r_α och r_β äro radier i tvänne godtyckliga cirklar C_α och C_β, och ε minsta afståndet mellan punkter tillhörande dessa cirklar, åtminstone endera af olikheterna

$$\frac{\varepsilon}{r_\alpha} > \sigma\,, \quad \frac{\varepsilon}{r_\beta} > \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

äger rum.»

Vi förutsätta i det följande, att vara cirklar uppfylla detta vilkor.

Medelpunkterna till cirklarne C bilda en punktmängd P. Dess första deriverade punktmängd P' ligger helt och hållet utom cirklarne C_i. Följaktligen har P' ingen punkt gemensam med P. Däremot måste punktmängderna $P''P'''$ ... tillhöra P'.

På beskaffenheten af punktmängden P' beror väsentligen hela gruppens karaktär, och naturligtvis också de funktionsteoretiska ägenskaperna hos de funktioner, som bli oförändrade för substitutioner tillhörande gruppen.[1] Är t. ex. P' en öfver alt tät punktmängd, så kan hon möjligtvis innesluta ett visst område af planet. I sådant fall skola vi se, att våra funktioner erhålla ett begränsadt existensområde.

Det område, som uppkommer därigenom, att vi från planet utesluta alla cirklarne C_i samt punktmängden P', kalla vi fundamentalpolygon och beteckna detsamma med R_0. Hvad själfva begränsningen angår, göra vi följande öfverenskommelse: Vi tänka oss hvarje cirkel C_i tillordnad en cirkel $C_{i'}$. Af dessa båda cirkelperiferier, som sålunda bilda konjugerade sidor i vår fundamentalpolygon R_0, anse vi den ena, likgiltigt hvilken, tillhöra R_0, den andra icke.

Låtom oss nu införa tvänne oändliga rader af linjära funktioner:

$$f_1(z) \dots . f_i(z) \dots .$$
$$f_{1'}(z) \dots . f_{i'}(z) \dots .$$

Dessa definieras på följande sätt: Substitutionen $f_i(z)$ öfverför det yttre af cirkeln $C_{i'}$ i det inre af cirkeln C_i; substitutionen $f_{i'}(z)$ öfverför det yttre af cirkeln C_i i det inre af cirkeln $C_{i'}$. Man ser häraf, att funktionerna f_i och $f_{i'}$ äro inversa, så att om

$$x = f_i(z) ,$$

så är samtidigt

$$z = f_{i'}(x) .$$

Koefficienterna i dessa linjära substitutioner äro i allmänhet komplexa tal, som genom de nu uppstälda fordringarne bestämmas så när som på tre reela konstanter, hvilka förbli godtyckliga.

[1]) Den brist, som onekligen ligger i att ej äga ett särskildt namn för sådana funktioner, har nyligen blifvit fyld, i det KLEIN infört uttrycket automorfa funktioner. Göttinger Nachrichten Mars 1890. Detta har emellertid icke kommit till min kännedom förr än detta arbete var färdigt.

Våra substitutioner äro antingen hyperboliska eller loxodromiska och ha en dubbelpunkt inom hvardera cirkeln.

Om $f_\lambda(z)$ är en af dessa substitutioner, så öfvergår genom denna substitution stället z i ett därmed *kongruent* ställe, som vi vilja beteckna med z_λ. Vidare beteckna vi $f_\mu(z_\lambda)$ med $f_{\lambda\mu}(z)$ eller $z_{\lambda\mu}$, $f_\nu(z_{\lambda\mu})$ med $f_{\lambda\mu\nu}(z)$ eller $z_{\lambda\mu\nu}$ o. s. v. Genom substitutionen

$$(z, f_{\lambda\mu\nu\ldots}(z))$$

öfvergår fundamentalpolygonen R_0 i ett område $R_{\lambda\mu\nu\ldots}$, som är en konform afbildning af R_0.

En index, som är sammansatt af n-stycken element $\lambda\mu\nu\ldots$, säga vi vara af n^{te}-ordningen. Det är klart, att ett ställe, som tillhör ett område $R_{\lambda\mu\nu\ldots}$, hvars index är af n^{te}-ordningen, ligger innanför n-stycken cirklar, af hvilka den närmast omslutande kan betecknas med $(\lambda\mu\nu\ldots)$ och är en konform afbildning af cirkeln C_λ. Är ω det sista elementet i vår index, så är C_ω den af fundamentalcirklarne, innanför hvilken polygonen $R_{\lambda\mu\nu\ldots\omega}$ befinner sig.

Jag inför nu i hufvudsaklig öfverensstämmelse med POINCARÉ[1]) och andra författare på detta område följande definition: »En grupp af linjära substitutioner säges vara oegentligt diskontinuerlig i omgifningen af ett ställe A, om man efter att hafva valt ett område a godtyckligt litet inneslutande stället A, och inom a valt ett värde z, alltid inom området a kan finna ett med z kongruent värde z'. I motsatt fall är gruppen egentligt diskontinuerlig i omgifningen af stället A.

Jag påstår, att den substitutionsgrupp G, som innehåller alla tänkbara kombinationer af våra fundamentalsubstitutioner $f_i f_{i'}$, är egentligt diskontinuerlig i hela planet, med undantag för vissa singulära ställen.

Genom substitutionen f_a öfvergår fundamentalpolygonen R_0 i en polygon R_a, som ligger *helt och hållet inom cirkeln* C_a. Om begränsningen af den till C_a konjugerade cirkeln $C_{a'}$ tillhör fundamentalpolygonen, så hör begränsningen af C_a icke till denna

[1]) »Mémoire sur les groupes kleinéens» Acta Mathematica, T. 3, p. 57.

polygon. Däremot hör begränsningen af C_α till polygonen R_α. Om åter periferin $C_{\alpha'}$ icke tillhör R_0, så hör periferin C_α icke till R_α; däremot hör C_α till R_0. I hvarje fall tillhör begränsningen mellan de båda områdena endast det ena.

Följaktligen ha R_0 och R_α ingen punkt gemensam.

Genom en substitution f_β öfvergår R_α i ett område $R_{\alpha\beta}$, som ligger helt och hållet inom cirkeln $C_{\alpha\beta}$. Begränsningen tillhör äfven nu endast det ena området.

Ett område $R_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ omslutes närmast af ett område $R_{\beta\gamma\ldots}$, detta åter af ett område $R_{\gamma\ldots}$ o. s. v. Dessa områden ha emellertid intet ställe gemensamt. På detta sätt kan man fortsätta i oändlighet. Man inser lätt, att alla områden $R_{\alpha\beta\ldots}$, man på detta sätt erhåller, fullständigt utesluta hvarandra.

Häraf följer nu, att vår grupp icke kan innehålla någon s. k. »substitution infinitésimal»[1]).

Är nämligen f_μ en sådan substitution, så är

$$|z_\mu - z|$$

en oändligt liten kvantitet för hvarje värde på z. Tänka vi oss t. ex. z inom R_0, så ligger z_μ inom R_μ. Vi kunna tydligen alltid välja z så, att $|z_\mu - z|$ är $>$ en godtyckligt uppgifven kvantitet.

Vår grupp är således i allmänhet diskontinuerlig. Återstår att visa, för hvilka ställen diskontinuiteten är oegentlig.

Låtom oss tänka oss ett ställe A, samt ett visst litet område a omkring detsamma. Låtom oss vidare inom detta område tänka oss ett ställe z, skildt från A. Om nu A tillhör det inre af något område $R_\varkappa$, så är det tydligt, att området a kan väljas så litet, att det helt och hållet faller inom $R_\varkappa$. Inom området a finnes då icke något med z kongruent värde, ty kongruenta områden utesluta hvarandra.

Ligger åter stället A på periferin af någon af våra ursprungliga cirklar eller deras afbildningar, så kan man alltid göra om-

---

[1]) Med en sådan förstås en linjär substitution, hvars koefficienter $\alpha\beta\gamma\delta$ äro sådana, att de absoluta beloppen för $\alpha - 1$, β, γ, $\delta - 1$ äro oändligt små. (Se: POINCARÉ: »Mémoire sur les groupes kleinéens» p. 57).

rådet a så litet, att det icke innehåller några med hvarandra kongruenta värden.

Om således stället A är så beskaffadt, att om jag väljer ett område a omkring A godtyckligt litet, det ändå alltid inom a finnes med hvarandra kongruenta värden, så kan A icke tillhöra fundamentalpolygonen R_0, ej häller någon därmed kongruent polygon R_α.

Ett sådant ställe A, i omgifningen af hvilket gruppen är oegentligt diskontinuerlig, säger jag vara ett singulärt ställe för gruppen G.

Jag skiljer mellan tvänne olika slag af singulära ställen. Om A tillhör den ofvan definierade punktmängden P', så innehåller en hur liten omgifning s. h. kring A oändligt många polygoner R_α, d. v. s. A är ett singulärt ställe för gruppen G, och jag säger A vara *ett singulärt ställe af första slaget.* Till denna kategori räknar jag naturligtvis också alla ställen, som äro kongruenta med något ställe tillhörande P'.

Är åter A ett singulärt ställe, som icke tillhör P', så måste A ligga inom någon af fundamentalcirklarne, låt vara C_α. Men då måste A också ligga inom någon af de närmast följande cirklarne $C_{\beta\alpha}$, således inom någon af de närmast följande $C_{\gamma\beta\alpha}$ o. s. v. Stället A måste således befinna sig innanför oändligt många cirklar.

Det är tydligt, att hvarje sådant ställe entydigt definierar en viss oändlig serie

$$\alpha\beta\gamma \ldots .$$

Omvändt kan man bevisa, att hvarje sådan serie definierar ett visst singulärt ställe A. Då man nämligen genom en sådan serie har definierat en oändlig rad af cirklar, af hvilka hvar och en följande ligger innanför den föregående, så är det tydligen tillräckligt att bevisa, att radierna i dessa cirklar obegränsadt aftaga.

Det är bekant, att uttrycket

$$\frac{\left(r_\alpha^2 + r_\beta^2 - e^2\right)^2}{4r_\alpha^2 r_\beta^2} - 1 = K$$

är invariant vid alla linjära substitutioner[1]). r_α och r_β betyda radierna i tvänne cirklar i planet, e afståndet mellan dessa cirklars medelpunkter.

Tänker man sig nu detta uttryck bildadt för hvarje tänkbart par fundamentalcirklar, så påstår jag, att för de sålunda erhållna värdena K gifves en undre gräns, som är skild från noll.

Sätter man nämligen

$$e = r_\alpha + r_\beta + \varepsilon\,,$$

så är ε minsta afståndet mellan tvänne punkter tillhörande de olika cirklarne, och man har:

$$K = \left\{1 + \frac{r_\alpha + r_\beta}{r_\alpha \cdot r_\beta} \cdot \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2r_\alpha \cdot r_\beta}\right\}^2 - 1\,.$$

Nu är enligt antagandet antingen $\frac{\varepsilon}{r_\alpha}$ eller $\frac{\varepsilon}{r_\beta}$, t. ex. $\frac{\varepsilon}{r_\beta}$, större än σ. Dessutom är:

$$\frac{r_\alpha + r_\beta}{r_\alpha} > 1\,,$$

och följaktligen

$$\frac{r_\alpha + r_\beta}{r_\alpha r_\beta} \cdot \varepsilon > \sigma\,.$$

Således är:

$$K > (1 + \sigma)^2 - 1 > 2\sigma\,.$$

Häraf följer, att alla K äro positiva och ha en från noll skild undre gräns $\varkappa$.

Är nu r radie i en cirkel $C_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ och R radie i den närmast omslutande cirkeln $C_{\beta\gamma\ldots}$, så har man

$$R^2 + r^2 - e^2 > Rr\sqrt{1 + \varkappa}\,,$$

och således:

$$2R^2 > 2R \cdot r \cdot \sqrt{1 + \varkappa}\,,$$

eller

$$r < \frac{R}{\sqrt{1 + \varkappa}}\,.$$

---

[1]) Om cirklarne skära hvarandra under vinkeln φ, så är $k = -\sin^2\varphi$ och således invariant. (Se för öfrigt: SCHOTTKY loc. cit.).

Då nu faktorn $\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}$ är < 1, så inses, att radierna obegränsadt aftaga. Häraf följer, att hvarje oändlig serie

$$\alpha\beta\gamma \ldots .$$

entydigt definierar ett visst ställe A.

I hvarje omgifning af ett sådant ställe A befinna sig oändligt många med fundamentalpolygonen kongruenta områden R_α. Väljer jag inom en liten omgifning af A ett värde z, så finnas alltid inom samma område med detta z-värde kongruenta värden.

Stället A är således enligt den ofvan gifna definitionen ett singulärt ställe. *Ett sådant singulärt ställe säger jag vara af andra slaget.*

Man inser, att de nu definierade båda slagen af singulariteter i själfva verket innefatta alla för gruppen G singulära ställen.

Det är slutligen lätt att se, att i hvarje omgifningen af ett singulärt ställe ligga oändligt många singulära ställen, samt, att alla ställen, som äro gränsställen för singulära ställen, själfva äro för gruppen G singulära. Gruppens singulariteter bilda således enligt den CANTOR'ska terminologin en perfekt punktmängd.

2.

Låtom oss betrakta en grupp G af i föregående paragraf definierade beskaffenhet. Låt

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

vara de olika substitutionerna i gruppen. Jag föresätter mig nu att bevisa, att det alltid existerar ett system entydiga analytiska funktioner af z, som bli oförändrade för alla till gruppen G hörande substitutioner.

Låtom oss bibehålla den i föregående paragraf begagnade beteckningen

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z)$$

och låtom oss studera den POINCARÉ'ska summan[1])

$$\sum_i \left| \frac{df_i(z)}{dz} \right|^m,$$

där m betyder ett positivt helt tal större än 1. Man har

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2},$$

Således är absoluta beloppet för $\frac{df_i}{dz}$ lika med $\frac{1}{|\gamma_i|^2}$ divideradt med kvadraten på afståndet från stället z till stället $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. Enligt hvad vi i föregående paragraf visat, kan man alltid anta, att stället ∞ befinner sig inom fundamentalpolygonen R_0. Ställena $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ äro tydligen allesamman kongruenta med stället ∞. Således finnes ett och endast ett sådant ställe inom hvar och en af polygonerna R_i.

Hvarje sådant ställe är nu ett oändlighetsställe för $\frac{df_i}{dz}$, d. v. s. en term i vår serie blir oändlig, så snart $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Låtom oss därför omgifva hvarje ställe $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ med en liten cirkel, hvars radie må vara ϱ. Radien i den cirkel, som omger stället $\frac{-\delta_0}{\gamma_0}$, d. v. s. stället ∞, och som vi vilja kalla S är $= \frac{1}{\varrho}$. Vi tänka oss ϱ valdt så litet, att cirkeln S omsluter alla fundamentalcirklarne och således innehåller alla polygoner R_i med undantag af en viss del af fundamentalpolygonen.

Låtom oss nu betrakta ett visst område $\overline{R}_\alpha$, som består af polygonen R_α i det skick denna polygon befinner sig, sedan vi

[1]) Se POINCARÉ: »Mémoire sur les fonctions fuchsiennes» (Acta Mathematica, T. 1, p. 194).

uteslutit ställena $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ jämte deras omgifningar med radien ϱ. Låt a vara det största, b det minsta afståndet från ett visst ställe $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ till området $\overline{R}_\alpha$. Låt M_i vara det största, m_i det minsta värde, som $\left|\frac{df_i}{dz}\right|$ antar, då z tillhör R_α. Man har tydligen:

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Är $i \neq 0$, så är a alltid ändlig; b däremot är aldrig mindre än ϱ. Är åter $i = 0$, d. v. s. betrakta vi stället ∞, så äro både a och b oändliga; men emedan området $\overline{R}_\alpha$ alltid faller inom en viss ändlig cirkel S och således alltid är ett ändligt område, måste kvoten $\frac{a}{b}$ i detta fall vara lika med 1, således ändlig. Följaktligen kan man finna en ändlig af i oberoende kvantitet E, sådan att

$$\frac{M_i}{m_i} < E.$$

Införa vi nu

$$z = x + iy,$$

så kunna vi skrifva ytan af området $\overline{R}_\alpha$ under formen

$$\overline{R}_\alpha = \iint dx dy,$$

där man har att utsträcka dubbelintegralen öfver hela området $\overline{R}_\alpha$.

Låt $\overline{R}_j$ vara det område, hvari $\overline{R}_\alpha$ öfvergår genom substitutionen

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Då kan ytan $\overline{R}_j$ skrifvas under formen

$$\overline{R}_j = \iint \left|\frac{df_i}{dz}\right|^2 dx dy.$$

Äfven denna dubbelintegral bör utsträckas öfver hela området $\overline{R}_\alpha$. Då nu m_i är det minsta värde, som $\left|\frac{df_i}{dz}\right|$ antar, då z rör sig inom $\overline{R}_\alpha$, så måste nödvändigt

$$\overline{\overline{R}}_j > \iint m_i^2 dxdy\,,$$

d. v. s.

$$\overline{\overline{R}}_j > m_i^2 \overline{R}_\alpha$$

eller

$$\overline{\overline{R}}_j > \frac{M_i^2}{E^2} \overline{R}_\alpha$$

och sluligen

$$M_i^2 < \frac{E^2}{\overline{R}_\alpha} \cdot \overline{\overline{R}}_j\,.$$

Emedan M_i är det största värde, som $\left|\frac{df_i}{dz}\right|$ kan anta för z-värden inom $\overline{R}_\alpha$, så är

$$\left|\frac{df_i}{dz}\right|^2 \leqq M_i^2 < \frac{E^2}{\overline{R}_\alpha} \cdot \overline{\overline{R}}_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Då nu alla områden $\overline{\overline{R}}_j$ falla inom en viss ändlig cirkel, så måste deras summa vara ändlig. Således är också

$$\sum \left|\frac{df_i}{dz}\right|^2$$

ändlig.

Den polygon, hvari fundamentalpolygonen R_0 öfvergår genom substitutionen

$$(z;\ f_i(z))\,,$$

må vara R_i. På detta sätt motsvaras hvarje substitution af en med R_0 kongruent polygon, och omvändt motsvaras hvarje polygon R_i af en viss substitution tillhörande gruppen G. Mot R_0 svarar substitutionen

$$(z;\ f_0(z))\,,$$

d. v. s. den identiska substitutionen.

Jag påstår nu, att det är alltid möjligt att ordna polygonerna R_i och således också substitutionerna f_i i en bestämd rad. Jag omger för detta ändamål hvar och en af de i föregående paragraf omtalade singulära ställena af första och andra slaget med en liten cirkel, hvars radie må vara r. Då nu de singulära ställena bilda en perfekt punktmängd, så är det tydligt, att utanför dessa cirklar befinna sig endast ett ändligt antal polygoner R_i.

Jag kan ordna dessa efter behag. Minskar jag sedan radien r, så komma flera nya polygoner R_i att ligga utanför cirklarne. Dessa polygoners antal är i hvarje fall ändligt, och de kunna således ordnas i följd efter de föregående. Man inser, att det på detta sätt är möjligt att ordna polygonerna R_i på en rad.

Mot denna ordning svarar då också en viss ordning af substitutionerna f_i.

Jag tänker mig nu områdena $\bar{R}_j$ uppstälda i denna rad. Summan af dessa polygoner $\Sigma\bar{\bar{R}}_j$ är, såsom jag nyss anmärkte, ändlig.

Om jag således väljer en yta $\frac{\bar{R}_\alpha \cdot \sigma}{E^2}$, hur liten som hälst, så kan jag alltid finna ett tal m sådant, att om jag afskiljer de m första områdena $\bar{R}_j$, summan af de återstående är $< \frac{\bar{R}_\alpha \cdot \sigma}{E^2}$. Nu är $\bar{\bar{R}}_j$ det område, hvari $\bar{R}_\alpha$ öfvergår genom substitutionen $(z; f_i(z))$. Följaktligen svara mot de m afskilda områdena $\bar{\bar{R}}_j$ m stycken substitutioner $(z; f_i(z))$. Dessa äro naturligtvis i allmänhet icke de m första substitutionerna i raden, men man kan alltid finna ett tal n så stort, att dessa m substitutioner återfinnas bland de n första substitutionerna i raden

$$(z; f_0(z)) \ (z; f_1(z)) \ (z; f_2(z)) \ldots .$$

Afskiljer jag nu de mot dessa n substitutioner svarande termerna i serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{df_i}{dz} \right|^2,$$

så måste återstoden

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \frac{df_i}{dz} \right|^2$$

till följd af olikheten (1.) vara mindre än σ. Detta gäller för alla värden på z inom $\overline{R}_\alpha$.

Väljer jag nu ett nytt område $\overline{R}_\beta$ af samma ägenskaper som $\overline{R}_\alpha$ och betraktar

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{df_i}{dz} \right|^2$$

för z-värden inom detta område, så gäller om denna summa, att jag efter att hafva valt ett godtyckligt litet σ alltid kan finna ett tal n_1, så stort att

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \left| \frac{df_i}{dz} \right|^2 < \sigma$$

för alla z-värden inom området $\overline{R}_\beta$.

Nu kan jag alltid finna ett tal n_2, som är större än både n och n_1. Väljer jag således ett σ godtyckligt litet, så kan jag alltid finna ett tal n_2 sådant, att

$$\sum_{i=n_2+1}^{\infty} \left| \frac{df_i}{dz} \right|^2 < \sigma$$

för alla z-värden som tillhöra området $\overline{R}_\alpha + \overline{R}_\beta$.

Man ser, att man kan fortgå på detta sätt och att man tillsist uppnår följande

Teorem.

»Om Ω är ett visst område i z-planet, som ej öfverskäres af oändligt många cirklar, och om man från detta område utesluter alla ställen, som ligga inom de kring ställena $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ beskrifna cirklarne, så är serien

$$\sum \left|\frac{df_i}{dz}\right|^2$$

likformigt konvergent inom hela området Ω.»

Det är tydligt, att detta teorem gäller om hvarje serie af formen

$$\sum \left|\frac{df_i}{dz}\right|^m,$$

där m är ett positivt helt tal > 1.

Låtom oss nu välja en godtycklig rationel funktion $H(z)$, hvars oändlighetsställen må vara

$$a_1 a_2 \ldots a_n$$

med ordningstalen

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n.$$

Funktionen $H(z)$ är således af graden

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu.$$

Alla med dessa ställen kongruenta ställen ha formen

$$f_i(a_\nu) \ldots (\nu = 1 \ldots n;\ i = 0,\ 1 \ldots \infty)$$

och äro tydligen oändlighetsställen till någon af funktionerna

$$H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Kring hvart och ett af dessa ställen beskrifva vi en liten cirkel. Utesluta vi dessa cirklar från planet, så återstår ett område, som vi vilja kalla W. Det är tydligt, att om z rör sig inom området W, måste hvar och en af funktionerna

$$H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

anta värden, hvilkas öfre gräns ligger under en viss kvantitet L.

Multiplicera vi nu hvarje term i serien

$$\sum \left|\frac{df_i}{dz}\right|^m$$

med en funktion $H(f_iz)$, så är då absoluta beloppet för denna kvantitet alltid är mindre än L, den sålunda uppkomna serien absolut och likformigt konvergent inom hvarje område, som samtidigt och helt och hållet tillhör områdena Ω och W.

Vi beteckna denna serie med $\Theta(z)$, så att

$$\Theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Det hela positiva talet m benämna vi graden af vår Θ-funktion.

3.

Vi vilja något litet studera den sålunda definierade funktionen $\Theta(z)$. Denna är en entydig analytisk funktion, som karaktäriseras af ett system singulära ställen, af hvilka en del äro väsentligt singulära, en del oväsentligt.

De oväsentligt singulära ställena, i omgifningen af hvilka $\Theta(z)$ förhåller sig som en rationel funktion, äro

1:o ställena

$$\frac{\alpha_i a_\nu + \beta_i}{\gamma_i a_\nu + \delta_i},$$

d. v. s. alla ställen, som äro kongruenta med något af oändlighetsställena till den rationela funktionen $H(z)$. Då ställena a_ν till antalet äro n, så finnas inom hvarje polygon R_i n stycken oväsentligt singulära ställen tillhörande denna kategori. Är

$$\frac{\alpha_i a_\nu + \beta_i}{\gamma_i a_\nu + \delta_i}$$

ett visst till polygonen R_i hörande, med a_ν kongruent ställe, så är funktionen

$$H\left(\frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$$

oändlig af ordningen μ_ν i detta ställe. Detta gäller således också i allmänhet om funktionen $\Theta(z)$.

Dessutom ha vi ännu ett slag oväsentligt singulära ställen, nämligen:

2:o ställena $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, d. v. s. alla med stället ∞ kongruenta ställen.

Inom hvarje polygon R_i finnes ett sådant ställe och detta är för $\Theta(z)$ i allmänhet ett oändlighetsställe af ordningen $2m$.

Om vi således som vanligt räkna ett oändlighetsställe af n^{te} ordningen som n skilda oändlighetsställen, så har funktionen $\Theta(z)$ $\lambda + 2m$ inkongruenta oändlighetsställen.

Slutligen har funktionen $\Theta(z)$ väsentligt singulära ställen af tvänne olika slag. Dessa äro:

1:o ställen tillhörande punktmängden P', jämte alla därmed kongruenta ställen; d. v. s. alla singulära ställen af första slaget för gruppen G.

2:o ställen, som för gruppen G äro singulära ställen af andra slaget.

I det fall, att man har ett ändligt antal fundamentalcirklar, är denna senare punktmängd aldrig öfver alt tät utefter någon viss linie. Singulariteter af det förra slaget existera öfverhufvud taget icke. Följaktligen måste Θ-funktionerna i detta fall existera i hela planet, med undantag för vissa singulära ställen.

I vårt fall är detta icke alltid händelsen. Det kan ju nämligen inträffa, att de väsentligt singulära ställena af första slaget bilda en punktmängd, som på en viss sluten linie är öfver alt tät. I detta fall existera våra Θ-funktioner endera inom det af den slutna linien begränsade området eller också utanför detta område, men låta i hvarje fall ej fortsätta sig öfver den slutna linien. Man kan naturligtvis på detta sätt erhålla existensområden af en synnerligen komplicerad natur.

Man inser lätt, att $\Theta(z)$ satisfierar följande funktionallikhet

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)\,(\gamma_i z + \delta_i)^{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jag vill nu bevisa, att funktionen $\Theta(z)$ har oändligt många inkongruenta nollställen.

Låtom oss för detta ändamål betrakta en godtycklig, med fundamentalpolygonen R_0 kongruent polygon R_α. Vi antaga, att inom denna polygon finnas p nollställen och q oändlighetsställen. För enkelhetens skull kunna vi dessutom antaga, att inga noll- eller oändlighets-ställen ligga på begränsningen af R_α. Talet q är i hvarje fall ändligt och fullt bestämdt, då vi ju ha

$$q = \lambda + 2m\,.$$

Vi betrakta först det fall, att fundamentalpolygonen R_0 och således också polygonen R_α endast begränsas af ett ändligt antal cirklar, låt oss säga $2n$. Vi föresätta oss att beräkna integralen

$$I_{\curvearrowleft} = \int \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

tagen längs efter begränsningen af R_α i positiv led ($\curvearrowleft$). Det är tydligt, att den reela delen af denna integral är $= 0$, och att den imaginära delen är

$$2\pi i(p - q)\,.$$

Låt nu C_ν och $C_{\nu'}$ vara tvänne konjugerade cirklar tillhörande begränsningen af R_α. Vi anta först, att dessa cirklar ligga helt och hållet utanför hvarandra. Den del af integralen $I_{\curvearrowleft}$, som kommer på dessa cirklar, är

$$J_\nu = \int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \int_{C_{\nu'} \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} = \int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} - \int_{C_{\nu'} \curvearrowleft} \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}\,.$$

Pilarne beteckna här som i det följande den riktning, i hvilken vi tänka oss cirklarne genomlupna.

Låt nu $(z; f_i(z)$ vara den till gruppen G hörande substitution, som öfverför cirkeln C_ν i $C_{\nu'}$. Då z genomlöper cirkeln C_ν i positiv led ($\curvearrowleft$), så genomlöper $f_i(z)$ cirkeln $C_{\nu'}$ i negativ led ($\curvearrowright$). Vi ha (se (1))

$$\Theta(f_i(z)) = \Theta(z)\left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^{-m},$$

och således:

$$\log \Theta(f_i(z)) = \log \Theta(z) - m \log \frac{df_i}{dz}\,,$$

samt

$$\frac{\Theta'(f_i(z))}{\Theta(f_i(z))} \cdot \frac{df_i}{dz} = \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z} - m \frac{d}{dz} \log \frac{df_i}{dz}.$$

Om vi således integrera utefter cirkeln C_ν i negativ led ($\curvearrowright$), så erhålla vi:

$$\int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} \frac{df_i}{dz} dz - \int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = -m \int_{C_\nu \curvearrowright} d \log \frac{df_i}{dz}. \quad (3)$$

Nu är:

$$\int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} \frac{df_i}{dz} dz = \int_{C_{\nu'} \curvearrowleft} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

och således:

$$\int_{C_{\nu'} \curvearrowleft} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz - \int_{C_\nu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = -m \int_{C_\nu \curvearrowright} d \log \frac{df_i}{dz}.$$

Vi erhålla följaktligen:

$$J_\nu = m \int_{C_\nu \curvearrowright} d\left[\log \frac{df_i}{dz}\right].$$

Om

$$\frac{df_i}{dz} = \varrho e^{\vartheta i},$$

så är ϑi lika med den imaginära delen af $\log \frac{df_i}{dz}$. Då vi endast behöfva beräkna den imaginära delen af integralen, ha vi således att undersöka, hur mycket vinkeln ϑ varierar, då z rör sig utefter cirkeln C_ν i negativ led. Då z utför denna rörelse, så rör sig $f_i(z)$ utefter cirkeln $C_{\nu'}$ i positiv led, och då z tillryggalagt ett helt hvarf, så har $f_i(z)$ också tillryggalagt ett helt hvarf. Man ser häraf, att variationen i vinkeln ϑ uppgår till 4π. Således är, da man endast fäster sig vid den imaginära delen:

$$J_\nu = 4m\pi i.$$

Detta om cirklarne utesluta hvarandra. Området R_α begränsas af $2n-1$ utanför hvarandra liggande cirklar samt af en alla dessa cirklar omslutande cirkel $C_{\mu'}$. Mot denna svarar en innan-

för belägen cirkel C_μ. Genomlöper z begränsningen af R_α i positiv led, så genomlöpas alla cirklarne C_ν, $C_{\nu'}$ jämte cirkeln C_μ i negativ led. Däremot genomlöpes $C_{\mu'}$ i positiv led. Således är det mot cirkelparet C_μ, $C_{\mu'}$ svarande värdet på J:

$$J_\mu = \int_{C_\mu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz + \int_{C_{\mu'} \curvearrowleft} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz .$$

Emellertid erhåller formen (4) ett något förändradt utseende. Det är nämligen klart, att då cirklarne ligga utanför hvarandra, måste $f_i(z)$ (den substitution som öfverför C_μ i $C_{\mu'}$) genomlöpa $C_{\mu'}$ i *samma led*, som z genomlöper C_μ. Till följd häraf är:

$$\int_{C_\mu \curvearrowright} \frac{\Theta'(f_i(z))}{\Theta(f_i(z))} \frac{df_i}{dz} dz = \int_{C_{\mu'} \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz .$$

Vidare erhålla vi på samma sätt som förut (3):

$$\int_{C_\mu \curvearrowright} \frac{\Theta'(f_i(z))}{\Theta(f_i(z))} \frac{df_i}{dz} dz - \int_{C_\mu \curvearrowright} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = -m \int_{C_\mu \curvearrowright} d\left[\log \frac{df_i}{dz}\right].$$

Af dessa båda formler erhålla vi:

$$J_\mu = m \int_{C_\mu \curvearrowright} d\left[\log \frac{df_\mu}{dz}\right].$$

Då nu $f_i(z)$ genomlöper $C_{\mu'}$ på samma gång och i samma led som z genomlöper C_μ, så är den totala variationen i vinkeln ϑ lika med noll. Således ha vi, bortsedt från den reela delen,

$$J_\mu = 0 .$$

Följaktligen är integralen I tagen i positiv led utefter hela begränsningen af området R_α lika med summan af integralerna I_ν, som till antalet äro $n - 1$. Hvar och en af dessa integraler är emellertid lika med $4m\pi i$. Vi erhålla följaktligen

$$I = 4m(n-1)\pi i .$$

Nu är också

$$I = 2\pi i(p - q) ,$$

så att:

$$p - q = 2m(n-1) .$$

Här är q antalet inkongruenta oändlighetsställen, således $= \lambda + 2m$, hvaraf slutligen:

$$p = 2m(n - 1) + 2m + \lambda .$$

I denna formel betyder nu p antalet inkongruenta nollställen till funktionen $\Theta(z)$, m det tal, som ingår i bildandet af den ifrågavarande funktionen, λ graden af den rationela funktionen $H(z)$ $2n$ är antalet sidor i vår fundamentalpolygon.

Den nu utförda beräkningen stöder sig, som man ser, ytterst på den funktionallikhet, som funktionen $\Theta(z)$ satisfierar. Då Θ-funktionerna äfven i vårt allmänna fall satisfiera denna funktionallikhet, så ser man, att den funna formeln gäller, då n är oändligt stort. Härmed är bevist, att funktionen $\Theta(z)$ har oändligt många inkongruenta nollställen.

Låtom oss återtaga den för Θ-funktionerna karaktäristiska funktionallikheten

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)\,(\gamma_i z + \delta_i)^{2m} .$$

Äro Θ och Θ_1 tvänne till samma grupp G hörande Θ-funktioner af samma grad, så måste deras kvot

$$\varphi(z) = \frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)}$$

satisfiera funktionallikheten:

$$\varphi\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \varphi(z) .$$

Äro $\Theta_1 \Theta_2 \ldots . \Theta_n$ till samma grupp G hörande Θ-funktioner och äro $m_1 m_2 \ldots m_n$ deras respektive gradtal, så säga vi, att deras produkt är en Θ-funktion af graden $\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu$. Om en hel rationel funktion af $\Theta_1 \ldots . \Theta_n$ är så beskaffad, att hvarje term är af samma grad K, så säga vi, att denna funktion är homogen och af graden K. Betrakta vi kvoten mellan tvänne dylika funktioner af graden $K K_1$ respektive, så är denna kvot en homogen rationel funktion af $\Theta_1 \ldots \Theta_n$ af graden $K - K_1$. Det är

tydligt, att hvarje sådan funktion $\varphi(z)$ af gradtalet noll satisfierar funktionallikheten

$$\varphi\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \varphi(z) .$$

Dessa funktioner $\varphi(z)$ kunna betraktas såsom en generalisering af de KLEIN'ska funktionerna af tredje familjen. Låtom oss i största korthet ange deras väsentliga funktionsteoretiska ägenskaper.

Hvarje funktion $\varphi(z)$ har karaktären af en rationel funktion öfveralt inom en af oändligt många från hvarandra fullständigt skilda cirklar och af en viss punktmängd P' begränsad polygon R_0. Inom denna polygon har en funktion $\varphi(z)$ i allmänhet oändligt många oändlighetsställen och oändligt många nollställen. Då $\varphi(z)$ är af rationel karaktär inom R_0, kunna dessa noll- och oändlighetsställen icke skocka sig oändligt tätt i omgifningen af andra ställen än sådana, som tillhöra begränsningen utan att tillhöra R_0 eller någon annan till R_0 närgränsande polygon. (I alla med R_0 kongruenta polygoner R_i återtar nämligen $\varphi(z)$ samma värden som i motsvarande ställen inom R_0 och är således äfven här af rationel karaktär). Dessa ställen tillhöra allesamman punktmängden P', d. v. s. äro för gruppen G singulära ställen af första slaget. De äro också väsentligt singulära ställen för våra Θ-funktioner.

Man inser häraf, att funktionerna $\varphi(z)$ icke ha några andra väsentligt singulära ställen än sådana, som för gruppen G äro singulära.

Dessutom följer af funktionallikheten

$$\varphi\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \varphi(z) ,$$

att alla för gruppen G singulära ställen också äro väsentligt singulära för funktionerna $\varphi(z)$.

Härmed äro således dessa funktioners singulariteter fullkomligt bestämda. Hvad som ofvan sagts om existensområdet för Θ-funktionerna äger naturligtvis sin tillämpning på funktionerna $\varphi(z)$.

Hvarje funktion $\varphi(z)$ med nu nämda ägenskaper säger jag vara en invariant funktion.

Inom ett med fundamentalpolygonen kongruent område R_i antar en sådan invariant funktion värdena noll och oändligheten båda i allmänhet oändligt många gånger. Således består i allmänhet icke mellan tvänne till samma grupp hörande invarianta funktioner någon algebraisk likhet, väl däremot en transscendent.

I det fall, att man endast har ett ändligt antal fundamentalcirklar, antar en invariant funktion hvarje värde ett visst ändligt antal gånger inom en viss polygon. Detta tal vill jag kalla den invarianta funktionens grad. Det finnes då alltid ett visst af n, antalet cirkelpar, beroende tal μ sådant, att det icke existerar en invariant funktion med ett godtyckligt oändlighetsställe, som är af lägre grad än μ. Däremot existera invarianta funktioner af lägre grad än μ, hvilkas oändlighetsställen satisfiera vissa transscendenta likheter.

Om man t. ex. kan dela fundamentalpolygonen i tvänne med afseende på en viss cirkel symetriska delar, så att en cirkel C_ν, som faller innanför symmetricirkeln, alltid är konjugerad med en cirkel $C_{\nu'}$, som faller utanför, så är det ju alltid, enligt en bekant sats af SCHWARZ[1]), möjligt att finna en entydig funktion, som förmedlar den konforma afbildningen af den ena delen af fundamentalpolygonen på ett plan[2]). Denna funktion, som tydligen är oförändrad för alla till vår grupp hörande substitutioner, antar hvarje värde två och endast två gånger inom fundamentalpolygonen. Den är emellertid bestämd så till vida, att den icke kan äga ett godtyckligt oändlighetsställe.

Då fundamentalpolygonen har ett oändligt antal sidor, fordras tydligen för att en invariant funktion af ändligt gradtal skall existera, att denna funktions oändlighetsställen uppfylla en oändlig

---

[1]) Jfr. SCHWARZ: Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Monatsbericht der K. A. der Wissenschaften zu Berlin. October 1870.

[2]) Jfr. SCHOTTKY: Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Journal für die Mathematik. T. 83.

mängd transscendenta likheter. Det är således icke a priori klart, att det verkligen existerar en dylik funktion. För att det icke må råda något tvifvel om denna sak, skall jag i ett specielt fall uppvisa existensen af en invariant funktion af ändligt gradtal.

Låtom oss anta, att alla cirklarne C_{ν} ha sina medelpunkter på den reela axeln, och låtom oss dessutom anta, att det är möjligt att i nyss antydda mening finna en symetricirkel, som har sin medelpunkt på den reela axeln. Den del af planet, som återstår, då man utesluter symetricirkeln och de utanför denna liggande oändligt många cirklarne C_{ν}, kan under vissa inskränkningar, enligt hvad jag i min uppsats öfver WEBERS afhandling: »Ein Beitrag zu POINCARÉ's Theorie der Fuchsschen Functionen»[1]) visat, konformt afbildas på ett plan. Den entydiga analytiska funktion, som förmedlar denna konforma afbildning, är tydligen invariant vid alla till gruppen G hörande linjära substitutioner. Inom hvar och en af fundamentalpolygonens båda delar antar den hvarje värde en och endast en gång. Den antar således hvarje värde två och endast två gånger inom den ursprungliga fundamentalpolygonen. Naturligtvis äger denna funktion icke något godtyckligt oändlighetsställe.

4.

En funktion $\Theta(z)$ är definierad genom likheten

$$\Theta(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

där H betyder en godtycklig rationel funktion. Sätta vi

$$H_1(z) = \frac{1}{z - \lambda_1},$$

så erhålla vi en funktion $\Theta(z)$, som jag vill beteckna med

$$\Theta_1(z) = \Theta(\lambda_1, z).$$

Denna funktion äger en rad inkongruenta nollställen

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$$

[1]) Bihang till K. V. A:s Handlingar 1890.

så att

$$\Theta(\lambda_1, a_1) = \Theta(\lambda_1, a_2) = \ldots . = 0 .$$

I denna rad ingå i allmänhet oändligt många likheter. Betrakta vi en speciel af dem, och låta vi λ vara en obekant:

$$\Theta(\lambda, a_\nu) = 0 ,$$

så satisfieras denna af en mängd värden på λ

$$\lambda_{\nu 1}\, \lambda_{\nu 2} \ldots \lambda_{\nu\mu} \ldots .$$

Samtliga värden $\lambda_{\nu\mu}$ bilda en punktmängd i planet, som dock ingenstädes är ett kontinuum. En funktion $\Theta(\lambda, a_\nu)$ kan ju nämligen icke vara identiskt noll, då den för $\lambda = a_\nu$ nödvändigt är oändlig.

Man kan således finna ett värde λ_2, som är skildt från hvart och ett af värdena $\lambda_{\nu\mu}$. Sätta vi sedan

$$H_2(z) = \frac{1}{z - \lambda_2}$$

och

$$\Theta_2(z) = \sum_i H_2\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} ,$$

så har funktionen $\Theta_2(z)$ en rad af nollställen

$$b_1\, b_2 \ldots . ,$$

af hvilka dock intet är lika med något af värdena

$$a_1\, a_2 \ldots .$$

Vi välja nu ett värde λ_0, som är skildt från λ_1 och λ_2 samt från hvart och ett af värdena

$$a_1\, a_2 \ldots .$$
$$b_1\, b_2 \ldots .$$

Vi bilda sedan funktionen

$$H_0(z) = \frac{1}{z - \lambda_0}$$

samt den däremot svarande funktionen $\Theta_0(z)$. Slutligen bilda vi de båda funktionerna

$$\varphi_1(z) = \frac{\Theta_0(z)}{\Theta_1(z)} ; \quad \varphi_2(z) = \frac{\Theta_0(z)}{\Theta_2(z)} .$$

Dessa båda funktioner äro entydiga analytiska funktioner, som äro invarianta för alla till den ifrågavarande gruppen hörande substitutioner. De inkongruenta oändlighetsställena äro:

för funktionen $\varphi_1(z)$

1:o stället λ_0, som är ett enkelt oändlighetsställe,

2:do en rad ställen, som samtliga innefattas i raden $a_1\, a_2 \ldots\ldots$;

för funktionen $\varphi_2(z)$

1:o stället λ_0, som är ett enkelt oändlighetsställe,

2:do en rad ställen, som samtliga innefattas i raden $b_1\, b_2 \ldots\ldots$

Funktionerna φ_1 och φ_2 äro följaktligen så beskaffade, att mot värdesystemet

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = \infty \\ \varphi_2 = \infty\end{array}\right\}$$

svarar ett och endast ett värde på z inom fundamentalpolygonen, och detta värde är ett enkelt oändlighetsställe för så väl φ_1 som φ_2.

Mot ett visst värde på φ_1 svarar i allmänhet en rad z-värden

$$z_1\, z_2 \ldots z_i \ldots,$$

som allesammans tillhöra fundamentalpolygonen. Mot dessa värden svara värdena

$$\varphi_2(z_1)\, \varphi_2(z_2) \ldots \varphi_2(z_i) \ldots\ldots$$

Jag påstår, att dessa värden i allmänhet (d. v. s. med undantag endast för z_1-värden, som satisfiera vissa likheter) äro från hvarandra skilda. Ty om man i omgifningen af ett visst värde z_1 hade

$$\varphi_2(z_2) = \varphi_2(z_1),$$

så vore ju, om man sätter

$$z_2 = f(z_1),$$

$$\varphi_2(f(z_1)) = \varphi_2(z_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Denna funktionallikhet äger rum i omgifningen af ett visst ställe z_1. Den måste således bestå i omgifningen af hvarje ställe

z, till hvilket jag kan komma på en väg, som endast innehåller ställen, som äro regulära för funktionerna $f(z)$ och $\varphi_2(z)$. Då nu funktionerna $\varphi_1(z)$ och $\varphi_2(z)$ äro af rationel karaktär öfveralt inom fundamentalpolygonen, så måste relationen (1) bestå för hvarje z-värde inom fundamentalpolygonen, för hvilket utvecklingarne af $\varphi_1(z)$ och $\varphi_2(z)$ börja med en term af första dimensionen.

Mot värdet

$$\varphi_1 = \infty$$

svara värdena

$$z = \lambda_0, z = f(\lambda_0) \ldots ,$$

och man har, emedan utvecklingarne i omgifningen af stället $z = \lambda_0$ börja med första potensen:

$$\varphi_2(\lambda_0) = \varphi_2(f(\lambda_0)) = \infty ,$$

hvilket strider mot hvad vi om funktionerna φ_1 och φ_2 ha oss bekant.

Således äro värdena

$$\varphi_2(z_1)\, \varphi_2(z_2) \ldots \varphi_2(z_i) \ldots$$

i allmänhet från hvarandra skilda, d. v. s. mot ett värdepar $\varphi_1\, \varphi_2$ svarar i allmänhet ett enda z-värde inom fundamentalpolygonen. Häraf följer, att hvarje mot gruppen G svarande invariant funktion låter framställa sig som en entydig funktion af värdeparet xy i den analytiska bild, som definieras af systemet:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(z) \\ y &= \varphi_2(z) \end{aligned} \right\} .$$

Man äger naturligtvis ett stort spelrum vid valet af funktionerna φ_1 och φ_2 och jag har endast velat visa ett sätt att bilda ett sådant funktionspar.

Då man har ett ändligt antal fundamentalcirklar, kan man bevisa, att hvarje invariant funktion låter rationelt framställa sig i tvänne x och y, som äro förbundna genom en viss algebraisk likhet.

I det allmänna fallet kan man emellertid icke bevisa mera än hvad jag nu bevisat. Ty om z på en väg, som helt och hållet tillhör fundamentalpolygonen, närmar sig ett för gruppen G singulärt ställe z_0 af första slaget, så närmar sig stället xy ett visst ställe x_0y_0. Bildar man således en entydig funktion af värdeparet xy på det sätt, att stället x_0y_0 är väsentligt singulärt, men att hvarje annat bilden tillhörande ställe är regulärt eller oväsentligt singulärt, så måste denna funktion, betraktad som funktion af z, vara af rationel karaktär inom hela fundamentalpolygonen. Dessutom är det tydligt, att den ifrågavarande funktionen är oförändrad för alla till gruppen G hörande substitutioner, d. v. s. denna funktion är i vår mening en invariant funktion. Men den låter icke rationelt uttrycka sig i värdeparet xy.

Altså är det omöjligt att finna tvänne invarianta funktioner x y sådana, att alla andra låta rationelt uttrycka sig i värdeparet xy.

Införa vi nu den bekanta substitutionen

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

så är

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{2\frac{d^3x}{dz^3}\frac{dx}{dz} - 3\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\frac{dx}{dz}\right)^4}.$$

Den funktion af z, som står i tredje membrum af denna dubbellikhet, är en invariant funktion och låter således framställa sig som en entydig funktion af värdeparet xy. Vi beteckna denna funktion med $F(xy)$.

Då äro således v_1 och v_2 tvänne oberoende integraler till den linjära differentiallikheten

$$\frac{d^2v}{dx^2} = vF(xy).$$

Kvoten mellan dessa båda integraler är lika med z. Den oberoende variabeln x är således en invariant funktion af kvoten mellan tvänne oberoende integraler till vår linjära differentiallikhet.

Är x en invariant funktion, som antar hvarje värde ett ändligt antal gånger inom hvarje polygon, så kan koefficienten för v i vår diffentiallikhet framställas som en algebroidisk funktion af x.

Finnes en invariant funktion x, som antar hvarje värde endast en gång inom hvarje polygon, så kan koefffcienten för v entydigt uttryckas i denna.

M. a. o.: studiet af vissa linjära differentiallikheter af andra ordningen med mångtydiga transscendenta koefficienter kan återföras på studiet af funktioner, som äro invarianta vid en grupp af linjära substitutioner, hvilka härledas från oändligt många fundamentalsubstitutioner;

och: problemet att integrera vissa linjära differentiallikheter af andra ordningen med entydiga transscendenta koefficienter kan återföras på problemet att konformt afbilda en af oändligt många cirkellinier begränsad plan figur på ett plan.

Ofvanstående undersökning har föredragits inför det matematiska seminariet vid Stockholms Högskola och där gifvit anledning till en vidlyftig diskussion; för många värderika råd och upplysningar, som jag därunder erhållit, stannar jag i stor tacksamhetsskuld.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 105.

Invarianta uttryck för den Poincaréska generaliserade substitutionen.

Af Frans de Brun.

[Meddeladt den 14 Maj 1890 genom G. Mittag-Leffler.]

§ 1.

Låt punkten (ζ', z') genom den Poincaréska generaliserade substitutionen transformeras i $(\bar{\zeta}', \bar{z}')$ och (ζ'', z'') genom samma substitution transformeras i $(\bar{\zeta}'', \bar{z}'')$; låt z_1 och z_2 vara två punkter i $\xi\eta$-planet, hvilka genom den generaliserade substitutionen öfvergå i $\bar{z}_1$ och $\bar{z}_2$ resp., hvilka senare följaktligen också äro belägna i $\xi\eta$-planet. Med $z_0^{(\alpha)}$, $\bar{z}_0^{(\alpha)}$, $z_{\beta 0}$, $\bar{z}_{\beta 0}$ menas de konjugerade till $z^{(\alpha)}$, $\bar{z}^{(\alpha)}$, z_β, $\bar{z}_\beta$ resp.

Låt den lineära substitution, hvaraf den generaliserade bildas, vara

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{1}$$

Då är, om α_0, β_0, γ_0, δ_0 beteckna de konjugerade till α, β, γ, δ,

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\zeta}' &= \pm \frac{\sqrt{\varDelta\varDelta_0}\cdot\zeta'}{\gamma\gamma_0\zeta'^2 + K'K'_0} \\
\bar{z}' &= \frac{\alpha\gamma_0\zeta'^2 + G'K'_0}{\gamma\gamma_0\zeta'^2 + K'K'_0} \\
\bar{z}'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\zeta'^2 + G'_0K'}{\gamma\gamma_0\zeta'^2 + K'K'_0},
\end{aligned}\right\} \tag{2 a}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\zeta}'' &= \pm \frac{\sqrt{\varDelta\varDelta_0}\cdot\zeta''}{\gamma\gamma_0\zeta''^2 + K''K''_0}\\ \bar{z}'' &= \frac{\alpha\gamma_0\zeta''^2 + G''K''_0}{\gamma\gamma_0\zeta'' + K''K''_0}\\ \bar{z}''_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\zeta''^2 + G''_0K''}{\gamma\gamma_0\zeta''^2 + K''K''_0},\end{aligned}\right\} \tag{2 b}$$

der

$$\varDelta = \alpha\delta - \beta\gamma \qquad \varDelta_0 = \alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta^{(\lambda)} &= \alpha z^{(\lambda)} + \beta \qquad \zeta_0^{(\lambda)} = \alpha_0 z_0^{(\lambda)} + \beta_0\\ K^{(\mu)} &= \gamma z^{(\mu)} + \delta \qquad K_0^{(\mu)} = \gamma_0 z_0^{(\mu)} + \delta_0\,,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$(\lambda = 1, 2, \quad \mu = 1, 2)\,.$$

Inför beteckningarne

$$Q^{(\nu)} = \gamma\gamma_0\zeta^{(\nu)2} + K^{(\nu)}K_0^{(\nu)} \tag{5}$$

$$\nu = 1, 2.$$

$$\left.\begin{aligned}K^*_\alpha = \Big|^{z'=z_\alpha} K' \qquad K^*_{\alpha 0} = \Big|^{z'_0=z_{\alpha 0}}\\ \alpha = 1, 2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(2) gifver

$$\left.\begin{aligned}\bar{\zeta}'^2 + (\bar{z}' - \bar{z}_\alpha)(\bar{z}'_0 - \bar{z}_{\beta 0}) &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q'\cdot K^*_\alpha K^*_{\beta 0}}\cdot\left\{\zeta'^2 + (z' - z_\alpha)(z'_0 - z_{\beta 0})\right\}\\ \bar{\zeta}''^2 + (\bar{z}'' - \bar{z}_\alpha)\left(\bar{z}''_0 - \bar{z}_{\beta 0}\right) &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q''\cdot K^*_\alpha K^*_{\beta 0}}\cdot\left\{\zeta''^2 + (z'' - z_\alpha)(z''_0 - z_{\beta 0})\right\}\\ \alpha = 1, 2;\quad \beta &= 1, 2;\quad \alpha \lesseqgtr \beta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Inför beteckningarne.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\zeta}^{(\gamma)2} + \left(\bar{z}^{(\gamma)} - \bar{z}_1\right)\left(\bar{z}_0^{(\gamma)} - \bar{z}_{20}\right) &= S^{(\gamma)}\cdot e^{i\Sigma^{(\gamma)}}\\ \zeta^{(\gamma)2} + \left(z^{(\gamma)} - z_1\right)\left(z_0^{(\gamma)} - z_{20}\right) &= s^{(\gamma)}\cdot e^{i\sigma^{(\gamma)}}\\ \gamma &= 1, 2.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\zeta}^{(\gamma)2} + \left(\bar{z}^{(\gamma)} - \bar{z}_\alpha\right)\left(\bar{z}_0^{(\gamma)} - \bar{z}_{\alpha 0}\right) &= P_\alpha^{(\gamma)2}\\ \zeta^{(\gamma)2} + \left(z^{(\gamma)} - z_\alpha\right)\left(z_0^{(\gamma)} - z_{\alpha 0}\right) &= \varrho_\alpha^{(\gamma)2}\\ \gamma = 1, 2;\quad \alpha &= 1, 2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{K_2^*}{K_1^*} = M^* e^{i\mu^*}. \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \varkappa \\ |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| &= \varkappa . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Här antagas $s^{(\gamma)}$, $S^{(\gamma)}$, M^*, $\sigma^{(\gamma)}$, $\Sigma^{(\gamma)}$, μ^*, $\varrho_\alpha^{(\gamma)}$, $P_\alpha^{(\gamma)}$ vara reela — de tre första dessutom positiva. Af (7)—(11) följer att

$$\left.\begin{aligned} S' &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q' \cdot M^* \cdot K_1^* K_{10}^*} \cdot s' \\ S'' &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q'' \cdot M^* \cdot K_1^* K_{10}^*} \cdot s'' . \end{aligned}\right| \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma' &= \mu^* + \sigma' \\ \Sigma'' &= \mu^* + \sigma'' . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha'^2 &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q' \cdot K_\alpha^* K_{\alpha 0}^*} \varrho_\alpha'^2 \\ P_\alpha''^2 &= \frac{\varDelta\varDelta_0}{Q'' \cdot K_\alpha^* K_{\alpha 0}^*} \varrho_\alpha''^2 \end{aligned}\right| \tag{14}$$

$$(\alpha = 1, 2) .$$

Dessutom är enl. (2)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\zeta}' &= \pm \frac{\sqrt{\varDelta\varDelta_0}}{Q'} \cdot \zeta' \\ \bar{\zeta}'' &= \pm \frac{\sqrt{\varDelta\varDelta_0}}{Q''} \cdot \zeta'' . \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Af

$$\bar{z}_1 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_2 + \beta}$$

$$\bar{z}_2 = \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \beta}$$

följer

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta}$$

$$\therefore \frac{\varDelta}{K_1^* K_2^*} = \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa} e^{i\Theta} \therefore \frac{\varDelta_0}{K_{10}^* K_{20}^*} = \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa} e^{-i\Theta}$$

$$\therefore \frac{\varDelta\varDelta_0}{K_1^* K_2^* K_{10}^* K_{20}^*} = \frac{\bar{\varkappa}^2}{\varkappa^2}$$

$$\therefore \sqrt{\varDelta\varDelta_0} = M^* K_1^* K_{10}^* \cdot \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa} . \tag{16}$$

Af (12)—(16) erhålles, att

$$\Sigma' - \Sigma'' = \sigma' - \sigma'' \tag{17}$$

$$\frac{S'}{P'^2_\alpha} : \frac{S''}{P''^2_\alpha} = \frac{s'}{\varrho'^2_\alpha} : \frac{s''}{\varrho''^2_\alpha}. \tag{18}$$

$$\left[\frac{S'}{\bar{\zeta}'} : \frac{S''}{\bar{\zeta}''}\right]^2 = \left[\frac{s'}{\zeta'} : \frac{s''}{\zeta''}\right]^2. \tag{19}$$

$$\left[\frac{P'^2_\alpha}{\bar{\zeta}'} : \frac{P''^2_\alpha}{\bar{\zeta}''}\right]^2 = \left[\frac{\varrho'^2_\alpha}{\zeta'} : \frac{\varrho''^2_\alpha}{\zeta''}\right]^2. \tag{20}$$

$$\left[\frac{P'_2 P'_2}{\bar{\zeta}'} : \frac{P''_1 P''_2}{\bar{\zeta}''}\right]^2 = \left[\frac{\varrho'_1\varrho'_1}{\zeta'} : \frac{\varrho''_1\varrho''_2}{\zeta''}\right]^2 \tag{21}$$

$$\left[\frac{S^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}_1\, P^{(\gamma)}_2}\right]^2 = \left[\frac{s^{(\gamma)}}{\varrho^{(\gamma)}_1\, \varrho^{(\gamma)}_2}\right]^2. \tag{22}$$

$$\left[\frac{S^{(\gamma)}}{\bar{\zeta}^{(\gamma)}\bar{\varkappa}}\right]^2 = \left[\frac{s^{(\gamma)}}{\zeta^{(\gamma)}\varkappa}\right]^2. \tag{23}$$

$$\left[\frac{P^{(\gamma)}_1\, P^{(\gamma)}_2}{\bar{\zeta}^{(\gamma)} \cdot \bar{\varkappa}}\right]^2 = \left[\frac{\varrho^{(\gamma)}_1\, \varrho^{(\gamma)}_2}{\zeta^{(\gamma)} \cdot \varkappa}\right]^2. \tag{24}$$

$$\frac{S'S''}{P'^2_1\, P''^2_2} = \frac{s's''}{\varrho'^2_1\, \varrho''^2_2}. \tag{25}$$

$$\frac{P'^2_1}{P'^2_2} : \frac{P''^2_1}{P''^2_2} = \frac{\varrho'^2_1}{\varrho'^2_2} : \frac{\varrho''^2_1}{\varrho''^2_2}. \tag{26}$$

Uti dessa formler antaga α och γ värdena 1 och 2. Alla dessa uttryck äro oberoende af μ^* och M^*. Den geometriska betydelsen af (20), (21), (24) och (26) är sjelfklar; den sista likheten säger, att dubbelförhållandet af afstånden mellan fyra punkter, af hvilka två ligga i $\xi\eta$-planet, är invariant.

För att få reda på den geometriska betydelsen af de öfriga likheterna är det nödvändigt att införa ett nytt begrepp.

Likheten (24) innebär, att den yta, som till eqvation har

$$\frac{\varrho^{(\gamma)2}_1\, \varrho^{(\gamma)2}_2}{\zeta^{(\gamma)2} \cdot \varkappa^2} = k^2,$$

genom den POINCARÉska generaliserade substitutionen öfvergår uti en yta af samma slag

$$\frac{P_1^{(\gamma)2} P_2^{(\gamma)2}}{\zeta^{(\gamma)2} \overline{\varkappa}^2} = k^2 .$$

Samtliga sfärer, som tangera $\xi\eta$-planet i z_1 l. z_2, skära under samma vinkel uti alla skärningspunkter den yta, som till eqvation har

$$\frac{\varrho_1^{(\gamma)2} \varrho_2^{(\gamma)2}}{\zeta^{(\gamma)2}} = k^2 ,$$

der k betyder en viss parameter.

Satsen bevisas lätt på grund af följande. Ytan

$$\frac{\varrho_1^{(\gamma)2} \varrho_2^{(\gamma)2}}{\zeta^{(\gamma)2}} = k$$

erhålles genom transformation medelst reciproka radier af den cirkulära dubbelkonen

$$\frac{r_1^{(\gamma)2}}{\zeta^{(\gamma)2}} = k'^2 ,$$

der

$$r_1^{(\gamma)} = \left| z^{(\gamma)} - z_1 \right| ,$$

och k' är en parameter, som beror af k. Härvid är $\varkappa$ tagen till transformationsradie och z_2 till medelpunkt för transformationen.

Sfärerna, som tangera $\xi\eta$-planet uti z_2, äro transformerade af plan, som äro parallela med $\xi\eta$-planet, då jag använder samma transformation som förut.

Slutligen är vinkeln mellan dubbelkonen och samtliga plan, som äro parallela med $\xi\eta$-planet, konstant för alla skärningspunkter.

Häraf följer satsen.

Kalla denna vinkel, under hvilken sfärerna, hvilka i z_1 l. z_2 tangera $\xi\eta$-planet, skära den yta, som till eqvation har

$$\frac{\varrho_1^{(\gamma)2} \varrho_2^{(\gamma)2}}{\zeta^{(\gamma)2}} = k^2 ,$$

för $\omega^{(\gamma)}$. Låt $\Omega^{(\gamma)}$ vara dess transformerade. Likheterna (22) —(24) uttrycka, att denna vinkel ω är invariant.

Man har nemligen

$$S^{(\gamma)} = P_1^{(\gamma)} P_2^{(\gamma)} \operatorname{Cos} \Omega^{(\gamma)}$$

$$s^{(\gamma)} = \varrho_1^{(\gamma)} \varrho_2^{(\gamma)} \operatorname{Cos} \omega^{(\gamma)}.$$

Likheten (18) säger att

$$\left[\frac{P'_2 \operatorname{Cos} \Omega'}{P'_1} : \frac{P''_2 \operatorname{Cos} \Omega''}{P''}\right]^2 = \left[\frac{\varrho'_2 \operatorname{Cos} \omega'}{\varrho'_1} : \frac{\varrho''_2 \operatorname{Cos} \omega'}{\varrho''}\right]^2,$$

Eftersom ω är invariant, öfvergår denna likhet uti (26).

Likheten (19) innebär, att

$$\left[\frac{P'_1 P'_2 \operatorname{Cos} \Omega'}{\bar{\zeta}'} : \frac{P''_1 P''_2 \operatorname{Cos} \Omega''}{\bar{\zeta}''}\right]^2 = \left[\frac{\varrho'_1 \varrho'_2 \operatorname{Cos} \omega'}{\zeta'} : \frac{\varrho''_1 \varrho''_2 \operatorname{Cos} \omega''}{\zeta''}\right]^2.$$

Eftersom ω är invariant, öfvergår denna likhet uti (21).

Slutligen säger (25), att

$$\frac{P''_1 P'_2 \operatorname{Cos} \Omega' \operatorname{Cos} \Omega''}{P'_1 P''_2} = \frac{\varrho''_1 \varrho'_2 \operatorname{Cos} \omega' \operatorname{Cos} \omega''}{\varrho'_1 \varrho''_2},$$

hvilken på grund af

$$\Omega^{(\gamma)} = \omega^{(\gamma)},$$

öfvergår uti (26).

§ 2.

Jag vill nu undersöka, hvilka invarianta *differentialuttryck* kunna finnas *för den grupp af generaliserade substitutioner, som har två dubbelpunkter* ζ_1 *och* ζ_2, *som äro olika och ligga inom ändligt område.*

Den lineära substitutionen är i detta fall bruten, således af formen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \gamma \neq 0. \tag{1}$$

Substitutionen är i detta fall icke parabolisk.

Låt (ζ, z) vara en punkt i rymden, som genom den generaliserade substitutionen transformeras i (ζ', z'), låt z_0 och z'_0 vara de konjungerade till z och z'.

Det analytiska sammanhanget vid den generaliserade substitutionen uttryckes genom

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \pm \sqrt{\varDelta\varDelta_0}\frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\zeta^2 + GK_0}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\zeta^2 + G_0K}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + KK_0}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

då

$$\left.\begin{aligned} G &= \alpha z + \beta \qquad & G_0 &= \alpha_0 z_0 + \beta_0 \\ K &= \gamma z + \delta \qquad & K_0 &= \gamma_0 z_0 + \delta_0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Låt ζ_1 och ζ_2 vara den lineära substitutionens dubbelpunkter samt $\zeta_1^{(0)}$ och $\zeta_2^{(0)}$ deras konjugerade.

Sätt

$$\left.\begin{aligned} z' - \zeta_\alpha &= R_\alpha e^{i\Phi_\alpha} \\ z - \zeta_\alpha &= r_\alpha e^{i\varphi_\alpha} \,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha^2 &= \zeta'^2 + R_\alpha^2 \\ \varrho_\alpha^2 &= \zeta^2 + r_\alpha^2 \,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta'^2 + (z' - \zeta_1)\left(z'_0 - \zeta_2^{(0)}\right) &= Se^{i\Sigma} \\ \zeta^2 + (z - \zeta_1)\left(z_0 - \zeta_2^{(0)}\right) &= se^{i\sigma} \,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Sätt vidare

$$\frac{\gamma\zeta_2 + \delta}{\gamma\zeta_1 + \delta} = Me^{i\mu} \,. \tag{7}$$

Då är

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1^2 P_2^2}{\zeta'^2} &= \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\zeta^2} \\ \frac{S^2}{\zeta'^2} &= \frac{s^2}{\zeta^2} \,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu \operatorname{Log}\frac{P_1^2}{S} - \Sigma\cdot\operatorname{Log} M &= \mu \operatorname{Log}\frac{\varrho_1^2}{s} - \sigma \operatorname{Log} M \\ \mu \operatorname{Log}\frac{S}{P_2^2} - \Sigma\cdot\operatorname{Log} M &= \mu \operatorname{Log}\frac{s}{\varrho_2^2} - \sigma \operatorname{Log} M.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

POINCARÉ har uttalat följande teorem

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\iota'}{\zeta'} &= \frac{d\iota}{\zeta} \\ \frac{d\tilde{\omega}'}{\zeta'^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{\zeta^2} \\ \frac{dv'}{\zeta'^3} &= \frac{dv}{\zeta^3}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Här betyder $d\iota'$ det bågelement, som tillhör den kurva, hvilken genom den generaliserade substitutionen är transformerad af den kurva, som till bågelement har $d\iota$; $d\tilde{\omega}'$ och dv' betyda det yt- och volymelement, som tillhöra den yta, hvilken genom den generaliserade substitutionen är transformerad af den yta, som till ytelement har $d\tilde{\omega}$ och till volymelement har dv.

Af dessa POINCARÉS teorem samt af likheterna (8) följer, att — numeriskt —

$$\frac{d\iota'}{P_1 P_2} = \frac{d\iota}{\varrho_1 \varrho_2}. \tag{11}$$

$$\frac{d\iota'}{\sqrt{P_1^2 P_2^2 - 4d^2\zeta'^2}} = \frac{d\iota}{\sqrt{\varrho_1^2 \varrho_2^2 - 4d^2\zeta^2}}. \tag{12}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}'}{P_1^2 P_2^2} = \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}. \tag{13}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}'}{P_1^2 P_2^2 - 4d^2\zeta'^2} = \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^2 \varrho_2^2 - 4d^2\zeta^2}. \tag{14}$$

$$\frac{dv'}{P_1^3 P_2^3} = \frac{dv}{\varrho_1^3 \varrho_2^3}. \tag{15}$$

$$\frac{dv'}{\sqrt{(P_1^2 P_2^2 - 4d^2\zeta'^2)^3}} = \frac{dv}{\sqrt{(\varrho_1^2 \varrho_2^2 - 4d^2\zeta^2)^3}} \text{ [1]}. \tag{16}$$

---

[1]) Man har nämligen, om d är halfva afståndet mellan dubbelpunkterna,

$$S^2 = P_1^2 P_2^2 - 4d^2\zeta'^2, \quad s^2 = \varrho_1^2 \varrho_2^2 - 4d^2\zeta^2.$$

Dessa uttryck äro oberoende af μ och M och äro således invarianta för hela den klass af generaliserade substitutioner, som har ζ_1 och ζ_2 till dubbelpunkter.

Med ω menar jag den vinkel, som samtliga sfärer, hvilka uti endera dubbelpunkten tangera $\xi\eta$-planet, bilda med ytan

$$\frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{\zeta^2} = k^2.$$

Med Ω betecknar jag dess transformerade. Då är

$$\left.\begin{aligned} S &= P_1 P_2 \operatorname{Cos} \Omega \\ s &= \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{Cos} \omega \,. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Men

$$\Omega = \omega$$

(12), (14) och (16) öfvergå uti (11), (13) och (15), om detta iakttages.

KLEIN kallar

$$\int \frac{d\tau}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)} = \int \frac{d\tau}{r_1 \cdot r_2}$$

för en viss kurvas längd.

Han uttalar den satsen, att för den lineära substitutionen är kurvans längd invariant.

Om jag i analogi härmed kallar

$$\int \frac{d\tau}{\varrho_1 \varrho_2}$$

för en viss kurvas längd,

$$\int \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}$$

för ytans area samt

$$\int \frac{dv}{\varrho_1^3 \varrho_2^3}$$

för dess volym, så kunna likheterna (10), (12), (14) uttalas sålunda:

Vid den generaliserade substitutionen med dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2 äro kurvans längd, ytans area och volym invarianta.

Genom att kombinera likheterna (14)—(16) och POINCARÉs teorem med likheterna (8) och (9) kunna huru många invarianta differentialuttryck som helst framställas. Några af dessa — de som bero af $\frac{\mu}{\text{Log } M}$ — äro endast invarianta för den grupp af generaliserade loxodromiska substitutioner, som till dubbelpunkter har ζ_1 och ζ_2 samt ett fixt värde på $\frac{\mu}{\text{Log } M}$.

Ett sådant invariant uttryck är

$$\frac{d\tau'}{P_1 P_2}\left(\mu \text{ Log } \frac{\varrho_1^2}{S} - \text{Log } M \cdot \Sigma\right) = \pm \frac{d\tau}{\varrho_1 \varrho_2}\left(\mu \text{ Log } \frac{\varrho_1^2}{s} - \text{Log } M \cdot \sigma\right).$$

Anm. Är substitutionen *elliptisk*, är

$$M = 1 \qquad \mu \neq 0 .$$

$$\because \frac{P_1^2}{S} = \frac{\varrho_1^2}{s}$$

$$\frac{S}{P_2^2} = \frac{s}{\varrho_2^2}$$

$$\because \frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$$

$$\because \frac{P_\alpha^2}{\zeta'} = \pm \frac{\varrho_\alpha^2}{\zeta}$$

$$\alpha = 1, 2 .$$

För den klass af generaliserade elliptiska substitutioner, som har dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2, äro följande uttryck invarianta

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau'}{P_\alpha^2} &= \pm \frac{d\tau}{\varrho_\alpha^2} \\ \frac{d\tilde{\omega}'}{P_\alpha^4} &= \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_\alpha^4} \\ \frac{dv'}{P_\alpha^6} &= \frac{dv}{\varrho_\alpha^6} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\alpha = 1, 2 .$$

Dessutom äro (10)—(15) invarianta.

Är substitutionen åter *hyperbolisk*, så är

$$M \neq 1 \qquad \mu = 0 .$$

$$\because \Sigma = \sigma$$

$$\therefore \frac{S \operatorname{Cos} \Sigma}{\zeta'} = \pm \frac{s \operatorname{Cos} \sigma}{\zeta}$$

$$\frac{S \operatorname{Sin} \Sigma}{\zeta'} = \pm \frac{s \operatorname{Sin} \sigma}{\zeta} .$$

Beteckna med θ vinkeln mellan P_1 och P_2 och med ϑ vinkeln mellan ϱ_1 och ϱ_2.

Då är

$$S \operatorname{Cos} \Sigma = P_1 P_2 \operatorname{Cos} \theta , \qquad s \operatorname{Cos} \sigma = \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{Cos} \vartheta .$$

Vi få följande invarianta differentialuttryck

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau'}{P_1 P_2 \operatorname{Cos} \theta} &= \pm \frac{d\tau}{\varrho_1 \varrho_2 \operatorname{Cos} \vartheta} \\ \frac{d\tilde{\omega}'}{P_1^2 P_2^2 \operatorname{Cos}^2 \theta} &= \pm \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^2 \varrho_2^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta} \\ \frac{dv'}{P_1^3 P_2^3 \operatorname{Cos}^3 \theta} &= \pm \frac{dv}{\varrho_1^3 \varrho_2^3 \operatorname{Cos}^3 \vartheta} . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dessa likheter öfvergå uti (11), (13) och (15), enär

$$\theta = \vartheta .$$

Vidare har jag

$$S \operatorname{Sin} \Sigma = 2d \cdot \delta' = R_1 R_2 \operatorname{Sin} \Lambda$$

$$s \operatorname{Sin} \sigma = 2d \cdot \delta = r_1 r_2 \operatorname{Sin} \lambda .$$

Här betyder $2d$ afståndet mellan ζ_1 och ζ_2; δ betyder afståndet från punkten $(0, z)$ till den räta linie, som förenar dubbelpunkterna; δ' betyder afståndet från $(0, z')$ till samma linie. Med λ menar jag vinkeln mellan r_1 och r_2, med Λ vinkeln mellan R_1 och R_2.

Då är — åtminstone numeriskt —

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau'}{\delta'} &= \frac{d\tau}{\delta} \\
\frac{d\tau'}{R_1 R_2 \operatorname{Sin} \Lambda} &= \frac{d\tau}{r_1 r_2 \operatorname{Sin} \lambda} \\
\frac{d\tilde{\omega}'}{\delta'^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{\delta^2} \\
\frac{d\tilde{\omega}'}{R_1^2 R_2^2 \operatorname{Sin}^2 \Lambda} &= \frac{d\tilde{\omega}}{r_1^2 r_2^2 \operatorname{Sin}^2 \lambda}, \\
\frac{dv'}{\delta'^3} &= \frac{dv}{\delta^3} \\
\frac{dv'}{R_1^3 R_2^3 \operatorname{Sin}^3 \Lambda} &= \frac{dv}{r_1^3 r_2^3 \operatorname{Sin}^3 \lambda}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dessa invarianta uttryck kan äfven en sådan geometrisk betydelse tilläggas som uttrycken (11), (13) och (15).

Alla dessa uttryck (20) äro invarianta för den grupp af generaliserade hyperboliska substitutioner, som har dubbelpunkterna ζ_1 och ζ_2.

Jag öfvergår nu till att söka invarianta differentialuttryck *för den grupp af generaliserade substitutioner, som har en enda dubbelpunkt* ζ, *och denna inom ändligt område.*

Substitutionen är i detta fall parabolisk.

Jag har

$$\frac{P_1^2}{\zeta'} = \pm \frac{\varrho_1^2}{\zeta}$$

$$\frac{\zeta'}{\frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}(z' - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta_0}}\left(z_0' - \zeta_1^{(0)}\right)} = \frac{\pm \zeta}{\frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}(z - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta_0}}\left(z_0 - \zeta_1^{(0)}\right)}.$$

Häraf och af POINCARÉs teorem (10) erhålles

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau'}{P_1^2} &= \frac{d\tau}{\varrho_1^2} \\
\frac{d\tilde{\omega}'}{P_1^4} &= \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^4} \\
\frac{dv'}{P_1^6} &= \frac{dv}{\varrho_1^6}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Dessa likheter kunna anses hafva uppkommit af (11), (13) och (15) derigenom, att jag satt

$$\zeta_2 = \zeta_1 .$$

För den grupp af generaliserade substitutioner, som har en enda dubbelpunkt ζ_1 och denna inom ändligt område samt dessutom fixt värde på

$$\sqrt{\frac{\Delta_0}{\Delta}} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0},$$

äro följande uttryck invarianta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau'}{D'} &= \pm \frac{d\tau}{D} \\ \frac{d\tilde{\omega}'}{D'^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{D^2} \\ \frac{dv'}{D'^3} &= \pm \frac{dv}{D^3} . \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Här betyder D afståndet från $(0, z)$ till räta linien

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}(z - \zeta_1) - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta_0}}\left(z_0 - \zeta_1^{(0)}\right) = 0 , \qquad (23)$$

och D' den transformerade af D.

Uttrycken (22) hafva en analog geometrisk betydelse som (11), (13) och (15).

Oändligt många invarianta differentialuttryck kunna äfven här erhållas.

Jag vill nu söka invarianta differentialuttryck *för den klass af generaliserade substitutioner, som har den ena dubbelpunkten i ∞ och den andra uti punkten ζ_1 inom ändligt område.*

Den lineära substitutionen är i detta fall af formen

$$z' = \pm \alpha z + \beta . \qquad (24)$$

Substitutionen är icke-parabolisk.

Substitutionsformlerna (2) öfvergå i

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \pm\sqrt{\alpha\alpha_0}\cdot\zeta \\ z' &= \alpha z + \beta \\ z'_0 &= \alpha_0 z_0 + \beta_0 . \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Sätt

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Me^{i\mu} \\ z' - \zeta_1 &= R_1 e^{i\Phi_1} \\ z - \zeta_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} . \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Då är

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_1^2}{\zeta'^2} &= \frac{r_1^2}{\zeta^2} \\ \frac{P_1^2}{\zeta'^2} &= \frac{\varrho_1^2}{\zeta^2} . \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\mu \operatorname{Log} R_1 - \Phi_1 \operatorname{Log} M = \mu \operatorname{Log} r_1 - \varphi_1 \operatorname{Log} M \tag{28}$$

etc.

Af POINCARÉs teorem och af likheterna (27) följer, att — numeriskt —

$$\frac{d\tau'}{R_1} = \frac{d\tau}{r_1} \tag{29}$$

$$\frac{d\iota'}{P_1} = \frac{d\tau}{\varrho_1} \tag{30}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}'}{R_1^2} = \frac{d\tilde{\omega}}{r_1^2} \tag{31}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}'}{P_1^2} = \frac{d\tilde{\omega}}{\varrho_1^2} \tag{32}$$

$$\frac{dv'}{R_2^3} = \frac{dv}{r_1^3} \tag{33}$$

$$\frac{dv'}{P_1^3} = \frac{dv}{\varrho_1^3} . \tag{34}$$

Naturligtvis kunna huru många invarianta differentialuttryck som helst erhållas genom kombination af POINCARÉS teorem och likheterna (27). Dessa äro invarianta för hela den grupp af generaliserade substitutioner, hvilken har ζ_1 och ∞ till dubbelpunkter.

Uttrycken (30), (32) och (34) hafva samma geometriska betydelse som (11), (13) och (15). De kunna anses hafva uppkommit af dessa genom bortdividerande af de oändligt stora P_2 och ϱ_2.

En sådan betydelse kan naturligtvis äfven tilläggas uttrycken (29), (31) och (33).

Anm. Är substitutionen *elliptisk*, så är

$$M = 1, \quad \mu \neq 0.$$

$$\because R_1 = r_1$$
$$\zeta' = \pm \zeta$$
$$P_1 = \varrho_1.$$

Mina invarianta differentialuttryck (29)—(34) ersättas af

$$\left. \begin{aligned} d\tau' &= \pm\, d\tau \\ d\tilde{\omega}' &= \quad d\tilde{\omega} \\ dv' &= \pm\, dv. \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

Således: en kurvas båglängd τ, en ytas area $\tilde{\omega}$ och volym v äro invarianta för den grupp af generaliserade elliptiska substitutioner, som har ζ_1 och ∞ till dubbelpunkter.

Är substitutionen *hyperbolisk*, så är

$$M \neq 1, \quad \mu = 0.$$

$$\because \Phi_1 = \varphi_1.$$

I detta fall blifva invarianterna utom (29)—(34)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau'}{\xi' - m_1} &= \pm \frac{d\tau}{\xi - m_1} \\
\frac{d\tau'}{\eta' - m'_1} &= \pm \frac{d\tau}{\eta - m'_1} \\
\frac{d\tilde{\omega}'}{(\xi' - m_1)^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{(\xi' - m_1)^2} \\
\frac{d\tilde{\omega}'}{(\eta' - m'_1)^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{(\eta - m'_1)^2} \\
\frac{dv'}{(\xi' - m_1)^3} &= \pm \frac{dv}{(\xi - m_1)^3} \\
\frac{dv'}{(\eta' - m'_1)^3} &= \pm \frac{dv}{(\eta - m'^6)^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Här betyder m_1 och m'_1 ξ- och η-koordinaterna för ζ_1. Dessa uttryck äro invarianta för hela den klass af generaliserade hyperboliska substitutioner, som har ζ_1 och ∞ till dubbelpunkter. (36) har en analog geometrisk betydelse som (11), (13) och (15).

Slutligen vill jag söka invarianta differentialuttryck *för den grupp af generaliserade substitutioner, som har ∞ till enda dubbelpunkt.*

I detta fall är substitutionen parabolisk. Man har

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_{,} &= \pm \zeta \\
z' &= z + \beta \\
z'_0 &= z_0 + \beta_0 .
\end{aligned}\right\}$$

Låt

$$\beta = Ne^{i\nu}.$$

Då är

$$\zeta'^2 = \zeta^2$$

$$\xi' \operatorname{Sin} \nu - \eta' \operatorname{Cos} \nu = \xi \operatorname{Sin} \nu - \operatorname{Cos} \nu.$$

Af den öfre likheten samt af POINCARÉS teorem följer, att

$$\left.\begin{aligned}
d\tau' &= \pm d\tau \\
d\tilde{\omega}' &= d\tilde{\omega} \\
dv' &= \pm dv .
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Saledes: en kurvas bäglängd τ, en ytas area $\tilde{\omega}$ och volym v äro invarianta för den grupp af generaliserade substitutioner, som har ∞ till enda dubbelpunkt.

För den grupp af generaliserade substitutioner, som har ∞ till enda dubbelpunkt och ett fixt värde på vinkeln ν, kunna andra invarianta differentialuttryck angifvas.

Beteckna med Δ afståndet från $(0, z)$ till den räta linien

$$\xi \operatorname{Sin} \nu - \eta \operatorname{Cos} \nu = 0$$

samt med Δ' den transformerade af Δ. Då är

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau'}{\Delta'} &= +\frac{d\tau}{\Delta} \\ \frac{d\tilde{\omega}'}{\Delta'^2} &= \frac{d\tilde{\omega}}{\Delta^2} \\ \frac{dv'}{\Delta'^3} &= \frac{dv}{\Delta^3}, \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

åtminstone numeriskt.

Dessa uttryck kan man naturligtvis äfven tillägga en sådan geometrisk betydelse som uttrycken (11), (13) och (15).

Äfven här kunna oändligt många invarianta differential-uttryck erhållas.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 224.)

Baltimore. *Johns Hopkins university.*
American chemical journal. Vol. 11 (1889): N:o 6—7. 8:o.
» journal of mathematics. Vol. 12: N:o 1—2. Index to Vol. 1—10. 1889—90. 4:o.
» » » philology. Vol. 10: 2—3. 1889. 8:o.
Studies from the biological laboratory, Vol. 4: N:o 5. 1889. 8:o.
» in historical and political science. Ser. 7: 10—12. 1889. 8:o.
Circulars. Vol. 9: N:o 77—80. 1889—90. 4:o.
Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Spomenik. 3. 1890. 4:o.
Glas. 14; 19—20. 1890, 1889. 8:o.
Boston. *Boston society of natural history.*
Proceedings. Vol. 24: P. 1—2. 1889. 8:o.
Budapest. *K. Ungerska geologiska anstalten.*
Földtani Közlöny.-Geologische Mittheilungen. K. 19 (1889): F. 7—12. 8:o.
Katalog der Bibliothek: Nachtrag 2. 1889. 8:o.
Calcutta. *Great trigonometrical survey of India.*
Account of the operations. Vol. 4A, 5, 7—8, 10. Dehra Dun. 1879—87. 4:o.
— *Indian museum.*
DISTANT, W. L., A monograph of Oriental Cicadidæ. P. 2. 1889. 4:o.
Cambridge, U. S. *Museum of comparative zoology.*
Memoirs. Vol. 16: N:o 3. 1889. 4:o.
Bulletin. Vol. 16: N:o 7; 19: 1—3. 1890. 8:o.
— *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 21: P. 1; 22. 1889. 4:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. (4) Vol. 1 (1888/89). 4:o.
Bullettino mensile. (2) Fasc. 9—12. 1889—90. 8:o.
Córdoba. *Observatorio nacional Argentino.*
Resultados. Vol. 11 (1878). Buenos Aires. 1889. 4:o.
Erfurt. *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. Neue Folge. H. 16. 1890. 8:o.
Genève. *Société de physique et d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 30: P. 2. 1890. 4:o.
Greifswald. *K. Universität.*
Akademiskt tryck. 1889. 118 häften. 4:o & 8:o.
Göttingen. *K. Societät der Wissenschaften.*
Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität. Jahr 1889. st. 8:o.
Göttingische Gelehrte Anzeigen. Jahr 1889: Bd. 1—2. st. 8:o.
Haarlem. *Teyler's tweede Genootschap.*
Archives du musée Teyler. Sér. 2. Vol. 3: P. 4. 1890. 4:o.
Catalogue de la Bibliothèque. Vol. 2: L. 1—3. 1889. 4:o.

(Forts. å sid. 288.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 107.

Integralernas form vid lineära differentialeqvationer.

Af A. M. JOHANSON.

[Meddeladt den 14 Maj 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

En lineär homogen differentialeqvation af formen

$$p_0(x)\cdot x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\cdot x^{n-1}\cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\cdot y = 0,$$

hvarest $p_0(x)$, $p_1(x)\ldots p_n(x)$ äro potensserier, som fortskrida efter hela positiva potenser af x och $p_0(x)$ för $x = 0$ har ett från noll skildt värde, har i omgifningen af det singulära stället $x = 0$ ett system af n integraler

$$y_\varkappa = x^{\varrho_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ g_\nu^{(\varkappa)} + g_\nu^{\varkappa-1} \log x + \ldots + g_\nu (\log x^{\varkappa-1} \right\} x^\nu$$

der $\varrho_\varkappa$ är en rot till den determinerande likheten

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1)p_0(0) + \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2)p_1(0) + \ldots + p_n(0)\cdot = 0$$ [1].

Mellan dessa n integraler kan ej bestå någon lineär relation. Samtliga ingående koefficienter äro dock ej af hvarandra oberoende. Relationer förekomma mellan de integraler, som tillhöra samma grupp. Det kan emellertid inträffa, att äfven grupperna sönderfalla i skilda grupper, partialgrupper, af den beskaffenhet, att relationer blott förekomma inom samma partialgrupp. För att afgöra, när detta eger rum, ordna vi de till en grupp hörande

---

[1]) FUCHS, BORCHARDT's Journal, Bd. 66. 68.

rötterna $\varrho_\varkappa$, så att $\varrho_\alpha - \varrho_\beta \geqq 0$, om $\alpha < \beta$. Låt rötterna vara $\varrho_0, \varrho_1 \ldots, \varrho_{\mu-1}$. Dessa låta då alltid ordna sig på följande sätt:

$$\varrho_0 = \varrho_1 = \ldots = \varrho_{\alpha-1};\ \varrho_\alpha = \varrho_{\alpha+1} = \ldots = \varrho_{\beta-1}; \ldots \varrho_\lambda = \varrho_{\lambda+1} = \ldots = \varrho_{\mu-1}$$

$$\varrho_0 = \varrho_\alpha + n_\alpha = \varrho_\beta + n_\alpha + n_\beta = \ldots = \varrho_\lambda + n_\alpha + n_\beta + \ldots + n_\lambda,$$

hvarest $n_\alpha, n_\beta, \ldots n_\lambda$ äro hos hela från noll skilda tal.

Från FUCHS' undersökningar[1]) veta vi, att koefficienterna för de olika potenserna af $\log x$ i en integral $y_\varkappa$ låta uttrycka sig lineärt och homogent med konstanta koefficienter uti de från $\log x$ fria termerna uti de i gruppen föregående integralerna $y_0, y_1, \ldots y_{\varkappa-1}$.[1]) För att gruppen skall kunna sönderfalla i partialgrupper fordras således, att vid bildande af integralerna $y_0, y_1, \ldots$ man måste träffa på en första integral $y_\varkappa$, som ej innehåller några logaritmiska termer. Såsom jag redan förut varit i tillfälle att meddela eger detta rum, om determinanterna

$$(-1)^\nu h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(\varrho+\nu-1), & f_2(\varrho+\nu-2), & \ldots f_{\nu-1}(\varrho+1), & f_\nu(\varrho) \\ f(\varrho+\nu-1), & f_1(\varrho+\nu-2), & \ldots f_{\nu-1}(\varrho+1), & f_{\nu-1}(\varrho) \\ 0 & f(\varrho+\nu-2), & \ldots f_{\nu-3}(\varrho+1), & f_{\nu-2}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & f(\varrho+1) & f_1(\varrho) \end{vmatrix}$$

uppfylla vissa vilkor.[2]) Jag vill här begagna mig af att påvisa en i nämda uppsats förekommande oriktighet, idet nämligen nederst på sidan 586 faktorn $g(\varrho)$ blifvit utelemnad, att det ej är $h_{n_\alpha}(\varrho_\alpha)$ utan $h_{n_\alpha}(\varrho_\alpha) g(\varrho_\alpha)$ som är noll af ordningen α. För att den angifna uppdelningen skall ega rum måste således $h_n(\varrho)$ uppfylla de angifna vilkoren och dessa följa ej af rötternas gruppering till likheten $f(\varrho) = 0$.

Jag vill äfven här begagna den af FROBENIUS[3]) gifna framställningen för integralerna

---

[1]) FUCHS'. BORCHARDTS Journal, Bd. 68, sid. 364.
[2]) Öfvers. af K. V. A. Förh. 1889, N:o 9.
[3]) FROBENIUS, BORCHARDTS Journal, Bd. 76.

$$y_\varkappa = x^{\varrho_\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ g_\nu^{(\varkappa)}(\varrho_\varkappa) + \frac{2'}{\varkappa} g_\nu^{(\varkappa-1)}(\varrho_\varkappa) \log x + \ldots + g_n(\varrho_\varkappa)(\log x)^\varkappa \right\} x^\nu$$

der då $g_\nu(\varrho)$ bestämmas genom rekursionsformlerna

$$g_\nu f(\varrho + \nu) + g_{\nu-1} f_1(\varrho + \nu - 1) + \ldots + g_0 f_\nu(\varrho) = 0$$

och

$$g_0(\varrho) = f(\varrho + 1) f(\varrho + 2) \ldots f(\varrho + \varepsilon) \varphi(\varrho),$$

hvarest ε är större eller lika med differensen mellan två rötter hvilka som helst inom gruppen och $\varphi(\varrho)$ en godtycklig funktion af ϱ.

Emedan åtminstone ej alla $g_\nu(\varrho_0)$ kunna vara noll, är y_α den första integral efter y_0, som *kan* vara fri från logaritmiska termer och som således *kan* börja en ny grupp. För att y_α skall sakna logaritmiska termer måste $g_\nu(\varrho)$ för $\varrho = \varrho_\alpha$ vara noll af ordningen α. Eftersom $g_0(\varrho_\alpha)$ är noll af nämda ordning och

$$g_\nu(\varrho) = \frac{g_0(\varrho) \cdot h_\nu(\varrho)}{f(\varrho + 1) \ldots f(\varrho + \nu)}$$

måste $h_{n_\alpha}(\varrho_\alpha)$ vara noll af samma ordning som $f(\varrho_\alpha + n_\alpha) = f(\varrho_0)$ och alltså af ordningen α. Då $h_\nu(\varrho_\alpha)$ för $\nu > n_\alpha$ äfven är noll denna ordning, är detta äfven det tillräckliga vilkoret. Detta kunna vi äfven se deraf, att $g_\nu(\varrho_\alpha) \ldots g_{n_\alpha - 1}(\varrho_\alpha)$ a priori äro noll af denna ordning, att med detta vilkor på $h_{n_\alpha}(\varrho_\alpha)$ är också $g_{n_\alpha}(\varrho_\alpha)$ det. I rekursionsformeln för $g_\nu(\varrho)$ kan koefficienten för $g_{n_{\alpha+\mu}}(\varrho_\alpha)$, der μ är ett positivt tal, aldrig blifva noll och hvarje efterföljande term är noll af nämda ordning α, således måste äfven $g_{n_{\alpha+\mu}}(\varrho)$ vara det.

Då ej alla $g_\nu(\varrho_\alpha)$ äro noll af högre ordning än α, måste $y_{\alpha+1}, \ldots y_{\beta-1}$ innehålla logaritmiska termer. För att y_β skall kunna börja en ny grupp måste $g_\nu(\varrho_\beta)$ vara noll af ordningen β. Som $g_0(\varrho_\beta)$ uppfyller detta vilkor, måste

$$\frac{h_\nu(\varrho)}{f(\varrho + 1) \ldots f(\varrho + \nu)},$$

städse vara ändlig och således $h_{n_\beta}(\varrho_\beta)$ noll af samma ordning

som $f(\varrho_\beta + n_\beta) = f(\varrho_\alpha)$ d. v. s. af ordningen $\beta - \alpha$ och $h_{n_\beta + n_\alpha}(\varrho_\beta)$ noll af samma ordning som $f(\varrho_\beta + n_\beta) f(\varrho_\beta + n_\beta + n_\alpha) = f(\varrho_\alpha) \cdot f(\varrho_0)$, alltså af ordningen β.

Om vi upprepa detta förfaringssätt, se vi *att en integral* y_b *saknar logaritmiska termer, om för* $\varrho = \varrho_b$

$h_\nu(\varrho)$ är för $\nu = \varrho_a - \varrho_b$ noll af ordn. $b - a$
» $\nu = \varrho_a' - \varrho_b$ » » $b - a'$
. . . .
$\nu = \varrho_0 - \varrho_b$ » » b

der b, a, a' ... äro tal i raden 0, α, β, ...

Antalet partialgrupper kan altså icke öfverstiga antalet rötter ϱ_0, ϱ_α, ϱ_β, ... och logaritmiska termer förekomma alltid, om det fins lika rötter.

Låta samtliga integraler y_0, y_α, y_β, ... framställa sig utan logaritmer, bilda dessa första elementen i hvar sin partialgrupp. Antalet oberoende konstanter är nämligen i första gruppen α, i andra $\beta - \alpha$, i tredje $\gamma - \beta$ o. s. v. och således i samtliga $\alpha + \beta - \alpha + \gamma - \beta + . \quad = \mu$ och således lika många som antalet integraler.

Låter integralen y_λ framställa sig utan logaritmer, utgöra integralerna y_λ, $y_{\lambda+1} \cdot\cdot y_{\mu-1}$ en partialgrupp. Antalet oberoende konstanter är $\mu - \lambda$. Äro ej vilkoren härför d. v. s. samtliga vilkoren $h_\nu(\varrho_\lambda)$ uppfylda, innehåller den allmänna integralen $y_{\mu-1}\,\mu$ oberoende konstanter, hvadan således någon uppdelning i partialgrupper ej eger rum. Äro åter dessa vilkor $h_\nu(\varrho_\lambda)$ uppfylda hafva vi att upprepa samma förfarande med de öfriga integralerna och behöfva då ej alls taga i betraktande integralerna y_λ, $y_{\lambda+1} \cdot\cdot y_{\mu-1}$.

Är $h_\nu(\varrho)$ en konstant, är det $f_0(\varrho)$ som ensam bestämmer integralernas form. Differentialeqvationen är då

$$a_0 \cdot x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n+1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \,.\,. + p_n(x) \cdot y = 0$$

der a_0, a_1 .. a_{n-1} äro konstanter.

Låtom oss tillämpa de erhållna resultaten på den differentialeqvation, som satisfieras af GAUSS' hypergeometriska serie

$$x^2(1-x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+x[\gamma-\alpha+\beta+1)x]\cdot\frac{dy}{dx}-\alpha\beta\cdot x\cdot y=0.$$

Här är

$$f_0(\varrho)=\varrho[\varrho-1+\gamma]$$
$$f_1(\varrho)=-(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)$$

och således rötterna $\varrho=0$ och $\varrho=1-\gamma$ samt

$$(-1)^\nu h_\nu(\varrho)=f_1(\varrho)f_1(\varrho+1)\ldots f_1(\varrho+\nu-1)$$
$$h_\nu(\varrho)=(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)(\varrho+\alpha+1)(\varrho+\beta+1)\ldots(\varrho+\alpha+\nu-1)(\varrho+\beta+\nu-1).$$

Är γ ej något helt tal, erhållas två grupper, i annat fall endast en. Är $\gamma=1$ och alltså båda rötterna $\varrho=0$ uppträder $\log x$. Är $\gamma=1+m$, $m=1,2,3,\ldots$ är $\varrho_0=0$, $\varrho_1=-m$, $\varrho_0-\varrho_1=m$

$$h_m(\varrho_1)=\prod_{\nu=1}^{m}(-m+\alpha+\nu-1)(-m+\beta+\nu-1).$$

Är slutligen $\gamma=1-m$, $m=1,2,3\ldots$ är $\varrho_0=-m$ $\varrho_1=0$ $\varrho_0-\varrho_1=m$

$$h_m(\varrho_1)=\prod_{\nu=1}^{m}(\alpha+\nu-1)(\beta+\nu-1).$$

Om den allmänna integralen skall låta framställa sig utan $\log x$, är det nödvändigt och tillräckligt, att i de respective fallen någon af de ingående faktorerna skall vara noll.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 282.)

Halifax. *Nova Scotian institute of natural science.*
Proceedings and transactions. Vol. 7: P. 3. 1889. 8:o.
Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiella statistik. 1: 8—9; 2: 5; 6: 16. 1889—90. 4:o.
Statistisk årsbok för Finland. Årg. 11(1889/90). 8:o.
Kiew. *Société des naturalistes.*
Sapiski (Mémoires). T. 10: V. 2. 1889. 8:o.
Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*
Videnskabelige Meddelelser. Aarg. 41 (1889). 8:o.
London. *K. Storbritanniska regeringen.*
Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger, 1873—1876. Physics and chemistry. Vol. 2. London 1889. 4:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 12: P. 10. 1890. 4:o.
Proceedings of the scientific meetings. Year 1889: P. 4. 8:o.
Madison. *Wisconsin academy of sciences, arts, and letters.*
Transactions. Vol. 7(1883/87). 8:o.
Middelburg. *Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.*
Nagtglas, F., Levensberichten van Zeeuwen . . . Afl. 2. 1889. 8:o.
Verfolg ... op den Catalogus der archæologische Verzameling. 1890. 8:o.
New York. *New York academy of sciences.*
Annals. Vol. 4: N:o 12; 5: 1—3. 1889. 8:o.
Transactions. Vol. 9: N:o 1—2. 1889. 8:o.
— *Torrey botanical club.*
Bulletin. Vol. 16 (1889): N:o 1—12. 8:o.
— *American museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 2: N:o 3—4. 1889—90. 8:o.
Pennsylvania. *Geological survey.*
Second geological survey. AA: Atlas. P. 2—3, 5. Fol.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1889: P. 3. 8:o.
— *American philosophical society.*
Transactions. (2) Vol. 16: P. 3. 1890. 4:o.
Proceedings. Vol. 26: N:o 130. 1889. 8:o.
Pulkowa. *Nicolai-Hauptsternwarte.*
Observations. Vol. 8. 1889. 4:o.
» Suppl. 2: Lindemann, E., Photometrische Bestimmung der Bonner Durchmusterung. 1889. 4:o.
Stern-Ephemeriden auf das Jahr 1890 . . . von W. Döllen. 1890. 8:o.
Tabulæ quantitatum Besselianarum pro annis 1890 ad 1894, ed. O. Struve. Petropoli 1889. 8:o.
Zum 50-jährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte. Beschreibung des 30-zölligen Refraktors und des astrophysikalischen Observatoriums. S:t Petersburg 1889. 4:o.

STRUVE, O., Sammlung der Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsterniss 1888 $^{28}/_{1}$. S:t Petersb. 1889. 8:o.

SCHIAPARELLI, I. V., De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques. S:t Petersbourg 1889. 8:o.

Sydney. *Australian museum.*

Records. Vol. 1: N:o 1. 1890. 8:o.

Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.*

Verslag van het verhandelde in de algemeene Vergadering 1889 $^{25}/_{6}$. 8:o.

Aanteekeningen » » Sectievergaderingen 1889 $^{25}/_{6}$. 8:o.

v. BEMMELEN, J. F., De Erfelijkheid van verworfen Eigenschappen. s'Gravenhage 1890. 8:o.

Washington. *Bureau of ethnology.*

Annual report. 5 (1883/84). st. 8:o.

— *U. S. Coast and geodetic survey.*

Report. Year 1887, Appendix 16: GORE, H., A bibliography of geodesy. 1889. 4:o.

— *U. S. Geological survey.*

Annual report. 7 (1885/86). st. 8:o.

— *U. S. National museum.*

Bulletin. N:o 33—37. 1889. 8:o.

Proceedings. Vol. 10 (1887)—11 (1888). 8:o.

— *U. S. Naval observatory.*

Observations. Year 1884. Appendix: Catalogue of stars observed at the U. S. Naval observatory, 1845—1877. Ed. 3, revised by E. FRISBY. 1889. 4:o.

Brukspatronen, m. m. Hr C. Ekman.

WOOD, J. G., The natural history of man. (1—2) London 1868—70. 8:o.

Författarne.

ENESTRÖM, G., Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. Sthm 1890. 8:o.

— Småskrift. 1.

NATHORST, A. G., Beiträge zur mesozoischen Flora Japans. Wien 1890. 4:o.

— Småskriftar. 7 st. 8:o.

OLSSON, K. G., Bemerkungen über die Integrationsmethoden der Zeitreduction in der Gyldén'schen Theorie. Kristiania 1890. 8:o.

WILLE, N., Yderligere om regnopfangende Planter. Lund 1890. 8:o.

Stockholm, 1890. Kongl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 6.

Onsdagen den 11 Juni.

INNEHÅLL:

På tillstyrkan af komiterade antogs till införande i Akademiens Handlingar en af Hr TAMERLAN THORELL författad afhandling med titel: »Spindlar från Nikobarerna och andra delar af södra Asien, till större delen insamlade under danska korvetten Galatheas resa omkring jorden 1835—1847».

Hr SMITT förevisade och förklarade resterna af den i Visby Domkyrka under flere århundraden upphängda s. k. domedagsfisken, hvilken visades hafva varit en vanlig torsk.

Hr RUBENSON redogjorde för innehållet af en af Docenten N. EKHOLM inlemnad afhandling med titel: »Etude des conditions météorologiques à l'aide de cartes synoptiques représentant la densité de l'air». (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr Friherre NORDENSKIÖLD redogjorde för planen för den svenska expedition till Spetsbergen, hvilken vid Akademiens April-sammankomst omförmäldes såsom förestående, och hvilken, bekostad af Friherre O. DICKSON och Bokförläggaren F. BEIJER samt till någon del af deltagarna sjelfva, och bestående af Fil.

Kandidaten G. NORDENSKIÖLD, Friherre A. KLINCKOWSTRÖM och studeranden BJÖRLING samt ett preparatorsbiträde, numera fullt utrustad lemnat Tromsö och antagligen redan befunne sig på Spetsbergen.

Hr WITTROCK dels meddelade, att godsegaren Grefve FR. STRÖMFELT såsom gåfva till Riksmuseum öfverlemnat sin sons, framlidne Regnellske Amanuensen Grefve H. STRÖMFELTS efterlemnade värdefulla alg- och fanerogamsamlingar, och dels refererade en af Med. Kandidaten M. ELFSTRAND författad och inlemnad afhandling: »Botaniska utflygter i sydvestra Jemtland och angränsande del af södra Trondhjems amt sommaren 1889, jemte beskrifning på åtskilliga derunder påträffade Hieracia och Carices» (se Bihang etc.).

Densamme redogjorde äfven för innehållet af de berättelser om resor för botaniskt ändamål, hvilka blifvit under sommaren 1889 med understöd af Akademien utförda, nämligen af Docenten A. LUNDSTRÖM, som utfört växtgeografiska och växtbiologiska forskningar i trakten af Gellivara och angränsande delar af Luleå lappmark; af Fil. Kandidaten L. ROMELL, som anställt undersökningar öfver Östergötlands och särskildt Ombergstraktens svampflora; af Fil. Kandidaten G. ANDERSSON, som studerat olika växtformationer samt deras fördelning och utbredning på de sydsvenska torfmossarne; och af folkskoleinspektören F. LAURELL, som idkat dendrologiska studier i Östergötland, på Gotland, i Skåne och trakten af Göteborg.

Hr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade första bandet af en under titel: »Notes et mémoires présentés à la conférence des mathématiques de l'université de Stockholm» af honom utgifven samling mathematiska afhandlingar, utarbetade af lärare och elever vid Stockholms Högskolas mathematiska seminarium.

Sekreteraten meddelade följande inlemnade uppsatser: »Kritiska anmärkningar om den Grönländska vegetationens historia» af Prof. A. G. NATHORST (se Bihang etc.); 2:o) »Om oxidation af fenylmetyltriazolkarbonsyra, 1: α-Fenyltriazolkarbonsyra» af Docenten J. A. BLADIN*; 3:o) »Om några amoniakaliska pla-

tinaföreningar» af Fil. Kandidaten O. CARLGREN*; 4:o) »Studien über nordische Turbellarien und Nemertinen» af Docenten D. BERGENDAL*.

Genom anställda val kallades Professorn vid Stockholms Högskola WALDEMAR CHRISTOFER BRÖGGER till svensk-norsk, och Amerikanske Ingeniören THOMAS ALVA EDISON till utländsk ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Entomologiska föreningen.*
Entomologisk tidskrift. Årg. 10(1889): H. 1—4. 8:o.
Kristiania. *K. Universitetet.*
Universitetsprogram. 1889: 2. SCHÜBELER, F. C., Viridarium Norvegicum. Bd. 3. 1889. 4:o.
Norsk Bogfortegnelse. Aar 1888. 1889. 8:o.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 13: H. 2—4. 1890. 8:o.
— *Kommitteen for den Norske Nordhavs-Expedition.*
Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876—1878. H. 19. 1890. st. 4:o.
Berlin. *K. Preussische geologische Landesanstalt.*
Abhandlungen zur geologischen Specialkarte Preussens und der Thüringischen Staaten. Bd. 1: H. 4; 2: 1, Text & Atlas; 4, Text & Atlas; 3: 1, Text & Atlas; 4, Text & Atlas; 4: 1—2, Text & Atlas; 3, Text & Atlas; 5: 2, Text & Atlas; 6: 1, Text & Atlas; 7: 2—3; 8: 4; 9: 1, Text & Atlas; 2, Text & Atlas. 1876—89. 8:o, 4:o, Fol.
Jahrbuch. 1(1880)—5(1884); 7(1886)—9(1888). 8:o.
Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd. 11: H. 1—2. 1889—90. 8:o.
Brünn. *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd. 27(1888). 8:o.
Bericht der meterologischen Commission. 7(1887). 8:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Cunningham memoirs. N:o 5. 1890. 4:o.
Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 74(1888/89) . . . 8:o.
Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
Archiv. Jahr 43(1889). 8:o.
Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*
Mémoires. 1. 1890. 8:o.
Journal. 8. 1890. 8:o.
— *Sällskapet för Finlands geografi.*
Fennia. 2—3. 1890. 8:o.
Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*
Festskrift i Anledning af Den naturhistoriske Forenings Bestaaen fra 1833—1883. Kjöbenh. 1890. 8:o.

Klagenfurt. *Naturhistorisches Landesmuseum.*
Jahrbuch. H. 20. 1889. 8:o.
Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen zu Klagenfurt von F. SEELAND. Jahr 1884—86. 1889. Fol.
Liège. *Société R. des sciences.*
Mémoires. (2). T. 16. 1890. 8:o.
Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*
Bericht. 42—48. 1884—1890. 8:o.
Liverpool. *Literary and philosophical society.*
Proceedings. N:o 41 (1886/87)—43 (1888/89). 8:o.
Paris. *Société géologique de France.*
Mémoires. Paléontologie. T. 1: Fasc. 1. 1890. 4:o.
S:t Petersburg. *Comité géologique.*
Mémoires. Vol. 9: 1; 11: 1. 1889. 4:o.
Bulletins. 8: N:o 6—8. 1889. 4:o.
Stuttgart. *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
Jahreshefte. Jahrg. 46 (1889). 8:o.
Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Neue Folge. Bd. 23. 1890. 8:o.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1889. 8:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrschrift. Jahrg. 34 (1889): H. 3—4. 8:o.
Hrr F. & G. Beijer.
NEUMAYR, M. & NATHORST, A. G., Jordens historia. H. 5. Sthm. 1890. 8:o.
Kanslisekreteraren Hr S. Nordström.
HUBER, F., Nye Iagttagelser over Bierne . . ., oversat under Medvirkning af TH. THORSON. Kjöbenh. 1860. 8:o.
Utgifvaren.
Notes et mémoires présentés à la conférence de mathématiques de l'université de Stockholm et publiés par G. MITTAG-LEFFLER. 1. Sthm. 1890. 4:o.
Författarne.
BOVALLIUS, C., The Oxycephalids. Upsala 1890. 4:o.
JUEL, H. O., Beiträge zur Anatomie der Trematodengattung Apoblema (Dujard.). Sthm. 1889. 8:o.
OLSSON, P., De Jemtländska fjällväxternas utbredning inom Sverige. Östersund 1890. 4:o.
STENSTRÖM, K. O. E., Värmländska Archihieracier. Upsala 1889. 8:o.
ÅSTRAND, J. J., Hülfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Mit einer Einleitung von H. BRUHNS. Leipz. 1890. 8:o.
SCHIAPARELLI, E. G. V., Considerazioni sul moto rotatorio del pianeta Venere. Nota 1—5. Milano 1890. 8:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

180. Om oxidation af fenylmetyltriazolkarbonsyra.
I. α-Fenyltriazolkarbonsyra.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 11 Juni 1890 genom P. T. Cleve.]

Knorr och Laubmann hafva visat[1]), att pyrrolföreningarna fullständigt förbrännas af kaliumpermanganat, men att de af Knorr upptäckta s. k. pyrazolföreningarna äro beständiga mot detta oxidationsmedel, i det att pyrazolkärnan därvid ej förstöres, utan blott de vid den samma bundna, öppna sidokedjorna oxideras till karboxyl. Så erhöllo de af difenylmetyl- och fenyldimetylpyrazolkarbonsyran,

$$\begin{array}{ccc} & N\text{—}C_6H_5 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ & N \quad C\text{—}CH_3 & \\ & \| \qquad \| & \\ C_6H_5\text{—} & C\text{—}C\text{—}COOH & \end{array} \quad \text{och} \quad \begin{array}{ccc} & N\text{—}C_6H_5 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ & N \quad C\text{—}CH_3 & \\ & \| \qquad \| & \\ H_3C\text{—} & C\text{—}C\text{—}COOH & \end{array},$$

vid oxidationen

$$\begin{array}{ccc} & N\text{—}C_6H_5 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ & N \quad C\text{—}COOH & \\ & \| \qquad \| & \\ C_6H_5\text{—} & C\text{—}C\text{—}COOH & \end{array} \quad \text{resp.}$$

$$\begin{array}{ccc} & N\text{—}C_6H_5 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ & N \quad C\text{—}CH_3 & \\ & \| \qquad \| & \\ HOOC\text{—} & C\text{—}C\text{—}COOH & \end{array} \quad \text{och} \quad \begin{array}{ccc} & N\text{—}C_6H_5 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ & N \quad C\text{—}COOH & \\ & \| \qquad \| & \\ HOOC\text{—} & C\text{—}C\text{—}COOH & \end{array}.$$

Pyrazolkärnan är således i detta hänseende beständigare än pyrrolkärnan, d. v. s. hos en femledig kärna med *två* N-atomer är

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XXII, 172 (1889).

bindningen mellan de ingående atomerna fastare än hos en sådan med blott *en* N-atom. Men huru förhåller sig triazolkärnan, som håller ej mindre än *tre* N-atomer, i detta hänseende?

För att besvara denna fråga har jag behandlat den förut af mig beskrifna[1]) fenylmetyltriazolkarbonsyran,

$$\begin{array}{c} C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \quad\;\; | \quad\; \| \\ HOOC\text{—}C \quad C\text{—}CH_3, \\ \diagdown\!\diagup \\ N \end{array}$$

med kaliumpermanganat i alkalisk lösning[2]) och därvid funnit, att triazolkärnan härvid ej angripes, utan blott den öppna sidokedjan (metylgruppen) oxideras till karboxyl. *Triazolföreningarna förhålla sig således vid oxidation med kaliumpermanganat i alkalisk lösning på samma sätt som pyrazolföreningarna, d. v. s. bindningen mellan atomerna i triazolkärnan är lika fast som den i pyrazolkärnan.*

Vid oxideringen af fenylmetyltriazolkarbonsyran förfors sålunda. Syran oxiderades i kolfvar i portioner om 4 gr., lösta i 10 gr. 25-procentig kalilut, som försattes med 7—8 gr. kaliumpermanganat, löst i varmt vatten. Vid vanlig temperatur skedde ingen inverkan, hvarför kolfvarna ställdes på vattenbad. Så småningom började brunsten utfalla, och efter några dagar var lösningen fullständigt eller i det närmaste affärgad. Brunstenen affiltrerades (var lösningen ej fullständigt affärgad, förstördes öfverskjutande permanganat medels några droppar alkohol) och tvättades med vatten, hvarvid ständigt något litet brunsten i fint fördeladt tillstånd gick igenom filtrum. Filtratet koncen-

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 6, sid. 149.

[2]) Jag har på samma sätt behandlat äfven fenyletyltriazolkarbonsyran,

$$\begin{array}{c} C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \quad\;\; | \quad\; \| \\ HOOC\text{—}C \quad C\text{—}C_2H_5, \\ \diagdown\!\diagup \\ N \end{array}$$

hvilken syra jag ej förut beskrifvit, men om hvilken jag snart skall lemna ett meddelande.

trerades på vattenbad och filtrerades efter afsvalning från den ringa mängden brunsten och litet afskild kiselsyra. Lösningen afkyldes med snö eller med köldblandning och försattes under stark omröring försigtigt med saltsyra. Därvid bortgår först kolsyra, och därpå afskiljer sig (ofta först efter en stund, om lösningen ej var tillräckligt koncentrerad) en hvit, amorf massa, som utgöres af fenyltriazoldikarbonsyrans sura kaliumsalt, hvilket i vatten är tämligen svårlösligt. Tillsättes nu mera saltsyra, så öfvergår den amorfa massan i små fina nålar, hvilka antagligen utgöra fri fenyltriazoldikarbonsyra. Både den fria syran och det sura kaliumsaltet förlora emellertid mycket lätt kolsyra -- man behöfver blott uppvärma lösningen på vattenbad — och öfvergå i den nedan beskrifna fenyltriazolkarbonsyran.[1])

Att den vid neutraliseringen med saltsyra erhållna *amorfa* fällningen utgöres af fenyltriazoldikarbonsyrans sura kaliumsalt, framgår af analyserna:

1. 0,2032 gr. vid 100° C. torkad substans gaf efter afrykning med svafvelsyra 0,0634 gr. K_2SO_4 (motsv. 0,02846 gr. K).

2. 0,1996 gr. vid 105° C. torkad substans (annan beredning än det i anal. 1 använda) gaf på samma sätt 0,0627 gr. K_2SO_4 (motsv. 0,02813 gr. K).

	Beräknadt på $C_6H_5 . C_2N_3 .(CO_2)_2KH$:	Funnet: 1.	2.
K	14,4	14,0	14,1[2]).

Att verkligen vid oxidationen fenyltriazoldikarbonsyra bildats, har jag dessutom bevisat genom analys af åtskilliga salter och eterarter af den samma, men som undersökningen om denna syra ännu ej är fullständigt afslutad, kommer jag i denna afhandling att beskrifva blott den fenyltriazolmonokarbonsyra, som

---

[1]) Liksom fenylmetyltriazolkarbonsyran förhåller sig fenyletyltriazolkarbonsyran, dock sker oxidationen här betydligt lättare. Jag har öfvertygat mig om, att den bildade oxidationsprodukten i begge fallen är den samma. *En etylgrupp, som substituerar vätet i en triazolkärna, oxideras således af kaliumpermanganat i alkalisk lösning lättare än en metylgrupp.*

[2]) Den något för lågt funna kaliumhalten torde bero därpå, att saltet innehöll något litet fri syra.

jag erhållit af dikarbonsyran genom att koka en vattenlösning af den samma, under förhoppning att snart blifva i tillfälle att beskrifva dikarbonsyran och hennes derivat.

α-Fenyltriazolkarbonsyra.

$C_6H_5 . C_2N_3H . COOH.$

Denna syra erhålles lättast, om man, sedan lösningen, som innehåller oxidationsprodukten, neutraliserats med saltsyra och det sura kaliumsaltet af fenyltriazolkarbonsyran afskilt sig, uppvärmer lösningen jämte fällningen. Därvid löses åter kaliumsaltet, och kolsyra börjar bortgå i mängd. Något mera saltsyra tillsättes därpå, och kokningen fortsättes, så länge gas bortgår. Redan under kokningen börjar fenyltriazolkarbonsyran utkristallisera i glänsande blad, så framt ej lösningen varit allt för utspädd. Vid lösningens afsvalning erhålles sedan en riklig kristallisation af syran, som sedan renas genom omkristallisering ur vatten, tills smältpunkten blir 184° C. Lufttorkad substans aftar ej i vigt vid 100° C., hvadan syran ej håller något kristallvatten.

Analyser:

1. 0,1224 gr. förbrändes i öppet rör i syrgas och gaf 0,2570 gr. CO_2 (motsv. 0,07009 gr. C) och 0,0430 gr. H_2O (motsv. 0,00478 gr. H).

2. 0,2475 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,5195 gr. CO_2 (motsv. 0,14168 gr. C) och 0,0889 gr. H_2O (motsv. 0,00988 gr. H).

3. 0,2425 gr. gaf på samma sätt 0,5074 gr. CO_2 (motsv. 0,13838 gr. C) och 0,0941 gr. H_2O (motsv. 0,01046 gr. H). (Alla tre C- och H-bestämningarna äro gjorda på material af olika beredning).

4. 0,1685 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 32,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 757 mm. bar. tr. och 18,4° C.

5. 0,1732 gr. gaf på samma sätt 32,8 ccm. N-gas vid 767,5 mm. bar. tr. och 17,8° C.

6. 0,1711 gr. gaf på samma sätt 32,2 ccm. N-gas vid 764 mm. bar. tr. och 16,8° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.	3.	4.	5.	6.
C_9	108	57,2	57,3	57,3	57,1	—	—	—
H_7	7	3,7	3,9	4,0	4,3	—	—	—
N_3	42	22,2	—	—	—	22,5	22,6	22,4
O_2	32	16,9	—	—	—	—	—	—
	189	100,0						

Fenyltriazolkarbonsyran är ganska svårlöslig i vatten, lättlöslig i alkohol och isättika, mycket svårlöslig i benzol. Ur vatten kristalliserar densamma i vackra, glänsande blad. Den smälter under stark gasutveckling vid 184° C. och öfvergår därvid till en olja, som sannolikt utgöres af fenyltriazol, men af brist på material har jag ännu ej kunnat närmare undersöka denna förening.

Hvilken konstitution eger nu denna syra? Teoretiskt kan det finnas tvänne fenyltriazolkarbonsyror, nämligen

```
         C6H5—N—N                    C6H5—N—N
              |  ||                        |  ||
1) HOOC—C  CH    och   2)        HC  C—COOH.
              \/                            \/
              N                             N
```

Af syrans bildning af dikarbonsyran,

```
        C6H5—N—N
             |  ||
  HOOC—C  C—COOH,
             \/
             N
```

kan man ej sluta till, hvilken af dessa begge formler tillkommer henne, ty a priori kan man ej säga, hvilken af karboxylgrupperna lättast förstöres. Lyckades man åter genom oxidation af fenylmetyl- eller fenyletyltriazol,

```
C6H5—N—N                  C6H5—N—N
     |  ||                     |  ||
    HC  C—CH3    resp.        HC  C—C2H5,
     \/                        \/
     N                         N
```

erhålla en fenyltriazolkarbonsyra, likgiltigt om den erhållna syran vore identisk med den af dikarbonsyran erhållna eller icke, så vore, såsom lätt inses, syrans konstitution i och med det samma gifven. Jag har ock försökt att oxidera desse begge triazoler under samma omständigheter som fenylmetyltriazolkarbonsyran och därvid funnit, att de, oaktadt de äro i kalilut olösliga oljor, likväl lätt, ja redan i köld, oxideras, men jag har ej ur reaktionsprodukterna kunnat utdraga någon ren förening. Vid neutraliseringen med saltsyra afskiljas oljedroppar, som afgifva gas (CO_2?). Möjligen beror detta därpå, att den bildade fenyltriazolkarbonsyran,

$$\begin{array}{l} C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \qquad\;\; | \quad\;\; \| \\ \quad\;\; HC \quad C\text{—}COOH, \\ \qquad\;\; \diagdown\diagup \\ \qquad\quad N \end{array}$$

är mycket obeständig och lätt afger CO_2. Detta skulle därför tala för, att den af mig här beskrifna vore den andra därmed isomera och således hafva formeln,

$$\begin{array}{l} \qquad C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \qquad\qquad\quad | \quad\;\; \| \\ HOOC\text{—}C \quad CH. \\ \qquad\qquad\; \diagdown\diagup \\ \qquad\qquad\quad N \end{array}$$

Af syrans likhet med fenylmetyltriazolkarbonsyran,

$$\begin{array}{l} \qquad C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \qquad\qquad\quad | \quad\;\; \| \\ HOOC\text{—}C \quad C\text{—}CH_3, \\ \qquad\qquad\; \diagdown\diagup \\ \qquad\qquad\quad N \end{array}$$

är jag ock mest böjd för att anse denna formel sannolikast. Till dess emellertid syrans konstitution blifvit fullt bevisad, vill jag beteckna den med prefixet α och således kalla den samma α-fenyltriazolkarbonsyra. Jag skall emellertid åter upptaga försöket att oxidera fenylmetyltriazol och då använda större material och företaga oxidationen under vexlande förhållanden för att möjligen erhålla bättre resultat.

Salter af α-fenyltriazolkarbonsyran.

Alkalisalterna äro mycket lättlösliga.

Silfversaltet, $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2Ag + 1\frac{1}{2}H_2O$, erhålles i form af en hvit, amorf, volyminös fällning vid tillsats af silfvernitrat till en fullt neutral lösning af ammoniumsaltet. Den amorfa fällningen öfvergår dock lätt till kristallinisk, och saltet bildar då fina nålar. Saltet är mycket svårlösligt. Lufttorkadt håller det samma $1^1/_2$ mol. kristallvatten.

Analyser på lufttorkadt salt:

1. 0,2419 gr. förlorade vid 120° C. 0,0197 gr. och gaf vid förbränning 0,0810 gr. Ag.

2. 0,2500 gr. förlorade vid 120° C. 0,0206 gr.

	Beräknadt på $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2Ag + 1\frac{1}{2}H_2O$:	Funnet: 1.	2,
Ag	33,4	33,5	—
$1\frac{1}{2}H_2O$	8,4	8,1	8,2.

Kopparsaltet, $(C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2)_2Cu$, erhölls vid tillsats af kopparsulfat till en kokande lösning af ammoniumsaltet eller den fria syran. Det bildar en volyminös, ljusblå fällning, som vid mycket stark förstoring under mikroskop befans vara kristallinisk. Det är nästan olösligt i vatten och håller intet kristallvatten.

Analys:

0,1854 gr. i exsickator öfver svafvelsyra torkadt salt aftog ej i vigt vid 120° C. och gaf vid förbränning 0,0335 gr. CuO (motsv. 0,02676 gr. Cu).

	Beräknadt på $(C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2)_2Cu$:	Funnet:
Cu	14,4	14,4.

α-Fenyltriazolkarbonsyrans klorhydrat.

$$C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2H . HCl.$$

Syran löstes i kokande vanlig saltsyra, hvari den ganska lätt löste sig. Vid lösningens afsvalning utkristalliserade saltet

i små färglösa blad. Det sönderdelas af vatten i sina komponenter. För analys torkades saltet i exsickator öfver fast kali.

Analyser:

1. 0,0822 gr. gaf efter förbränning med kalk 0,0514 gr AgCl (motsv. 0,01307 gr. HCl).

2. 0,2379 gr. gaf på samma sätt 0,1460 gr. AgCl (motsv. 0,03714 gr. HCl).

	Beräknadt på $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2H . HCl$:	Funnet: 1.	2.
HCl	16,2	15,9	15,6.

Såsom jag förut visat[1]), ger äfven fenylmetyltriazolkarbonsyran ett kristalliserande klorhydrat, $C_6H_5 . C_2N_3(CH_3) . CO_2H . HCl$. Jag har äfven funnit, att fenyletyltriazolkarbonsyran ger ett dylikt salt, $C_6H_5 . C_2N_3(C_2H_5) . CO_2H . HCl$. Däremot har jag funnit, att den af mig förut beskrifna difenyltriazolkarbonsyran[2]), $(C_6H_5)_2 . C_2N_3 . CO_2H$, *icke* ger någon dylik saltartad förening. Kokas nämligen denna med saltsyra, löses den visserligen, men ur lösningen afskiljer sig vid afsvalning blott oförändrad syra. Häraf framgår, att α-fenyltriazolkarbonsyrans basiska karaktär ej minskas vid införandet af alifatiska kolväteradikaler i triazolkärnan, men att införandet af ytterligare en fenylgrupp fullständigt upphäfver den samma.

Äfven med salpetersyra ger α-fenyltriazolkarbonsyran ett salt. Kokas nämligen syran med stark salpetersyra, löses den samma, och vid afsvalning utkristalliserar saltet i form af färglösa, glänsande prismer.

α-Fenyltriazolkarbonsyrans eterarter.

Metyletern, $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2CH_3$, erhölls af silfversaltet (torkadt vid 100° C) och metyljodid. Vid vanlig temperatur eger ingen inverkan rum, utan reaktion inträder först vid kokning. Sedan blandningen en stund kokat, utdrogs den bildade eter-

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 8, sid. 256.

[2]) » » » » 1889, N:o 3, sid. 146.

arten genom utskakningar med eter och renades genom omkristallisering ur alkohol.

Analys:

0,1409 gr. förbrändes med blykromat och gaf 0,3070 gr. CO_2 (mots. 0,08373 gr. C) och 0,0631 gr. H_2O (motsv. 0,00701 gr. H).

	Beräknadt:		Funnet:
C_{10}	120	59,1	59,4
H_9	9	4,4	5,0
N_3	42	20,7	—
O_2	32	15,8	—
	203	100,0	

Föreningen är lättlöslig i alkohol och eter. Ur alkohol kristalliserar den samma i små prismer af smältpunkt 116,5—117° C.

Etyletern, $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2C_2H_5$, erhölls på samma sätt ur silfversaltet och etyljodid. Äfven här inträdde reaktion först vid kokning. Eterarten utdrogs med eter, efter hvilkens afdunstning det återstod en något gulaktig olja, som lätt stelnade kristalliniskt. Den löstes i litet benzol, och lösningen försattes droppvis med gasolja, hvarvid föreningen afskilde sig kristalliniskt.

Analys:

0,1761 gr. förbrändes med kopparoxid och gaf 29,5 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 757 mm. bar. tr. och 15,8° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{11}	132	60,8	—
H_{11}	11	5,1	—
N_3	42	19,4	19,8
O_2	32	14,7	—
	217	100,0	

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, eter och benzol, nästan olöslig i gasolja. Ur benzollösning, försigtigt fäld med gasolja, kristalliserar den samma i färglösa prismer, som oftast äro förenade med hvarandra efter längden. Smältpunkt 72° C.

α-Fenyltriazolkarbonsyrans amid.

$C_6H_5 . C_2N_3H . CONH_2 + \frac{1}{2}H_2O.$

Denna bildas mycket lätt genom inverkan af alkoholisk ammoniak på etyletern. Man löser denna i alkohol och försätter lösningen med stark ammoniak och låter blandningen stå vid vanlig temperatur i tillslutet kärl. Redan efter några timmar börjar amiden utkristallisera i hårfina, asbestliknande nålar. Föreningen renades genom omkristallisering ur vatten. Kristalliserad ur detta lösningsmedel, håller föreningen $^1/_2$ mol. kristallvatten, som bortgår vid 100—110° C.

Analyser på vid 120° C. torkad substans:

1. 0,2731 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,5801 gr. CO_2 (motsv. 0,15818 gr. C) och 0,1205 gr. H_2O (motsv. 0,01339 gr. H).

2. 0,1406 gr. förbrändes med kopparoxid och gaf 35,6 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 765 mm. bar. tr. och 18,4° C.

3. 0,1553 gr. gaf på samma sätt 39,6 ccm. N-gas vid 757 mm. bar. tr. och 18,2° C.

	Beräknadt:		Funnet:		
			1.	2.	3.
C_9	108	57,4	57,9	—	—
H_8	8	4,3	4,9	—	—
N_4	56	29,8	—	30,0	29,9
O	16	8,5	—	—	—
	188	100,0			

Vattenbestämningar:

1. 0,2867 gr. i exsickator torkad substans förlorade vid 120° C. 0,0131 gr.

2. 0,3114 gr. lufttorkad substans förlorade vid 110° C. 0,0153 gr.

	Beräknadt på $C_6H_5 . C_2N_3H . CONH_2 + \frac{1}{2}H_2O$:	Funnet: 1.	2.
$\frac{1}{2}H_2O$	4,6	4,6	4,9.

Föreningen är lättlöslig i alkohol, i synnerhet i värme, och kristalliserar därur i långa, fina, böjliga, asbestliknande nålar; äfven lättlöslig i varmt vatten, svårlöslig i kallt, och kristalliserar jemväl ur detta lösningsmedel i asbestliknande nålar. Den smälter utan sönderdelning vid 194° C. Vid rifning i agatmortel blir föreningen elektrisk.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

181. Om några ammoniakaliska platinaföreningar.

Af Oskar Carlgren.

[Meddeladt den 11 Juni 1890 af P. T. Cleve.]

Inverkan af svafvelsyrlighet på $J_2Pt_28H_3N.O.2NO_3$.

Cleve har visat[1], att vid inverkan af svafvelsyrlighet på anhydronitratet af jododiplatindiamin

$$\begin{array}{l} J \\ | \\ Pt \begin{cases} 2H_3NNO_3 \\ H_3NNH_2 \end{cases} \\ | \\ Pt \begin{cases} H_3NNH_2 \\ 2H_3NNO_3 \end{cases} \\ | \\ J \end{array} + H_2O$$

bildas ett väl kristalliserande salt, om hvars sammansättning Cleve dock ej yttrar sig. Då för kännedomen om diplatindiaminföreningarnas konstitution hvarje bidrag till kunskapen om deras reaktionsförhållanden är af intresse, har jag på professor Cleves uppmaning och under hans ledning undersökt de därvid bildade produkterna. Jag förfor därvid på följande sätt.

Till svafvelsyrlighetsvatten uppvärmdt till nästan kokning sattes i små portioner ofvannämnda nitrat, då under tydlig gasutveckling alt efter en stund löste sig till en färglös eller svagt gul vätska. Vid afsvalning afsatte sig »ormbunkslika» kristallaggregat. Moderluten från dessa afhäldes och kristallerna omkristalliserades ur kokande vatten. Flere fraktioner upptogos. De första

[1]) K. Svenska Vet.-Akad. Handl. Bd. 7, N:o 7, p. 21.

hastigt utkristalliserade erhöllos nästan alltid rena i form af stjärnformigt grupperade gyttringar af svagt gula eller färglösa, otydligt utvecklade kristaller, som voro mycket svårlösliga till och med i kokande vatten. Torkade i exsickator afgåfvo de ej något vatten vid upphettning till 100°.

Analys:

1) 0,2541 gr. gaf efter glödgning med soda 0,1217 gr. Pt och 0,0963 gr. AgJ.

2) 0,1840 gr. gaf efter glödgning med soda 0,0882 gr. Pt och 0,0704 gr. AgJ.

3) 0,4286 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1687 gr. $BaSO_4$.

4) 0,1824 gr. gaf 21,0 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 16° och 768 mm. bar.

I procent:

	1.	2.	3.	4.
Pt	47,89	47,93	—	—
J	20,45	20,65	—	—
S	—	—	5,41	—
N	—	—	—	13,80.

Ur de öfriga fraktionerna, som långsammare fingo utkristallisera, erhölls en blandning af ganska väl utvecklade, mångytiga kristaller och platta nålar, ofta förenade till busklika aggregat. De åtskildes genom slamning. Analyserna å de förra visade, att de voro identiska med föregående salt. Analyserna gåfvo nämligen i procent

Pt	47,43	47,28
J	20,13	
N	13,82	
S	5,41.	

Saltets förhållande till klorbarium visade, att ett sulfat, ej ett sulfit, som man kunde vänta, förelåg. 0,1697 gr. löstes i vatten, klorbarium tillsattes, då genast en fällning af bariumsulfat erhölls, som sedan det blifvit uppvärmdt med klorvätesyra

vägde 0,0600 gr. fun. S 4,86. Genom salpetersyrans inverkan på svafvelsyrligheten hade således ett sulfat uppstått, hvars formel kan beräknas till

$$\begin{matrix} J & & \\ | & \diagup H_3NNH_2 & \\ Pt & & \\ | & \diagdown 2H_3N \diagdown & \\ | & & > SO_4 , \ Pt4H_3N . SO_4 \\ | & \diagup 2H_3N \diagup & \\ Pt & & \\ | & \diagdown H_3NNH_2 & \\ J & & \end{matrix}$$

I procent:

		Beräknadt:	Funnet medeltal:
Pt_3	583,5	47,41	47,63
N_{12}	168	13,65	13,81
J_2	253,2	20,57	20,41
S_2	64	5,20	5,41
$H_{34} + O_8$	162	13,17	—
	1230,7	100,00.	

Föreningen skulle enligt denna formel vara ett *dubbelsulfat* mellan *jododiplatindiamin* och *platodiamin*. Därför talar saltets förhållande till vätesuperoxid och klorvätesyra. Vätesuperoxiden ger nämligen jämte andra produkter jodohydroxyloplatindiaminsulfat (se nedan). Med klorvätesyra bildas jodotriklorid af Gros'ska basen och platodiaminklorid, såsom följande försök utvisar.

Varm utspädd klorvätesyra försatt med lika volymer vatten fick inverka på saltet, då det med lätthet löstes. Lemnas den merändels svagt färgade lösningen att långsamt och frivilligt afdunsta, erhåller man dels färglösa nålar, som med kaliumplatinaklorur gifva den Magnus'ska kloruren och vid analys visa sig vara platodiaminklorid (0,2837 gr. gaf 0,1634 gr. Pt fun. Pt 57,60 ber. 58,35 %; 0,1113 gr. gaf 15,5 cm.^{3} kväfgas, mätt öfver kali vid 16° och 778 mm. bar. fun. N 16,92 ber. 16,80 %), dels bruna kristaller utgörande $JClPt4H_3N . Cl_2$ (0,2429 gaf efter glödgning med soda 0,0953 gr. Pt och 0,3261 gr. AgCl + AgJ, hvaraf om man antager, att på en atom J kommer 3 atomer Cl beräknas 0,2110 gr. AgCl och 0,1152 gr. AgJ ber. Pt 39,21 fun. Pt 39,23 %; ber. J 25,56 fun. J 25,59; ber. Cl 21,44 fun. Cl 21,45 %).

Koncentreras däremot lösningen genast på asbestbad, synes en vidare sönderdelning ega rum, ty man erhåller utom platodiaminklorid dels ett svart, olösligt, dels ett smutsgrönt, svårlösligt pulver, som bägge innehålla jod. Af förhållandet mellan platina och kväfvet (funnet 1—2) synes det senare vara en platosamminförening. Bägge erhöllos ej i analysrent skick.

Vid fortsatt inverkan af svafvelsyrlighet synes sulfatet än vidare reduceras. Man erhåller nämligen vid upprepade omkristalliseringar, om man för hvarje gång tillsätter litet svafvelsyrlighet, alt mindre af saltet, som efterhand öfvergår i nedanstående sulfit. Därjämte synes äfven några andra föreningar bildas. En gång erhöllos gula romboedriska kristaller, som sönderföllo i nålar vid omkristallisation. Ofta uppträder en gul till smutsbrun produkt, som under mikroskopet visar sig sammansatt af flere, olikartade substanser.

Den andra produkten, som erhölls i större mängd vid svafvelsyrlighetens inverkan på nitratet, visade sig vid analys vara ett *dubbelsulfit* mellan *platodiamin* och *platina*. Föreningens formel är:

$$3(Pt4H_3N \,.\, SO_3),\ PtSO_3 + 4H_2O.$$

Platta, stundom flere centimeter långa, färglösa eller svagt gula, ofta starkt ljusbrytande nålar, som äro mycket svårlösliga i kokande vatten. Innehåller 4 mol. kristallvatten, som ej bortgår förr än vid 150° (1,3139 gr. lufttorkad substans aftog obetydligt i exsickator, vid upphettning till 100—110° under flere dagar syntes omkring hälften af vattenhalten bortgå, som vid 150° motsvarade en vigtförlust af 0,0686 gr. fun. 5,22 ber. 5,24.)

Salt torkadt vid 150° underkastades följande analyser:

1) 0,1996 gr. gaf efter glödgning 0,1185 gr. Pt.

2) 0,206 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1225 gr. Pt och 0,1493 gr. $BaSO_4$.

3) 0,1667 gr. gaf 18,5 cm.^{3} kväfgas mätt öfver kali vid 16,6° och 753 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.	3.
Pt_4	778	59,75	59,37	59,47	—
N_{12}	168	12,90	—	—	13,02
$(SO_2)_4$	256	19,66	—	19,91	—
$O_4 + H_{36}$	100	7,69	—	—	—
	1302	100,00.			

För att utröna om föreningen egde ofvanstående konstitution löstes den i vatten, silfvernitrat tillsattes, så länge fällning erhölls, då en hvit, i vatten olöslig fällning uppstod, som visade sig vara identisk med det af LANG framstälda dubbelsulfitet $Ag_2Pt(SO_3Ag)_4$ (0,3670 gr. gaf vid glödgning 0,2633 gr. Ag + Pt motsv. 71,74 % ber. 72,47). I moderluten erhölls efter tillsats af klorvätesyra platodiaminklorid. Saltet är antagligen identiskt med det som PEYRONE[1]) erhållit af platodiaminklorid och ammoniumsulfit, möjligen äfven med det CLEVE[2]) erhållit af surt natriumsulfit och platodiaminklorid, ehuru saltet enligt uppgift innehåller blott 2 mol. kristallvatten, hvilket dock synes bero därpå, att saltet före analysen torkats vid 100° och därefter analyserats utan direkt vattenbestämning.

Svafvelsyrligheten verkar således starkt reducerande på diplatindiaminföreningar och öfverför dem till salter af platodiamin. Stundom kan reduktionen gå så långt, att själfva ammoniakgrupperna aflägsnas såsom i ofvanstående dubbelsulfit. Ett liknande förhållande har CLEVE[3]) påvisat ega rum vid dess inverkan på kloronitratet af den Gros'ska basen, då äfven ett salt af platodiamin bildas.

---

[1]) Ann. der Ch. und Pharm. Bd. 61, p. 180.
[2]) Om ammoniakaliska platinaföreningar, Upsala, Vet. Soc. Acta 1866, p. 34
[3]) » » » » p. 81.

Om en beräknad mängd silfvernitrat sättes till en kokande lösning af föregående jodhaltiga sulfat, utfaller genast jodsilfver. Ur moderluten afsätter sig stjärnformigt grupperade gyttringar, som vid långsam kristallisation erhålles i väl utvecklade kristaller, hvilka ej innehålla jod. Vid glödgning förmärktes en svag förpuffning. Ytterst lättlösliga isynnerhet i kokande vatten. I exsickator torkadt salt afgaf ej något vatten vid upphettning till 100°

Analys:

1) 0,2377 gr. gaf efter glödgning 0,1256 gr. Pt.

2) 0,3996 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,2112 gr. Pt och 0,1738 gr. $BaSO_4$.

3) 0,2977 gr. gaf på samma sätt 0,1307 gr. $BaSO_4$.

4) 0,1560 gr. gaf 24,0 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 18° och 755 mm. bar.

5) 0,304 gr. gaf 45,5 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 17° och 762,3 mm. bar.

I procent:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pt	52,84	52,85	—	—	—
N	—	—	—	18,01	17,75
SO_3	—	14,93	15,07	—	—

Ur saltets lösning fäller klorbarium olösligt bariumsulfat. Hela svafvelsyrehalten är fällbar (0,1553 gr. gaf fäldt direkt med klorbarium 0,0675 gr. $BaSO_4$ fun. SO_3 14,92 %). Till filtratet från bariumsulfatet sattes kaliumplatinaklorur, då genast en fällning af den Magnus'ska kloruren uppkom. Denna upptogs på ett förut vägdt filtrum och vägdes. Det befans då, att den funna kloruren obetydligt understeg den på hela platinahalten beräknade. Saltet är således ett dubbelsalt tillhörande endast den I:a Reiset'ska serien och dess formel:

$$\left(Pt\langle {2H_3N . NO_3 \atop 2H_3N} \right)_2 SO_4, \; Pt4H_3N . SO_4 .$$

Således ett dubbelsalt mellan *platodiaminnitratosulfat* och *platodiaminsulfat*, som fordrar:

Pt_3	583,5	52,88
N_{14}	196	17,76
$(SO_3)_2$	160	14,50
$O_8 + H_{36}$	164	14,86
	1103,5.	100,00.

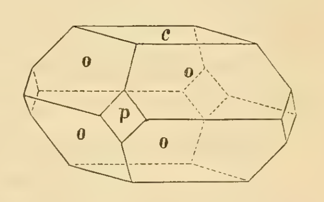
Herr K. JOHANSSON har på Stockholms Högskolas mineralogiska institut godhetsfullt undersökt kristallformen; han meddelar därom:

»Kristallsystem: tetragonalt

$$a : c = 1 : 1{,}0257.$$

Iakttagna former: o {111}, c {001}, p {100}.

Kristallerna voro tjockt tafvelformiga och i allmänhet mycket väl utbildade. Basis och pyramidytorna gåfvo utomordentligt skarpa spaltbilder, hvaremot prismaytorna voro ojämna och böjda, i följd hvaraf de endast genom zonförhållanden kunde bestämmas. Parallelt med basis finnes mycket goda genomgångar.



	Mätt	Medeltal	Beräknadt
001 : 111	55° 23′ 30″ — 55° 27′ 0″	55° 25′ 5″*	—
111 : 1$\bar{1}$1	71° 11′ 15″ — 71° 13′ 30″	71° 12′ 25″	71° 12′ 23″

Spaltstycken efter basis gifva i konvergent ljus en enaxlig axelbild, som vid kringvridning ej öppnar sig. Dubbelbrytningen är negativ.»

Vid inverkan af svafvelsyra på saltet bildas starkt ljusbrytande kristallfjäll; vid inverkan af salpetersyra uppstår först nitritoplatindiaminnitrat, som vid omkristallisering öfvergår i hydroxylonitratoplatindiaminnitrat (bekräftadt genom analys).

Inverkan af vätesuperoxid på $J_2Pt_26H_3N \cdot 2NH_2 \cdot SO_4$, $Pt4H_3N \cdot SO_4$.

Ofvan beskrifna jodhaltiga sulfat (sid. 306) behandlades med en 3 % vätesuperoxidlösning, då denna genast antog gulaktig färg. För att underlätta reaktionen uppvärmdes lösningen på vattenbad, tills en liflig syrgasutveckling började. Efter en tid afsatte sig bruna, väl utvecklade kristaller och långa nålar, hvilka åtskildes genom slamning. De förra utgjordes af

Jodohydroxyloplatindiaminsulfat.

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{J}{OH}\!\!>\!Pt4H_3N \cdot SO_4 + H_2O.$$

Rödbruna, väl utvecklade, nästan mikroskopiska kristaller ofta uppträdande som af kubytor afstympade oktaedrar, hvilka äro synnerligen svårlösliga till och med i kokande vatten. Innehåller en mol. kristallvatten, som dock ej bortgår vid 100°.

Analys å vid 100° torkad substans:

1) 0,1724 gr. gaf efter glödgning med soda 0,0646 gr. Pt och 0,0782 gr. AgJ.

2) 0,2625 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,0988 gr. Pt och 0,1181 gr. $BaSO_4$.

3) 0,1788 gr. gaf 16,4 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 16,2° och 772,7 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt		Funnet 1.	2.	3.
Pt	194,5	37,40	37,47	37,64	—
N_4	56	10,77	—	—	11,05
SO_3	80	15,38	—	15,45	—
J	126,6	24,34	24,48	—	—
$O_3 + H_{15}$	63	12,11	—	—	—
	520,1.	100,00.			

Då på en atom Pt kommer endast en SO_3-grupp och saltets lösning fälles af klorbarium, måste sulfatgruppen vara bunden vid ammoniaken och föreningens sammansättning ofvanstående.

Föreningen är analog med förut kända bromo- och klorohydroxyloplatindiaminföreningar.

Nålarne utgjordes af

Hydroxyloplatindiaminsulfat.

$$(OH)_2Pt4H_3N . SO_4 + 4H_2O.$$

Kristalliserar i väl utvecklade ända till ett par centimeter långa, färglösa prismor med snedt afskurna ändytor, som på kort tid vittra i luften och därvid förlora 4 mol. kristallvatten.

1) 0,4735 gr. mellan papper pressadt salt förlorade i exsickator 0,075 gr. vatten, förlorade därefter intet i vigt vid upphettning till 100° fun. 15,84, ber. $4H_2O$ 15,50 %.

2) 0,2142 gr. erhållet genom inverkan af vätesuperoxid på platodiaminsulfat aftog likaledes 0,034 gr. fun. 15,87 %.

I exsickator torkadt salt underkastades följande analyser:

1) 0,2060 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1023 gr. Pt och 0,1225 gr. $BaSO_4$.

2) 0,2059 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1021 gr. Pt och 0,1233 gr. $BaSO_4$.

3) 0,1935 gr. gaf 23,3 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 14,8° och 771,2 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt		Funnet		
			1.	2.	3.
Pt	194,5	49,55	49,66	49,59	—
N_4	56	14,27	—	—	14,56
SO_3	80	20,38	20,42	20,56	—
$O_3 + H_{14}$	62	15,80	—	—	—
	392,5.	100,00.			

All svafvelsyran fälles fullständigt af klorbarium. Sulfatgruppen är således bunden vid ammoniaken. Vid tillsats af klor-

barium till en kokande lösning af sulfatet surgjord med klorvätesyra utfaller genast en gul platinaförening och bariumsulfat. Efter flera kokningar med vatten var det senare rent. (0,2477 gr. gaf 0,1449 gr. $BaSO_4$ fun. SO_3 20,09 %).

Den gula produkten analyserades och befans vara Gros'ska basens klorid (0,2009 gr. gaf efter glödgning med soda 0,0969 gr. Pt och 0,2832 gr. AgCl fun. Pt 48,23 ber. Pt 48,13, fun. Cl 34,80 ber. Cl 35,04 %). Kloriden gaf med kaliumplatinaklorur det karakteristiska brunröda dubbelsaltet.

Saltet bör således hafva ofvanstående sammansättning. CLEVE[1]) har emellertid genom inverkan af baryt på hydroxylosulfatoplatindiaminsulfat erhållit ett salt, som förhöll sig på samma sätt till klorbarium och klorvätesyra, och för hvilket BLOMSTRAND[2]) sedermera uppstält ofvanstående formel (utan kristallvatten). För att se om de voro identiska, sönderdelade jag hydroxylosulfatoplatindiaminsulfat med baryt, afdunstade filtratet i en bägare, tills saltet började utkristallisera. Därvid erhölls en produkt, som visade sig bestå af små bollar af mikroskopiska, prismatiska kristaller, som häftade mycket starkt vid glaset och voro mycket svårlösliga i kokande vatten; således öfverensstämmande med CLEVES uppgifter. Då emellertid dessa omkristalliserades, erhölls en produkt, som fullkomligt öfverensstämde med ofvanstående sulfat. Då jag vid inverkan af vätesuperoxid på platodiaminsulfat (se nedan) äfven erhållit ett vattenfritt sulfat som dock till utseende och löslighet syntes skilja sig från det af CLEVE framstälda, torde det vara möjligt, att det senare verkligen var hydratet till hydroxylosulfatoplatindiamin, som vid omkristallisering öfvergår i ofvanstående sulfat och i följd däraf ger samma reaktioner som detta.

Ofvannämda förening bildas äfven vid inverkan af vätesuperoxid på I:ta Reisetska basens sulfat.

---

[1]) Om några derivator af den Gros'ska platinabasen. Kongl. Sv. Vetensk.-Akad. Handl., Bd 7. N:o 6, p. 12.

[2]) Die Chemie der Jetztzeit, p. 408. 1869.

Utom dessa bägge salter synas äfven några andra bildas vid vätesuperoxidens inverkan. Af dessa har det lyckats mig erhålla ett i analysrent skick. Det kristalliserade i stora, färglösa, platta, väl utvecklade tafvelformiga kristaller med ändarne snedt afskurna och är ganska svårlösligt i kokande vatten.

Analys å salt, torkadt vid 100°.

1) 0,2033 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1012 gr. Pt och 0,1244 gr. $BaSO_4$.

2) 0,1406 gr. gaf 17,7 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 18,6° och 758 mm. bar.

I procent:

Pt	49,78
SO_3	21,01
N	14,77.

Analyserna å saltet visa, att det har samma sammansättning som föregående salt, från hvilka det dock skiljes genom sin vattenhalt.

0,3743 gr. mellan papper pressadt salt förlorade ej i vigt i exsickator; vid upphettning till 100° bortgick 0,0177 gr. motsvarande *en mol.* kristallvatten, fun. H_2O 4,73, ber. 4,38.

Af brist på material har jag ej kunnat undersöka sulfatets förhållande till klorbarium. Då det ej erhållits genom inverkan af vätesuperoxid på platodiaminsulfat, föreligger här möjligen en verklig isomeri.

Om den ofvanstående formeln för dubbelsaltet mellan diplatindiamin och platodiamin är riktig, skulle således vid vätesuperoxidens inverkan bindningen mellan platinaatomerna upphäfts, och den fria frändskapsenheten bundits af hydroxyl, hvarigenom jodohydroxyloplatindiaminsulfat uppkommit, som vid fortsatt inverkan öfvergått i hydroxylosulfatet. Då en gång vätesuperoxiden häftigt kokades erhölls nämligen högst obetydligt af det förra; platodiaminsulfat har öfvergått till hydroxyloplatindiaminsulfat.

Inverkan af vätesuperoxid på platodiaminföreningar.

Vätesuperoxidens inverkan på det jodhaltiga sulfatet gaf mig anledning att pröfva dess förhållande till andra platodiaminföreningar. Det visade sig då, att vätesuperoxiden förhåller sig på samma sätt som halogenerna, d. v. s. ger direkta additionsprodukter af formeln

$$\begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix} > Pt < \begin{matrix} 2H_3N\overset{I}{R} \\ 2H_3N\overset{I}{R} \end{matrix}$$

hvarvid platinan öfvergår från 2- till 4-atomig. *I:a Reiset'ska basens salter öfverföras således af vätesuperoxid i hydroxylsalter af Gros'ska basen.* Reaktionen försiggår lätt. Vanligen hafva de lättlösliga platodiaminsalterna uppvärmts, stundom kokats, med en 3 % vätesuperoxidlösning, då inom kort de bildade hydroxylföreningarne utfallit, hvarefter de omkristalliserats ur kokande vatten och analyserats.

Hydroxyloplatindiaminklorid

$$(OH)_2Pt4H_3N \, . \, Cl_2$$

erhålles genom inverkan af vätesuperoxid på platodiaminklorid eller genom sönderdelning af hydroxyloplatindiaminsulfat med beräknade mängder klorbarium. Korta, färglösa kristaller, som vanligen hafva utseende af sexsidiga taflor, hvilka ej innehålla något kristallvatten. Saltet löser sig i omkring 49 delar kokande vatten och i 206 delar vatten af vanlig temperatur.

Analys å vid 100° torkad substans:

1) 0,2331 gr. gaf vid glödgning med soda 0,1227 gr. Pt och 0,1818 gr. AgCl.

2) 0,266 gr. gaf 0,1406 gr. Pt.

3) 0,1783 gr. gaf 23.7 cm.^{3} kväfgas mätt öfver kali vid 19° och 759,3 mm. bar.

I procent:

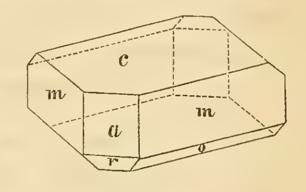
	Beräknadt		Funnet 1.	Funnet 2.	Funnet 3.
Pt	194,5	52,95	52,64	52,86	—
N_4	56	15,25	—	—	15,60
Cl_2	70,8	19,28	19,25	—	—
$O_2 + H_{14}$	46	12,52	—	—	—
	367,3.	100,00.			

Herr K. JOHANSSON har benäget undersökt kristallformen. »Kristallsystem: monosymmetriskt

$$a : b : c = 1,5310 : 1 : 0,6702$$

Iakttagna former: c {001}, m {110}, a {100}, o {$\bar{1}$11}, r {$\bar{2}$01}.

Kristallerna voro färglösa och utbildade i taflor efter basis. Ytorna voro glatta och väl speglande med undantag af domat r, som är bestämdt på grund af mycket approximativa mätningar. Parallelt med prismaytorna finnas genomgångar, som dock äro temligen ofullkomliga.



	Mätt	Medeltal	Beräknadt
110 : 1$\bar{1}$0	112° 19′ — 113° 22′	112° 48′*	—
$\bar{1}$10 : 001	95° 38′ — 96° 4′	95° 50′*	—
$\bar{1}$10 : $\bar{1}$11	55° 1′ — 55° 48′	55° 17′*	—
100 : 001	79° 23′ — 79° 35′	79° 29′	79° 26′
$\bar{1}$11 : $\bar{1}$00	77° 26′ — 77° 52′	77° 35′	77° 51′
$\bar{1}$11 : $\bar{2}$01	51° — 54°	—	54° 9′

I polariseradt ljus är utsläckningsriktningen på 001 parallel med kanten 100 : 001.»

Varm jodvätesyra synes ej inverka på saltet, däremot bildas vid uppvärmning med klorvätesyra klorid af Gros'ska basen. (Fun. Pt 48,22, ber. 48,13).

Hydroxyloplatindiaminsulfat.

$(OH)_2Pt4H_3N \, . \, SO_4$.

Utom ofvan beskrifna vattenhaltiga sulfat erhåller man vid kokning med platodiamminsulfat äfven ett vattenfritt, som dock har annat utseende än det af CLEVE[1]) beskrifna sulfatet. Det bildar nämligen små, korta, välutvecklade prismor, som äro ganska svårlösliga i kokande vatten. All svafvelsyran fälles af klorbarium. Saltet var vattenfritt.

Analys å i exsickator torkadt salt:

1) 0,2256 gr. gaf 0,112 gr. Pt.

2) 0,1713 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,0847 gr. Pt och 0,1033 gr. $BaSO_4$.

3) 0,1703 gr. gaf, fäldt direkt med klorbarium, 0,1024 gr. $BaSO_4$.

I procent:

	Beräknadt		Funnet		
			1.	2.	3.
Pt	194,5	49,55	49,65	49,45	—
N_4	56	14,27	—	—	—
SO_3	80	20,38	—	20,70	20,65
$H_{14} + O_3$	62	15,80	—	—	—
	392,5.	100,00.			

Hydroxyloplatindiaminnitrat

$(OH)_2Pt4H_3N \, . \, 2NO_3$

erhålles af I:ta Reiset'ska basens nitrat och vätesuperoxid eller genom dubbel dekomposition af föregående sulfat och bariumnitrat. Uppträder vanligen som greniga kristallaggregat af platta romboedriska taflor. Förpuffar häftigt vid glödgning under eldfenomen. Löser sig i omkring 38 delar kokande vatten och i 343 delar vatten af vanlig temperatur. Mellan papper pressadt salt aftog ej i exsickator eller vid 100°.

[1]) Om några derivator af den Gros'ska platinabasen. Kongl. Sv. Vetensk.-Akad. Handl., Bd 7, N:o 6, p. 12.

Analys:

1) 0,2556 gr. gaf efter glödgning 0,1171 gr. Pt.

2) 0,3662 gr. gaf efter glödgning 0,1684 gr. Pt.

3) 0,1763 gr. gaf 30,3 cm.^{3} kväfgas mätt öfver kali vid 15° och 756,5 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt		Funnet		
			1.	2.	3.
Pt	194,5	46,25	45,81	45,99	—
N_6	84	19,98	—	—	20,37
$O_8 + H_{14}$	142	33,77	—	—	—
	420,5.	100,00.			

GERHARDT[1]) har beskrifvit ett salt med denna konstitution, som han erhållit genom att koka hydroxylonitratoplatindiamin-nitrat med ammoniak; det på detta sätt erhållna saltet skall bilda ett amorft pulver. Huruvida detta är identiskt med det af mig framstälda har jag på grund af bristande material ej kunnat utröna.

Vid inverkan af svafvelsyrlighet på saltet bildas dels boll-lika aggregat af små nålar, som antagligen utgöras af dubbel-saltet mellan platodiamin och platina dels små kristallfjäll, som ej blifvit närmare undersökta

Hydroxyloplatindiamindikromat.

$(OH)_2Pt4H_3N \cdot Cr_2O_7$.

Till en lösning af platodiaminklorid sattes kaliumdikromat; den därvid bildade fällningen pressades och behandlades med vätesuperoxid. Reaktionen försiggick vid vanlig temperatur under liflig gasutveckling. Vätskan färgades först violett (påminnande om en lösning af kromalun) sedan brungul till svartbrun: slutligen affärgades den och ett gult kristalliniskt pulver utföll, hvilket utkokades med vatten för att befrias från en del oförändradt platodiamindikromat. Citrongult, i såväl kallt som kokande

[1]) Ann. der Ch. und Pharm., Bd 76, p. 315 1850.

vatten mycket svårlösligt pulver, som ej innehåller kristallvatten. Förpuffar mycket häftigt vid upphettning.

Analys:

1) 0,2649 gr. gaf efter glödgning med soda och $KClO_3$ 0,1019 gr. Pt och 0,0787 gr. Cr_2O_3.

2) 0,2251 gr. gaf 0,0853 gr. Pt.

3) 0,1791 gr. gaf 16,9 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 15° och 755,7 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt		Funnet		
			1.	2.	3.
Pt	194,5	37,89	38,47	37,89	—
Cr_2	104,8	20,42	20,38	—	—
N_4	56	10,91	—	—	11,17
$O_9 + H_{14}$	158	30,78	—	—	—
	513,3.	100,00.			

Om till platodiaminkromat i fast form tillsättes en vätesuperoxidlösning sker reaktionen på samma sätt, och vätskan antager genast en svartbrun färg, som snart försvinner. Sannolikt bildas hydroxyloplatindiaminkromat.

Hydroxyloplatindiaminbromid

$$(OH)_2Pt4H_3N \,.\, Br_2$$

framstäldes af sulfatet och beräknade mängder brombarium. Färglösa, väl utvecklade, korta prismor med ändarne ofta begränsade af pyramidytor. Saltet var vattenfritt. Svårlösligt äfven i kokande vatten.

Analys å vid 100° torkadt salt:

0,2384 gr. gaf efter glödgning med soda 0,1014 gr. Pt och 0,1945 gr. AgBr.

I procent:

	Beräknadt		Funnet
Pt	194,5	42,64	42,53
Br_2	159,6	34,99	34,67
N_4	56	12,28	—
$O_2 + H_{14}$	46	10,09	—
	456,1.	100,00.	

Hydroxyloplatindiaminjodid

$(OH)_2Pt4H_3N . J_2$

erhölls af motsvarande sulfat, som sönderdelades med en beräknad mängd jodbarium. Ur moderluten afsatte sig ett svagt smutsgult kristallpulver, som vid långsam kristallisation erhölls i mikroskopiska, sexsidiga, korta prismor. Svårlösligt i såväl kokande som kallt vatten, Innehöll ej kristallvatten.

Analys:

1) 0,1952 gr. gaf efter glödgning 0,0691 gr. Pt.

2) 0,2141 gr. gaf efter glödgning 0,0764 gr. Pt.

I procent:

	Beräknadt		Funnet 1.	Funnet 2.
Pt	194,5	35,38	35,68	35,40
J_2	253,2	46,06	—	—
N_4	56	10,19	—	—
$O_2 + H_{14}$	46	8,37	—	—
	549,7.	100,00.		

Hydroxyloplatindiaminnitrit.

$(OH)_2Pt4H_3N . 2NO_2$.

Beräknade mängder af motsvarande klorid sönderdelades med silfvernitrit. Fina, nålformiga kristaller, som äro lättlösliga i vatten. Saltet var vattenfritt. Förpuffar häftigt vid glödgning under eldfenomen.

Analys:

0,1690 gr. gaf 31,2 cm.³ kväfgas mätt öfver kali vid 17,4° och 761,5 mm. bar.

I procent:

	Beräknadt		Funnet
Pt	194,5	50,07	—
N_6	84	21,62	21,84
$O_6 + H_{14}$	110	28,31	—
	388,5.	100,00.	



Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 6.
Stockholm.

Studien über nordische Turbellarien und Nemertinen. Vorläufige Mittheilung.

Von DAVID BERGENDAL.

[Eingereicht am 11 Juni 1890 durch S. LOVÉN.]

Seit mehreren Jahren mit Turbellarienstudien beschäftigt will ich hier einen kurzen Auszug aus der ausführlichen Abhandlung geben, die ich, zum Theil wenigstens, ziemlich bald der Königl. Schwed. Academie der Wissenschaften vorlegen werde.

I. Tricladiden.

Uteriporus vulgaris n. sp.

Planaria affinis, ÖRSTED?, *Fovia affinis*, GIRARD? *Fovia affinis*, JENSEN.

Diese Gattung umfasst eine Form, die in ihrer äusseren Erscheinung der Gattung *Gunda* ziemlich nahe kommt. Als Gattungscharakter nenne ich besonders den Uterus, welcher mit einer selbständigen, nahe der Öffnung der Penisscheide gelegenen Öffnung versehen ist. Um die Geschlechtsöffnungen findet sich eine kleine Vertiefung. Übrigens liegt der Uterus zwischen der Penisscheide und der Rüssel-tasche, steht aber durch zwei an den Seiten des Penis verlaufende Gänge mit hinteren rundlichen Erweiterungen in Verbindung. Die Oviducte vereinigen sich hinter dem Penis zu einem gemeinsamen Gang, der nach vorn läuft und in die Höhle der Penisscheide einmündet. Der Penis ist von oben nach unten gerichtet. Die Vasa deferentia sind

bei der männlichen Geschlechtsreife grösser als bei anderen Planarien, und gehen von der Ventral-bis an die Dorsalfläche.

Die Anordnung der Organe ist fast segmental. Nur sehr selten findet man mehr als einen Hoden in jedem Septum. Die 5—7 Zweige des vorderen unpaaren Hauptastes des Darmes sind wieder verzweigt. Diejenigen der beiden hinteren haben kleinere oder keine sekundäre Verzweigungen. Die Anzahl derselben beträgt 10—13 jederseits. Auch kleine mediane Verzweigungen kommen vor.

Das Vorderende ist stumpf, etwas vorstehend in der Mitte mit nach aussen stehenden seitlichen Ecken, aber ohne Tentakel.

Die Farbe des Rückens wechselt sehr stark von oliven-gelbbraun bis röthlich oder röthlich-gelb. Weisse Streifen sind an weiblichen geschlechtsreifen Thieren sehr deutlich zu erkennen. Die untere Seite ist blasser mit deutlichen weissen Flecken, welche Dotterstöcke und Hoden anzeigen. Die starken Vasa deferentia schimmern auch sehr deutlich durch. Die Wassergefässe entbehren der Cilien. Die Hauptlängsstämme setzen sich auch im Kopfe fort und sind durch einen vorderen Querstamm verbunden. Von demselben gehen kurze Zweige an die Oberfläche und münden dort aus.

Weil es mir nicht ganz möglich ist zu entscheiden, ob diese Form mit ÖRSTEDS Planaria identisch ist, muss ich dieselbe als eine neue Species einführen. Eine neue Gattung bildet sie jedenfalls. Ich habe diese Form in Bohuslän und bei Kullen gefunden. An der letzteren Stelle kam sie zusammen mit *Gunda Ulvae* (ÖRSTED, IJIMA) vor. Sie hatte ihre männliche Reife im September. Jetzt, im Anfang Aprils, sind bei Kullen eingesammelte Exemplare ihrer weiblichen Reife sehr nahe stehend. Im Herbste war *Uteriporus* viel gewöhnlicher als *Gunda Ulvae.* Jetzt konnte ich unter den Steinen sehr leicht mehrere Tausende von der letzteren einsammeln, von *Uteriporus* dagegen in drei Stunden nur gegen zwanzig Exemplare auftreiben. In Bohuslän fand ich *Gunda Ulvae* zusammen mit *Uteriporus* nicht vor.

Gunda Ulvae kommt also bei Kullen sehr zahlreich vor. Die Angabe WENDT'S, dass sie nicht ausser der Ostsee vorkommt ist also schon desshalb nicht richtig. JENSEN giebt überdiess an, dass sie in Norwegen allgemein ist. Wahrscheinlich kommt sie auch in Bohuslän vor. Nur habe ich sie wohl nicht an passenden Lokalen gesucht, weil ich damals selbst nicht die Tricladen zu studiren gedacht hatte, und weil in der Nähe der zoologischen Station keine geeigneten Lokale waren. Nur soviel kann ich bestimmt sagen, dass sie unter den grossen Mengen von Ulven dieser Gegend, welche ich im letzten August genau durchsuchte, nicht vorhanden war. ÖRSTED giebt nämlich an, dass sie sehr allgemein im Sunde »vornehmlich auf den Ulven» sei.

Auch die Wassergefässe dieser Planarie zeigen keine andere Cilien als die Wimper. WENDT hat wohl einige solche in die Gefässe eingelegt. Auch sie besitzt grosse Gefäss-stämme im Kopfe. Betreffend die Anatomie dieser Planarie will ich ganz besonders zwei Angaben WENDT'S besprechen. Er sagt von den Hoden, dass die Mutterzellen der Spermatozoen viele Kernkörperchen besitzen, und dass sie sich nachher wahrscheinlich in eben soviele Tochterkerne theilen als Kernkörperchen vorhanden waren. Diese Angaben sind sehr irrig. Erstens darf man die Chromatinelemente der Kerne gar nicht als Nucleoli ausgeben, und zweitens sieht man noch bei viel späteren Studien in den Kernen der Spermazellen mehrere Chromatinstücke. Dies gilt nicht weniger von *Gunda Ulvœ* als von *Uteriporus vulgaris* und anderen von mir untersuchten Tricladen. Die zweite Angabe betrifft die Schalendrüsen, welche eine neue Entdeckung WENDT'S sein sollen. Nur der Name scheint mir neu zu sein. Bei den meisten Verfassern, die über Tricladen geschrieben haben, sind diese Drüsen aufgeführt, freilich als Eiwessdrüsen. Ich glaube sehr gern, dass die Auffassung WENDT'S über die Bedeutung richtig sein kann, möchte jedoch nicht zugeben, dass diese Drüsenzellen sich unter allen Umständen von den Dotterstöcken so bedeutend unterscheiden. Es ist mir übrigens eine schwer verständliche Angabe bei verschiedenen Verfassern, dass die Dotter-

zellen der Kerne entbehren. Das habe ich nicht sehen können; jedoch nicht ganz volle weibliche Reife.

Von Anderen schwedischen Tricladen habe ich bisher nur folgendes zu berichten.

Dendrocœlum lacteum ÖRSTED findet sich an mehreren Stellen und wenigstens so nördlich wie Upsala.

Von der Gattung Planaria habe ich eine Form untersucht, welche der *Pl. torva* sehr nahe kommt. Dieselbe ist dadurch merkvürdig, dass der sogenannte Uterus strotzend voll von mehreren Hunderten Zellen ist. KENNELS auch aus anderen Gründen nicht ganz wahrscheinliche Vermuthung, dass die Eier und Dotterzellen bei der Conservirung durch Contractionen aus der Penisscheide in den Uterus geführt werden, ist deshalb wenigstens für diese Planaria nicht richtig. Bei derselben Art habe ich auch im Uterus, der zweifellos auch als receptaculum seminis functionirt, ganz ähnliche spermatozoenartige Bildungen, wie SCHULZE abgebildet hat, gesehen.

Von der Gattung *Polycelis* habe ich *Polycclis tenuis* (IJIMA) aus Upland, wo sie Herr Kand. H. SCHIÖTT zusammen mit den beiden vorigen Species gefunden hatte, untersucht. Die Verschiedenheit dieser Art von den anderen ist zu gross um nur eine Speciestrennung zu veranlassen. Ich nenne also diese Species *Ijima tennis* (IIJIMA n. g.). Die von mir untersuchte Form besass viele, aber gar nicht zahllose Augen.

II. Polycladiden.

Von den Polycladiden Schwedens gebe ich hier nur folgende sehr unvollständige Notizen.

Stylochoplana cf. *maculata*, (QUATREFAGES) LANG ist unter den Zosteren in Bohuslän an verschiedenen Stellen sehr gemein.

Leptoplana cf. *Drœbakensis* ÖRSTED, habe ich in Bohuslän bei Islandsbergshufvud gefunden.

Eine neue Gattung muss eine grosse, der *Cryptocelis* ähnliche Form bilden, die auf Lehmboden ziemlich allgemein ist. Dieselbe ist hauptsächlich durch starke muskulöse Drüsen ausgezeichnet, die in einer besonderen Höhle hinter den getrennten Geschlechtsöffnungen liegen. Von der Stelle, wo die Oviducten zusammentreffen geht ein langer Gang nach hinten und bildet unmittelbar vor diesen Drüsen eine blindsackartige Erweiterung. Sehr merkwürdig ist, dass ich bei allen untersuchten Thieren, welche mit Eiern gefüllte Uterussäcke besassen, keine Spuren von dem männlichen Begattungsapparat gesehen habe, obgleich die Vasa deferentia von Sperma sehr voll waren. Ich kann nähmlich die oben als Drüsen erwähnten Bildungen nicht als Penis auffassen, obgleich die Vasa deferentia ihnen sehr nahe kommen. Übrigens besitzt diese Art viele Randaugen, die fast mit den sehr tief liegenden Gehirnhofsaugen zusammenstossen. Die Farbe ist weiss oder schwach röthlich. Ich nenne sie *Cryptocelides Loveni* n. g. n. sp. Ob ÖRSTEDS *Typhlolepta coeca* diese Form war, kann nicht entschieden werden. Seine Beschreibung ist für eine Wiederfindung des Thieres nicht genügend.

Prostheceræus vittatus (MONT.) LANG ist in Bohuslän nicht gerade selten gesehen und wird da sehr gross.

Stylostomum variabile LANG ist sehr gewöhnlich, und seine Farbe variirt sehr stark.

Eurylepta cornuta O. F. MÜLLER muss sehr selten sein, wenn sie überhaupt vorkommt. Dagegen habe ich an verschiedenen Stellen eine *Oligocladus*-Form erhalten, die jedoch zu viele Darmverzweigungen besitzt. Der Mund liegt indessen vorn vor dem Gehirn.

Bei Väderöarna habe ich eine Form gefunden, die möglicherweisse eine *Eurylepta*-species sein konnte. Das Individuum war aber sehr stark beschädigt. Von diesen Thieren, die ich in Schnittserien zerlegt habe, werde ich natürlich genauere Mittheilungen geben.

Von den *Nemertinen* habe ich in Bohuslän ungefähr 30 Species gefunden, von denen etwa 10 neu sein möchten. Unter den interessanteren Formen sind zwei parasitische Arten, von denen die eine in *Esperia lingua*, die andere in *Phallusia mentula* sich aufhält. Über diese Thiere, die ich jetzt vier Jahre studiert habe, behalte ich mir weitere Mittheilung vor.

In meiner ersten Abhandlung werde ich die Tricladen behandeln und will dann auch einige weitere Studien über *Bipalium* mittheilen. Ebenso sind meine Studien über die schwedischen Polycladiden fast abgeschlossen. Mit den Nemertinen muss ich weiter arbeiten. Schliesslich erlaube ich mir meine schwedischen Fachgenossen aufzufordern mir Turbellarien und Nemertinen, die am liebsten mit heissem Sublimat getödtet und fixirt werden können, zuschicken zu wollen. Die Nemertinen können auch wenigstens ebensogut mit Alkohol und Essigsäure (2 %) konservirt werden.

Die Unvollkommenheit dieser vorläufigen Mittheilung mag darin ihre Entschuldigung finden, dass sie aus dem Gedächtniss zusammengeschrieben ist. Diese oberflächlichen Aufzeichnungen zu veröffentlichen habe ich mich entschlossen, weil ich eben im Begriff stehe eine zoologische Reise nach Grönland im Auftrage der Kgl. Dänischen Commission für die zoologische und geografische Untersuchung Grönlands anzutreten, und also könnten möglicherweise meine Studien ganz unnütz werden.

Kopenhagen 26 April 1890.

Stockholm 1890. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 7.

Onsdagen den 17 September.

INNEHÅLL:

Anmäldes, att Kongl. Maj:t genom nådig kungörelse den 26 sistlidne Juni bestämt, att de nya prototyperna för mått och vigt skola förvaras af Akademien i brandfritt skåp, och meddelat föreskrifter angående deras användande, äfvensom att berörde skåp blifvit anskaffadt och prototyperna deri inlagda i närvaro af ett ombud för chefen för Kongl. Finansdepartementet.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å Kongl. Landtbruks-Akademiens Förvaltningskomités hemställan om anställande af hydrografiska undersökningar inom riket afgåfvo Hrr R. RUBENSON, Grefve R. CRONSTEDT och O. PETTERSSON infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Friherre NORDENSKIÖLD lemnade meddelande dels om en af Ingeniör W. WENDIN gjord upptäckt af en ny och riklig förekomst af cerhaltiga mineral vid östra Gyttorpsgrufvan, och dels om upptäckten af columbit i stora kristaller och af mikrolit vid Timmerhult i Bohuslän.

Hr BRÖGGER dels redogjorde för en uppsats af studeranden H. BÄCKSTRÖM: »Ueber fremde Gesteinseinschlüsse in einigen skandinavischen Diabasen» (se Bihang till K. Vet. Akad:s Handl.), dels omnämnde tre nya mineralfynd af skolläraren G. FLINK, nämligen pinakolit, trimerit och kentrolit, och dels, i anslutning till Friherre NORDENSKIÖLDS anförande, meddelade, att han nyligen konstaterat, att tantaliten icke är rhombisk och isomorf med columbiten, utan tetragonal och identisk med tapiolit, äfvensom att de skenbart rhombiska kristallerna hos tantaliten äro tvillingar.

Hr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade följande uppsatser: 1:o) »Sur une équation linéaire du second orde à coefficients transcendants», af studeranden G. CASSEL*; 2:o) »Om maxima och minima af dubbelintegraler», af Docenten G. KOBB *; 3:o) Ueber eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe», af Docenten vid universitetet i Basel ALFR. JONQUIÈRE (Se Bihang etc.).

Sekreteraren öfverlemnade följande insända uppsatser: 1:o) »Études de la distribution spectrale de l'absorption dans le spectre infra-rouge», af D:r K. ÅNGSTRÖM *; 2:o) »Om några formler hos Mr. Bierens de Haan», af Lektor C. F. LINDMAN*; 3:o) »Om fenyl- och p-tolyl-o-benzylendiamin», af Prof. O. WIDMAN och Doc. H. G. SÖDERBAUM*; 4:o) »Derivat af ortoamidobenzylalkohol», af Docenten SÖDERBAUM*; 5:o) »Undersökningar angående värmets ledning i porösa, fuktiga kroppar», af Öfveringeniören S. A. ANDRÉE (se Bihang etc.); 5:o) »Om den nya upplagan af Galilei's samlade arbeten», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Generalstaben.*

Karta öfver Sverige. $^1/_{100,000}$. Bl. 31, 39, 40, 48, 49, 50. 1889—90 Tvfol.

Karta öfver Norrbottens län. $^1/_{200,000}$. Bl. 11, 15—17. 1888—90. Tv. 4:o.

(Forts. å sid. 374.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Études de la distribution spectrale de l'absorption dans le spectre infra-rouge

Par Knut Ångström.

[Communiquée le 17 Septembre 1890 par D. G. Lindhagen.]

1. Introduction.

Dans un Mémoire précédent[1]), j'ai rendu compte d'une recherche spectro-bolométrique sur l'absorption de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone dans le spectre infra-rouge. Dans ce qui suit, je communiquerai le résultat de mes recherches les plus récentes sur la distribution spectrale de l'absorption dans le spectre infra-rouge de la méthane, de l'éthylène, de l'éther, de la benzine et du sulfure de carbone. Pour contribuer à la solution de la question importante de la différence entre l'absorption d'un liquide et de sa vapeur, j'ai examiné l'absorption des trois derniers corps dans ces deux états d'agrégation. A propos de la recherche de ces composés de carbone, j'ai trouvé intéressant d'examiner aussi l'absorption du carbone pur.

La méthode suivie dans les expériences est à peu près la même que celle dont j'ai rendu compte dans le Mémoire déjà cité. Ainsi j'ai employé le même spectro-bolomètre et la même source de chaleur, une lampe d'Argand munie d'un cylindre d'ar-

[1]) Étude des spectres infra-rouges de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone. Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förhandl., 1889, N:o 9, p. 549.

gile et intérieurement d'un cône de craie mis en incandescence par la flamme.

Tous les corps examinés ont été placés entre la lampe et la fente du spectro-bolomètre. Les gaz ont été enfermés dans des tubes noircis intérieurement et fermés aux deux bouts par des plaques de sel gemme. J'ai employé deux tubes, l'un d'une longueur de 120 mm, l'autre de 60 mm. Ils sont attachés parallèlement à côté l'un de l'autre sur un bras mobile, de sorte qu'on peut d'un coup les placer entre la source de chaleur et la fente, ou bien les déplacer. Les deux tubes d'absorption sont joints entre eux par un tube de verre muni d'un robinet. Ils sont munis chacun d'un tube destiné à les remplir ou à les évacuer et ces tubes sont aussi pourvus de robinets. Par ces conduits, les tubes d'absorption correspondent avec l'appareil pour développer le gaz (ou la vapeur), ainsi qu'avec un manomètre et avec la pompe à air. Toutes les observations sont basées sur des déterminations alternatives; on examine la radiation de la lampe quand le tube est placé devant la fente et quand il en est éloigné; on répète ces déterminations avec le tube vide (ou rempli d'air sec, privé d'acide carbonique) et avec le tube rempli du gaz qu'on veut examiner. Pour examiner les vapeurs, un petit vase contenant le liquide dont la vapeur doit être examinée, est attaché au tube de remplissage. Après l'évacuation des tubes d'absorption, le robinet entre eux et le vase de liquide est ouvert et on laisse entrer la vapeur. On ferme de nouveau l'entrée du vase de liquide; les tubes d'absorption sont évacués et on répète cette opération jusqu'à ce qu'on soit sûr d'avoir la vapeur pure dans les tubes d'absorption. La tension de la vapeur est déterminée à l'aide du manomètre qu'on lit avec un kathétomètre.

Les liquides ont été enfermés entre des plaques de sel gemme séparées par une feuille de mica d'épaisseur convenable dans laquelle on a taillé une ouverture circulaire d'environ 20 mm de diamètre. Des ouvertures semblables sont appliquées dans les deux plaques métalliques entre lesquelles le petit vase d'ab-

sorption formé des plaques de sel gemme et la feuille de mica est fortement serré par trois ressorts à boudin[1]). L'épaisseur des feuilles de mica a été déterminée à l'aide d'un sphéromètre.

Dans les Tableaux suivants, comme dans le Mémoire précédent, sur ce sujet, Dév. indique la déviation du rayon, la raie D étant toujours le point de départ. J'ai donné aussi par interpolation graphique les longueurs d'onde correspondantes (λ) en 0,001 mm (1000 fois l'échelle d'Ångström) d'après les déterminations de l'indice de réfraction du sel gemme par M. Langley. Dans le Tableau 1 du Mémoire cité[2]), j'ai donné la relation entre la longueur d'onde et la déviation sur laquelle, pour le prisme employé (l'angle réfringent 60° 2',2), j'ai basé les déterminations de longueur d'onde. Nous admettons les longueurs d'onde dépassant 4,0 proportionnelles à la déviation d'après la formule

$$\lambda = -8{,}176 + 0{,}0993\ \delta',$$

(λ = longueur d'onde, δ = déviation). Dans les Tableaux, l'absorption est donnée en % (Abs.).

Les figures ci-jointes, où l'ordonnée donne l'absorption (1 mm = 2 %) et l'abscisse les déviations correspondantes, me semble donner une idée complète des résultats. Leur exactitude diffère naturellement pour des régions spectrales différentes, ce qui dépend de l'intensité différente de la radiation originaire dans les diverses parties spectrales. Elle est plus grande entre 1°—2° 30' où les erreurs d'observation en général ne doivent pas dépasser 1 % de la radiation incidente. Pour les déviations plus grandes que 2° 30' les erreurs d'observation augmentent à peu près proportionnellement avec la déviation, de 1 % jusqu'à environ 5 % pour la dév. = 3° 40'. Quand il s'agit des liquides, les erreurs d'observation sont pourtant un peu plus grandes que je ne l'ai admis ici. De plus, il y a une petite erreur constante. La perte qu'éprouve la radiation incidente par réflexion des plaques de

---

[1]) Cet arrangement m'a déjà servi dans une recherche précédente: Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl., *15*, Afd. 1, N:o 9, 1889; Wied. Ann. *39*, 267, 1890.

[2]) Étude des spectres infra-rouges etc. l. c., p. 551.

sel gemme lorsque les tubes sont remplis de vapeurs ou de gaz, peut être regardée comme égale à celle qui a lieu lorsque les tubes sont remplis d'air. Quand le vase d'absorption est rempli de liquide, cette réflexion diminue évidemment. Quand, malgré cela, j'ai appliqué la même correction pour la réflexion dans le dernier cas, on voit bien que les valeurs trouvées pour l'absorption ici sont *un peu trop petites*, ce qui ne fait cependant que corroborer mes conclusions. Du reste, il n'est peut-être pas inutile de remarquer ici que, le fil bolométrique occupant un espace d'environ 5′ et la dispersion étant aussi faible qu'ici, les détails les plus délicats échappent à l'observateur. Aussi la forme des courbes d'absorption a peut-être été par ci par là assez influencée par la nature de la source de chaleur, parce que, quand l'intensité de sa radiation dans de certaines parties du spectre augmente ou diminue brusquement, le fil bolométrique est exposé à des rayons d'intensité très différente. Le but principal de nos recherches a cependant été une orientation de la distribution spectrale de l'absorption dans le spectre infra-rouge et les conclusions auxquelles je suis arrivé restent indépendantes de ces circonstances.

2. L'absorption de quelques gaz.

Éthylène (C_2H_4).

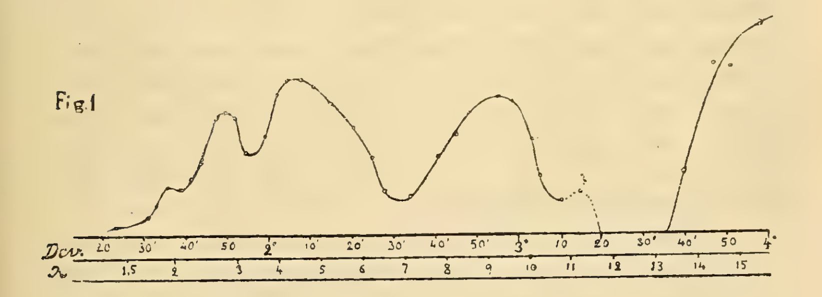
Le gaz fut développé en chauffant une partie d'acide sulfurique et cinq parties d'alcool pur; pour le purifier et le dessécher, il fut conduit par de l'hydrate de sodium et de l'acide sulfurique concentré. On continua à développer le gaz jusqu'à ce qu'il fût impossible d'observer avec le spectro-bolomètre une variation dans l'intensité des bandes d'absorption. Cette manière de s'assurer de la complète absence de l'air dans les tubes d'absorption, a aussi été employée pour les autres gaz.

Le Tableau suivant résume les observations.

Tableau 1.

Éthylène (pression = 720, température = 20°, longueur de tube = 120 mm).

Dév.	λ	Abs.	Dév.	λ	Abs.
1° 0′,0	0,91	0	2° 20′,0	5,73	29,0
⋮	⋮		2° 24′,3	6,14	20,3
1° 19′,0	1,28		2° 28′,5	6,57	11,5
1° 23′,8	1,40	2,6	2° 34′,0	7,12	10,0
1° 31′,5	1,64	4,4	2° 40′,5	7,76	20,9
1° 33′,2	1,72	7,3	2° 44′,0	8,12	26,3
1° 35′,7	1,86	12,2	2° 48′,0	8,52	31,9
1° 37′,6	1,96	13,7	2° 54′,0	9,12	36,3
1° 39′,0	2,06	12,0	2° 58′,6	9,57	35,3
1° 41′,0	2,18	14,8	3° 3′,0	10,00	24,9
1° 43′,5	2,38	18,8	3° 5′,5	10,23	15,7
1° 47′,0	2,62	31,2	3° 10′,4	10,73	8,6
1° 49′,2	2,78	32,3	3° 15′,5	11,22	11,0
1° 51′,5	2,98	31,8	3° 18′,0	11,47	0
1° 54′,2	3,18	22,0	⋮	⋮	
1° 59′,0	3,64	25,9	3° 35′,0	13,14	
2° 2′,0	3,93	37,1	3° 40′,0	13,65	15,8
2° 5′,0	4,22	40,9	3° 46′,8	14,31	44,7
2° 7′,6	4,48	41,7	3° 52′,0	14,84	43,7
2° 10′.5	4,77	40,2	3° 59′,0	15,54	54,6
2° 14′,8	5.20	35,3	4° 5′,0	16,11	59,2



On voit par là et par la figure ci-jointe que l'éthylène, qu'on connaît depuis longtemps comme un gaz absorbant fortement la chaleur rayonnante, a deux régions d'absorption; la première s'étend de 1° 20′ ($\lambda = 1{,}28$) jusqu'à 3° 18′ ($\lambda = 11{,}47$), la seconde de 3° 38′ ($\lambda = 13{,}45$) aussi loin qu'on a pu faire des déterminations. On remarque les maxima et les minima suivants.

Maxima.		Minima.	
Dév. = 1° 36′,	λ = 1,87.	Dév. = 1° 39′,	λ = 2,05.
» = 1° 49′,	» = 2,78.	» = 1° 56′,	» = 3,33.
» = 2° 6′,	» = 4,32.	» = 2° 32′,	» = 6,92.
» = 2° 55′,	» = 9,21,	(» = 3° 10′,	» = 10,68)[1].
(» = 3° 15′,	» = 11,18)[1].		

Méthane (CH_4).

Le gaz fut développé par l'échauffement de deux parties d'acétate de sodium et deux parties d'hydrate de potassium avec trois parties d'oxyde de calcium. Il fut purifié et desséché par de l'acide sulfurique fumant, de l'hydrate de sodium et par l'anhydride phosphorique.

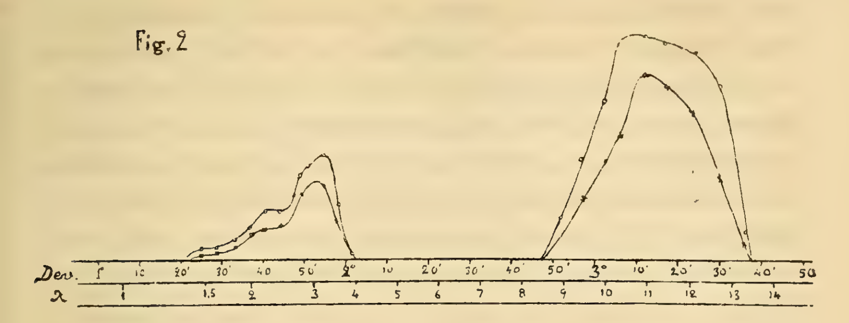
Tableau 2.

Méthane (pression = 755, température = 20°, longueurs des tubes 60 et 120 mm).

Dév.	λ	Abs. l=60 mm.	Abs. l=120 mm.	Abs. calculée l=60 mm.
1° 2′,2 … 1° 21′,0	0,94 … 1,30	0	0	
1° 25′,5	1,44	1,4	2,4	1,2
1° 29′,0	1,56	2,1	3,1	1,6
1° 32′,8	1,70	3,5	4,8	2,4
1° 36′,5	1,90	6,5	8,7	4,4
1° 40′,8	2,16	7,7	13,0	6,7
1° 44′,0	2,39	9,4	12,8	6,6
1° 47′,0	2,62	—	16,7	—
1° 49′,0	2,78	17,5	22,2	11,8
1° 51′,5	2,98	—	24,8	—
1° 54′,3	3,18	19,8	28,1	15,2
1° 58′,0	3,62	10,4	14,9	7,7

Dév.	λ	Abs. l=60 mm.	Abs. l=120 mm.	Abs. calculée l=60 mm.
2° 3′,0	4,02	0,6	0,8	0,4
2° 6′,0 … 2° 47′,0	4,32 … 8,41	0	0	
2° 51′,8	8,88	—	11,5	—
2° 56′,8	9,38	16,6	26,2	14,1
3° 3′,0	10,00	25,9	42,4	24,1
3° 6′,0	10,28	33,3	56,6	34,1
3° 12′,2	10,90	49,4	58,8	35,8
3° 18′,0	11,47	45,9	56,7	34,2
3° 24′,0	12,06	39,3	55,0	32,9
3° 30′,0	12,65	23,3	46,3	26,7
3° 36′,0	13,25	4,1	7,4	3,8

[1]) très incertain.



On voit que la méthane possède deux régions d'absorption bien distinctes l'une de l'autre. La première s'étend de 1° 20′ ($\lambda = 1{,}28$) jusqu'à 2° 2′ ($\lambda = 3{,}92$), la seconde de 2° 47′ ($\lambda = 8{,}41$) jusqu'à 3° 36′ ($\lambda = 13{,}24$) et l'on trouve ici les maxima suivants:

Dév. = 1° 40′,	$\lambda =$	2,12 [1])
» = 1° 54′,	» =	3,18
» = 3° 9′,	» =	10,59.

La dernière colonne du Tableau donne les valeurs de l'absorption du tube plus court, calculées des valeurs tirées des observations avec le tube le plus long en supposant que la loi d'absorption est applicable, c'est-à-dire en admettant que la quantité de chaleur absorbée soit

$$A = I_0 (1 - e^{-kl})$$

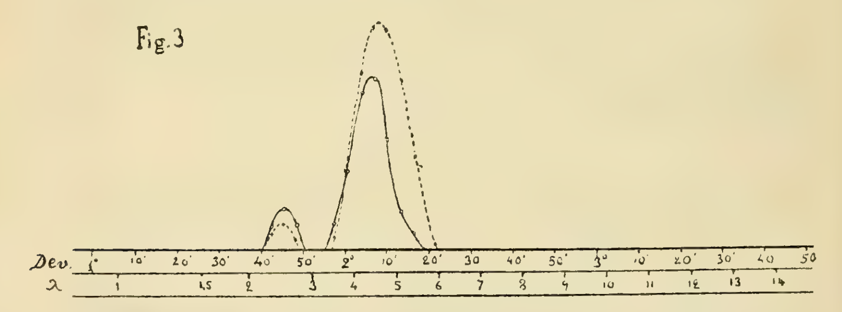
(I_0 = la chaleur incidente, k = une constante, l = la longueur du tube). On voit par là que le calcul et l'expérience ne concordent pas et comme on n'a pas lieu de douter de la loi d'absorption, on voit que, quand il s'agit d'une absorption aussi irrégulière que c'est le cas ici, on doit regarder la radiation qui tombe sur la bande bolométrique, non comme homogène mais bien comme une somme complexe de radiations d'une intensité et d'un pouvoir d'absorption différent. Cela confirme du reste la supposition que les régions d'absorption que nous avons trouvées ici ne sont en effet que des groupes de bandes ou de raies, dont nous ne pouvons pas observer les détails les plus délicats à cause de la

[1]) peu distinct.

faible dispersion et de la largeur de la bande bolométrique. De plus, la seconde région d'absorption de la méthane nous donne un exemple de l'accroissement inégal de différentes parties du spectre quand la couche du gaz augmente. Il en résulte qu'à petite dispersion les maxima des régions d'absorption semblent éprouver un léger déplacement avec l'accroissement de la couche absorbante. Le second maximum de la méthane semble donc reculer vers le côté visible du spectre. (Le maximum pour $l =$ 60 mm à 3° 12′ environ; pour $l = 120$ à 3° 9′). M. Langley a fait des observations semblables relativement aux lignes atmosphériques à des hauteurs de soleil différentes[1]).

Acide carbonique (CO_2) **et Oxyde de carbone** (CO).

Pour faciliter la comparaison entre les résultats nouvellement trouvés et ceux de mon Mémoire précédent, je donne ci-dessous le dessin de l'absorption de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone à l'échelle que j'ai employée ici. La courbe pleine donne l'absorption de l'acide carbonique, la courbe à traits celle de l'oxyde de carbone. La recherche a été faite avec le tube le plus long.



Nous avons donc trouvé deux maxima pour l'acide carbonique, savoir

$$\text{Dév.} = 1^\circ\, 46', \qquad \lambda = 2{,}60,$$
$$\text{»} \quad = 2^\circ\, 6' \qquad \lambda = 4{,}32,$$

et pour l'oxyde de carbone à

$$\text{Dév.} = 1^\circ\, 44', \qquad \lambda = 2{,}48,$$
$$\text{»} \quad = 2^\circ\, 8', \qquad \lambda = 4{,}52.$$

[1]) Phil. Mag. *26*, p. 514, 1888.

Remarque. Une application pratique de ces mesures bolométriques qu'il me semble intéressant d'indiquer ici, c'est l'analyse quantitative du gaz d'éclairage. Les parties principales de ce gaz, on le sait, sont l'éthylène, la méthane, l'oxyde de carbone et l'hydrogène[1]). Une recherche bolométrique donne immédiatement la quantité des trois premiers gaz. Une détermination de l'absorption à 3° 20′ nous apprend la quantité de méthane parce que dans cette région du spectre, ce gaz est le seul absorbant; de même une détermination à 2° 40′ nous donne la quantité d'éthylène. La détermination de l'absorption à 2° 5′ nous donne la somme de l'absorption de l'éthylène et de l'oxyde de carbone à cet endroit. De là on peut calculer la quantité d'oxyde de carbone, puisque la quantité d'éthylène est déjà connue par la détermination précédente. Trois déterminations bolométriques suffisent donc pour cette analyse. Il est vrai que pour ces déterminations il faut d'abord une recherche très soigneuse des courbes d'absorption des trois gaz à des pressions différentes et de plus, il faut que l'observateur soit très familier avec l'emploi du spectrobolomètre. Le gain de temps à chaque détermination particulière semble pourtant plus que dédommager du temps employé à la recherche préliminaire.

Quelques expériences entreprises avec le gaz d'éclairage m'ont convaincu qu'il est parfaitement possible d'employer cette méthode. Aussi, dès que les circonstances me le permettront, je chercherai à la développer.

3. Absorption de quelques liquides et de leurs vapeurs.

Éther ($C_5H_{10}0$).

a) *La vapeur.* Le liquide employé à développer la vapeur (il provenait de Kahlbaum à Berlin) était pur.

---

[1]) La petite quantité d'acide carbonique que contient généralement le gaz d'éclairage doit être éloignée de la manière ordinaire avant cette analyse.

Tableau 3.

Éther, vapeur (pression = 200 mm, température = 20°, longueurs des tubes = 60 et 120 mm).

Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée l = 60 mm.	Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée. l = 60 mm.
1° 20′,0	1,28	0	0		2° 22′,0	5,92	—	23,2	—
1° 28′,0	1,52				2° 25′,0	6,22	15,0	23,3	12,4
1° 33′,0	1,71	3,1	5,0	2,5	2° 28′,0	6,52	—	14,1	—
1° 39′,0	2,05	6,2	10,9	5,6	2° 30′,0	6,72	6,7	14,5	7,5
1° 45′,0	2,47	10,1	18,4	10,7	2° 36′,0	7,32	11,6	21,4	11,3
1° 48′,0	2,70	—	30,3	—	2° 42′,5	7,96	22,4	26,4	14,2
1° 51′,5	2,98	32,5	40,5	22,9	2° 48′,5	8,56	42,9	52,4	31,0
1° 54′,5	3,22	43,2	53,5	31,8	2° 54′,8	9,19	56,8	72,7	47,7
1° 57′,5	3,49	44,6	55,7	33,4	3° 1′,0	9,79	69,5	85,3	61,6
2° 4′,0	4,12	19,0	29,2	15,8	3° 7′,2	10,42	64,1	81,5	57,0
2° 7′,0	4,22	13,9	23,9	12,7	3° 13′,4	11,02	—	79,3	—
2° 10′,0	4,72	—	21,7	—	3° 19′,6	11′62	—	78,8	—
2° 13′,0	5,02	12,7	22,9	12,2	3° 29′ 0	12,55	56,3	77,1	52,1
2° 16′,0	5,32	—	23,0	—	3° 39′,0	13,55	—	83,5	—
2° 19′,0	5,62	13,3	23,9	12,7	3° 49′,0	14,54	—	84,8	—

La vapeur de l'éther donne naissance à une région d'absorption (voyez la fig. 4 dans laquelle la courbe pleine donne l'absorption de la vapeur) qui s'étend de 1° 30′ ($\lambda = 1,59$) aussi loin qu'on a pu faire des déterminations. Dans cette région, on trouve les maxima et minima suivants.

Maxima.		Minima.	
Dév. = 1° 57′,	$\lambda = 3,45$,	Dév. = 2° 10′,	$\lambda = 4,72$,
» = 2° 18′—2° 22′,	$\lambda = 5,53—5,92$,	» = 2° 29′,	$\lambda = 6,62$.
» = 3° 2′,	$\lambda = 9,89$.		

Un minimum semble encore se présenter au voisinage de 3° 20′, mais les erreurs d'observation sont ici trop grandes pour qu'on puisse l'accepter sans hésitation.

Comme on le voit par la dernière colonne du Tableau comparée avec la troisième, il en est ici comme de la méthane sous le rapport de la rapidité avec laquelle augmente l'absorption dans les différentes parties du spectre. Pendant que la région depuis 2° 4′—2° 36′ obéit à la loi d'absorption, des écarts considérables se présentent avant cette région. Cela fait que la courbe d'absorption à un certain degré change son caractère pour des couches d'absorption différentes.

b) *Le liquide.* Nous avons employé du même liquide que pour les recherches sur l'absorption de la vapeur. Si l'on admet la densité de la vapeur de l'éther = 2,586, la tension = 200 mm, la température = 20° et la densité de l'éther liquide = 0,72, on obtient la couche de liquide qui correspond à 120 mm de la vapeur, de l'équation

$$\frac{x}{120} = \frac{0{,}001293 \times 2{,}586 \times 200}{0{,}72 \times 1{,}07 \times 760},$$

d'où

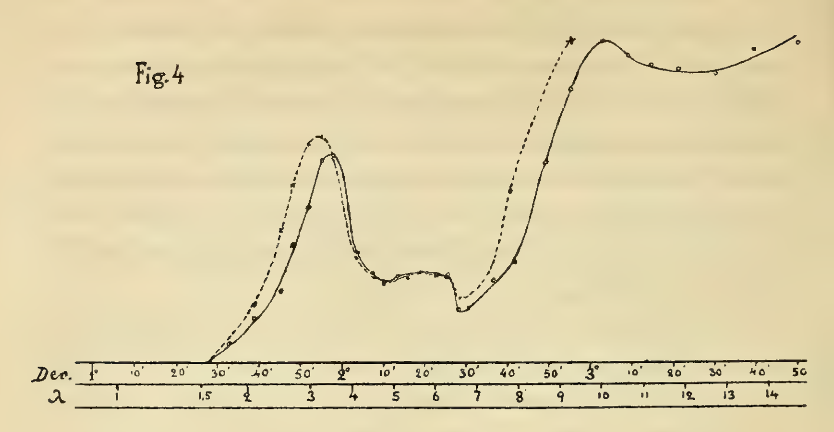
$$x = 0{,}137 \text{ mm}.$$

L'épaisseur de la feuille de mica placée entre les plaques de sel gemme était de 0,14 mm (± 0,005 mm).

Tableau 4.

Éther, liquide (température 20°, épaisseur de la couche 0,14 mm).

Dév.	λ	Abs.	Dév.	λ	Abs.
1° 28′,0	1,52	0	2° 10′,0	4,72	20,9
1° 39′,0	2,05	14,9	2° 16′,0	5,32	22,6
1° 45′,0	2,47	34,8	2° 22′,0	5,92	23,2
1° 48′,0	2,70	46,8	2° 28′,0	6,52	16,9
1° 51′,5	2,98	57,4	2° 36′,0	7,32	26,4
1° 54′,5	3,22	59,7	2° 40′,0	7,72	44,4
1° 57′,5	3,49	53,0	2° 53′,0	9,02	85,7
2° 4′,0	4,12	27,7			



La figure 4 indique l'absorption du liquide de l'éther dans la courbe à traits. Si l'on compare cette dernière avec la courbe pleine, qui représente l'absorption de la vapeur, on trouve que ces deux courbes ont en général le même caractère. Entre 1° 55′—2° 28′ elles sont même coïncidentes, mais des deux côtés de cette région le liquide montre une absorption plus forte que la vapeur. C'est pourquoi le premier maximum semble reculé vers la partie visible du spectre (environ 4′) et le troisième maximum, qui est très fort, est déplacé vers le même côté. On serait tenté de croire que la différence dépendrait de la mise au point de l'instrument vis-à-vis la raie D dans les deux cas. Mais le côté droit du premier maximum est à peu près coïncident dans un cas comme dans l'autre, ce qui n'aurait pas lieu si l'absorption était identique et si la différence ne dépendait que d'un ajustement erroné de l'instrument. Des expériences répétées ont aussi donné le même résultat.

Benzine (C_6H_6).

a) *La vapeur.* Le liquide dont nous nous sommes servi pour le gaz était pur (de Kahlbaum à Berlin).

Tableau 5.

Benzine, vapeur (pression 57 mm, température 20°, longueurs des tubes 60 et 120 mm).

Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée l = 60 mm.
1° 8′,0	1,03	0	0	
⋮	⋮			
1° 39′,0	2,05			
1° 41′,0	2,18	2,2	2,9	1,5
1° 45′,6	2,51	3,8	5,2	2,6
1° 48′,0	2,70	—	7,3	—
1° 51′,2	2,95	11,9	14,4	7,5
1° 53′,5	3,13	—	12,9	—
1° 56′,0	3,33	4,8	7,3	3,7
2° 2′,0	3,92	0,8	2,7	1,4
2, 6′,8	4,39	0	0	
⋮	⋮			
2° 16′,0	5,32			
2° 22′,0	5,92	5,8	8,1	4,1

Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée l = 60 mm.
2° 25′,0	6,22	—	7,9	—
2° 28′,0	6,52	3,3	7,9	4,0
2° 32′,0	6,92	3,2	5,5	2,8
2° 40′,0	7,72	5,9	6,7	3,4
2° 44′,3	8,15	—	9,8	—
2° 48′,4	8,56	10,3	17,4	9,1
2° 51′,0	8,81	—	19,1	—
2° 55′,2	9,24	7,5	16,2	8,5
3° 1′,0	9,79	—	4,5	—
3° 8′,0	10,49	—	3,1	—
3° 13′,0	10,98	—	5,4	—
3° 20′,0	11,67	—	0	
⋮	⋮			
3° 35′,0	13,20	—		

On voit par là ainsi que par la courbe pleine de la fig. 5, que la vapeur de la benzine possède deux régions d'absorption, la première depuis 1° 38′ ($\lambda = 1,98$) jusqu'à 2° 4′ ($\lambda = 4,12$), le second depuis 2° 13′ ($\lambda = 5,02$) jusqu'à 3° 20′ ($\lambda = 11,67$). On peut y distinguer des maxima à

Dév. = 1° 52′, $\lambda = 3,01$,
» = 2° 23′—2° 28′, $\lambda = 6,02—6,52$,
» = 2° 51′, $\lambda = 8,81$,
» = 3° 15′ [1]), $\lambda = 11,18$.

La seconde région d'absorption a un minimum dans le voisinage de Dév. = 2° 36′ ($\lambda = 7,32$) et peut-être aussi à Dév. = 3° 6′ ($\lambda = 10,28$).

b) *Le liquide.* On trouve la couche de liquide correspondant à la couche de vapeur d'une longueur de 120 mm, d'une tension

[1]) très incertain.

de 57 mm et d'une température de 20°, si l'on pose la densité de la vapeur de benzine $=2{,}77$, celle du liquide$=0{,}88$, par l'équation

$$\frac{x}{120} = \frac{0{,}001293 \times 2{,}77 \times 57}{0{,}88 \times 1{,}07 \times 760}$$

d'où

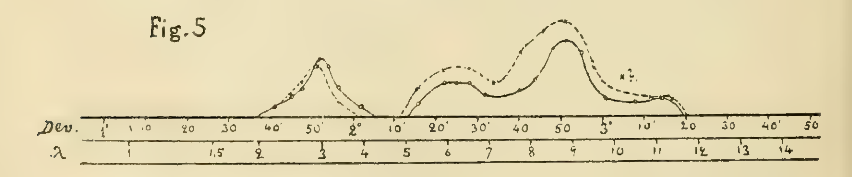
$$x = 0{,}0342 \text{ mm.}$$

La couche de liquide examinée est pourtant beaucoup plus épaisse, c'est-à-dire 0,056 mm[1]). Le Tableau 6 et la courbe à traits de la fig. 5 donnent le résultat.

Tableau 6.

Benzine, liquide (température 20°, épaisseur de la couche 0,056 mm).

Dév.	λ	Abs.	Dév.	λ	Abs.
1° 8′,0 ⋮ 1° 39′,0	1,03 ⋮ 2,05	0	2° 28′,0	6,52	12,3
			2° 34′,0	7,12	8,3
1° 45′,6	2,51	5,5	2° 40′,0	7,72	16,7
1° 48′,0	2,70	9,0	2° 46′,0	8,30	21,7
1° 51′,2	2,95	12,4	2° 52′,0	8,91	25,0
1° 57′,5	3,49	2,5	2° 58′,0	9,51	12,2
2° 4′,0 ⋮ 2° 10′,0	4,12 ⋮ 4,72	0	3° 5′,0	10,19	10,1
			3° 11′,0	10,78	4,8
2° 16′,0	5,32	7,6	3° 17′,0	11,37	5,5
2° 22′,0	5,92	12,0	3° 29′,0	12,55	0



Comme dans le cas précédent, nous trouvons ici que la courbe d'absorption de la vapeur a le même caractère que celle

[1]) Je me suis servi de la même plaque de mica que dans les expériences suivantes avec le sulfure de carbone.

du liquide. A cause de la plus grande épaisseur de la couche de liquide, il est du reste impossible de tirer quelques conclusions définitives quant à la différence ou à la ressemblance de l'absorption dans les deux cas.

Sulfure de carbone (CS_2).

a) *La vapeur.* Le liquide qui a servi à la production de cette vapeur a été acheté à la pharmacie »*Nordstjernan*» de Stockholm, il n'était probablement pas tout à fait pur.

Tableau 7.

Sulfure de carbone, vapeur (pression 200 mm, température 20°, longueurs des tubes 60 et 120 mm).

Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée l = 60 mm.	Dév.	λ	Abs. l = 60 mm.	Abs. l = 120 mm.	Abs. calculée l = 60 mm.
1° 8',0 ⋮ 1° 54',0	1,03 ⋮ 3,18	0	0		2° 34',0	7,12	—	9,7	—
1° 57',5	3,48	2,8	6,3	3,2	2° 40',0	7,72	24,8	25,5	13,7
2° 0',5	3,78	7,0	9,3	4,8	2° 46',0	8,30	33,4	38,8	21,3
2° 3',5	4,07	8,5	12,8	6,6	2° 52',0	8,91	32,5	40,5	22,9
2° 6',5	4,36	10,6	13,7	7,1	2° 58',0	9,51	22,4	28,1	15,2
2° 9',5	4,66	11,7	15,3	8,0	3° 5',0	10,19	—	10,3	—
2° 16',0	5,32	6,2	8,4	4,3	3° 11',0	10,78	—	4,8	—
2° 22',0 ⋮ 2° 28',0	5,92 ⋮ 6,52	0	0		3° 17',0 ⋮ 3° 23',0	11,37 ⋮ 11,96	0	0	

Ce Tableau et la courbe pleine de la fig. 6 montrent que le sulfure de carbone se distingue par deux régions d'absorption bien marquées. La première s'étend de 1° 52' ($\lambda = 3{,}01$) jusqu'à 2° 20' ($\lambda = 5{,}73$), la seconde de 2° 30' ($\lambda = 6{,}72$) jusqu'à 3° 16' ($\lambda = 11{,}28$). Des maxima se trouvent à

$$\text{Dév.} = 2°\ 9',\quad \lambda = 4{,}62,$$

$$» \quad = 2°\ 50',\quad \lambda = 8{,}72.$$

b) *Le liquide.* Pour obtenir autant que possible un liquide de la même qualité que la vapeur, on enferma un peu du liquide

qui avait servi aux recherches sur l'absorption de la vapeur du sulfure de carbone dans un tube de verre recourbé, fermé à un de ses bouts, mais effilé à l'autre. Le liquide fut mis en ébullition et la pointe refondue. Ensuite, un peu de liquide fut distillé à température basse, l'un des bouts qui servait comme vase de condensation fut maintenu à zéro, l'autre à température ambiante. Le liquide étant ainsi condensé de vapeur formée dans les mêmes conditions que dans les recherches précédentes sur l'absorption de la vapeur, on aurait bien le droit de le regarder comme ayant les mêmes qualités chimiques que la vapeur, bien que ni l'un ni l'autre ne fussent absolument purs. On trouve de la même manière qu'auparavant la couche du liquide correspondant à la couche de vapeur examinée, si la densité de la vapeur du sulfure de carbone est $= 2{,}645$ et celle du liquide $= 1{,}2635$ par l'équation

$$\frac{x}{120} = \frac{0{,}001293 \times 2{,}645 \times 200}{1{,}2635 \times 1{,}07 \times 760},$$

d'où

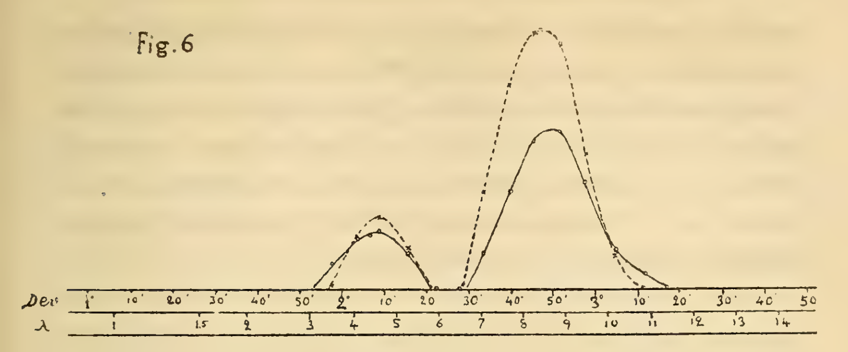
$$x = 0{,}080 \text{ mm.}$$

Les expériences ont été faites avec deux couches de liquide, l'une ayant une épaisseur de 0,056 mm, l'autre de 0,096 mm. Celle-ci est donc un peu trop grande, l'autre d'autant trop mince relativement à la couche de vapeur. Le Tableau suivant et la courbe à traits de la fig. 6 nous donnent le résultat.

Tableau 8.

Sulfure de carbone, liquide (température 20°, épaisseurs des couches 0,056 et 0,096 mm).

Dév.	λ	Abs. l = 0,056.	Abs. l = 0,095.	Abs. calculée l = 0,056.	Dév.	λ	Abs. l = 0,056.	Abs. l = 0,095.	Abs. calculée l = 0,056.
1° 57',5	3,48	—	0		2° 40',0	7,72	48,1	52,3	35,4
2° 3',5	4,07	9,6	13,1	7,9	2° 46',0	8,30	58,1	66,3	47,3
2° 9',5	4,66	16,5	19,6	12,1	2° 52',0	8,91	51,2	63,1	44,4
2° 16',0	5,32	8,5	9,6	5,8	2 58',0	9,51	30,5	35,1	22,5
2° 22',0	5,92	}	}		3° 5',0	10,19	—	9,1	—
⋮	⋮	0	0		3° 11',0	10,78	—	}	—
2° 28',0	6,52	}	}		⋮	⋮		0	
2° 34',0	7,12	—	25,2	—	3° 23',0	11,96	—	}	



Il se présente ici une différence très considérable entre l'absorption de la vapeur et celle du liquide en ce que l'absorption de celui-ci, même pour la couche plus mince, dépasse celle de la vapeur dans la seconde région d'absorption. L'orientation des maxima semble aussi un peu déplacée, le premier éloigné du côté visible du spectre, le second plus rapproché. Toutefois, malgré cette différence évidente, on retrouve ici le même caractère de l'absorption: deux maxima de la même relation de grandeur et occupant à peu près la même place. Et encore plus, si nous examinons les trois dernières colonnes dans le Tableau 7, nous trouvons que l'absorption pour la Dév. = 2° 40′ n'a augmenté que très peu, bien que la couche soit doublée. Cela ne peut s'expliquer que d'une seule manière. L'absorption du sulfure de carbone doit en cet endroit se distinguer par une ou plusieurs bandes d'absorption très minces, mais d'une grande intensité, qui déjà pour une couche très mince absorbent tout à fait la radiation incidente. C'est justement ce que le Tableau 8 nous montre pour le liquide dans la même région spectrale.

Ce que nous avons trouvé ici, au sujet de l'absorption des liquides et de ses vapeurs, confirme la conclusion que j'ai déjà énoncée dans un Mémoire précédent[1]), après avoir examiné l'absorption de l'eau et de sa vapeur, savoir, qu'un liquide et son gaz n'ont pas nécessairement la même absorption quant à la

[1]) Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl., *15*, Afd. 1, N:o 9, 1889; Wied. Ann. *39*, 267, 1890.

quantité. Mais on voit bien que si, au lieu d'examiner l'absorption dans les régions différentes du spectre, on avait examiné l'absorption totale de la radiation d'une source de chaleur déterminée, il aurait été bien possible que certains corps, par exemple l'éther et la benzine, n'eussent pas montré de différence sensible, d'autres au contraire, comme le sulfure de carbone et l'eau, en auraient accusé une très nette. Ainsi s'expliquent les résultats auxquels sont arrivés TYNDALL[1]) et DESAINS[2]) dans leurs recherches de l'éther, du formiate d'éthyle et de l'hydrure d'amyle, savoir qu'un liquide et sa vapeur ont une absorption identique. Tyndall a aussi fondé cette supposition sur le fait que les liquides et les vapeurs se rangent dans la même série relativement à leur pouvoir absorbant.[3]) Mais cela s'explique aussi par le précédent, où nous avons trouvé que le caractère général de l'absorption reste le même dans ces deux états d'agrégation.

S'il semble donc prouvé par ces recherches qu'il existe une différence quantitative dans l'absorption d'un corps en différents états d'agrégation, il n'est pourtant pas aussi aisé d'en conclure qu'il y a aussi une différence qualitative. Pour s'en rendre compte, il faut procéder avec une grande précaution, parce que le petit déplacement que nous avons observé dans certains maxima ne prouve pas suffisamment une telle différence dans l'absorption, car nous avons observé des déplacements d'à peu près la même grandeur pour le même gaz à une longueur de tube différente. Par quelques autres circonstances, il paraît cependant qu'il existe aussi une différence qualitative. L'absorption de l'éther vapeur est la même que celle de l'éther liquide entre $2^\circ\ 5'$ et $2^\circ\ 25'$, dans les autres parties spectrales elle est plus grande, ce qui ne s'explique pas seulement par la supposition d'une plus grande absorption également distribuée partout. En comparant l'absorption du sulfure de carbone liquide (Tab. 8, $l = 0{,}056$) avec celle

---

[1]) Phil. Trans. of the R. S., t. I, p. 291, 1882.

[2]) Comptes rendus *114*, 1086, 1867.

[3]) Contributions to molecular physics in the domain of radiant heat. London 1872.

du sulfure de carbone vapeur (Tab. 7, $l = 120$ mm), on voit que leurs premiers maxima sont à peu près de la même grandeur, tandis que leurs seconds maxima sont très différents. Nous en concluons donc que l'absorption des liquides et de leurs vapeurs peut être différente tant relativement à la qualité qu'à la quantité, bien que son caractère général reste le même.

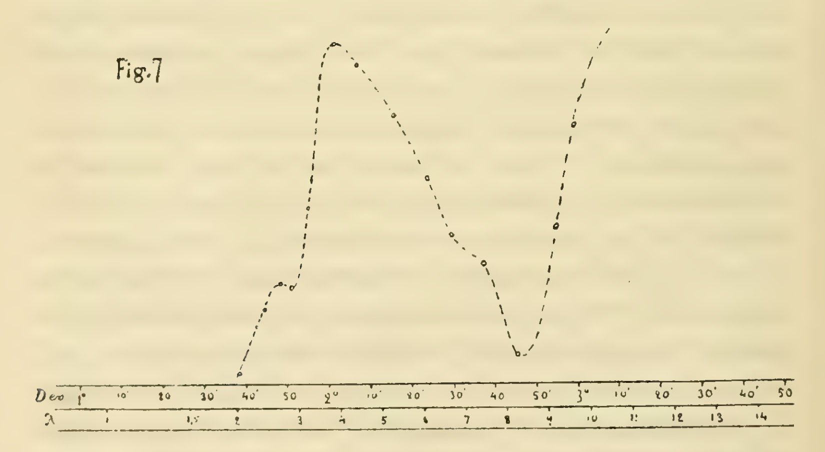
4. **Absorption du carbone** (Diamant).

On voit par ce qui précède que l'absorption dans le spectre infra-rouge des corps différents que nous avons examinés, consiste en une ou plusieurs régions bien déterminées, dans lesquelles nous distinguons un ou plusieurs maxima. Au commencement de mes recherches, certains de ces maxima d'absorption semblaient se retrouver dans les différents composés de carbone, quoique un peu reculés vers un côté ou vers l'autre. C'était le cas de l'oxyde de carbone et de l'acide carbonique, de même qu'avec l'éthylène dont les maxima à 1° 49′ et à 2° 6′ coïncident très bien avec ceux des deux autres corps. Le corps suivant que j'ai examiné était la méthane, mais ici le second maximum avait complètement disparu et le premier était trop déplacé pour qu'on pût regarder ce maximum comme correspondant au premier des corps précédents. L'éther ne possède pas non plus le second de ces maxima et le premier serait reculé jusque vers 1° 57′. La benzine n'a pas non plus le second maximum, et le premier se trouve à 1° 52′. Au sulfure de carbone enfin, il n'y a que le maximum à 2° 9′ qui pût correspondre au second maximum en question. Soit qu'on regarde ces maxima comme analogues ou non, il paraît toutefois que tous ces composés de carbone se distinguent par des maxima dans le voisinage de 1° 50′ et de 2° 8′, bien qu'un de ces maxima manque quelquefois. Les régions d'absorption respectives appartenant à ces maxima sont plus ou moins superposées les unes sur les autres dans les corps différents.[1])

---

[1]) M. TYNDALL a déjà attiré l'attention sur un point de ressemblance entre l'acide carbonique et le sulfure de carbone (Nature, Mai 1883, p. 22). Tous les deux sont très transparents pour les radiations de la plupart des flammes,

Il m'a donc paru d'un intérêt tout particulier d'examiner l'absorption de l'élément commun à toutes ces combinaisons, savoir le carbone. Ainsi j'ai essayé de déterminer l'absorption du diamant. Malheureusement je n'ai pas été en état de poursuivre cette recherche plus loin que jusqu'à 3° 10′ à cause du peu de chaleur qu'ont transmis les deux petits morceaux de diamant dont je disposais. Les surfaces des deux diamants n'étant pas parfaitement planes, je n'ai pas pu calculer la perte de la radiation par réflexion. C'est pourquoi, j'ai admis que la plus petite perte qu'éprouve la radiation en passant par le diamant (perte qui est constante dans certaines régions du spectre) est le résultat de la réflexion seule et je l'ai employée comme terme de correction au calcul des observations de l'absorption. Les deux échantillons, qui du reste ont été d'épaisseur un peu différente ($l = 2{,}38$ mm et $l = 1{,}23$ mm) ont donné des résultats concordants. La fig. 7 ci-jointe nous donne une représentation graphique de l'absorption d'un de ces diamants ($l = 2{,}38$ mm).



mais au contraire presque opaques pour la flamme de l'oxyde de carbone. D'après les recherches récentes de M. JULIUS (Archives Néerlandaises, T. 22), cette flamme émit le spectre d'émission de l'acide carbonique dont les deux maxima correspondent aux maxima d'absorption de ce gaz, ce que confirment mes recherches. Le second maximum de l'acide carbonique correspond ainsi que nous l'avons vu à la première région d'absorption du sulfure de carbone.

Nous avons donc ici une région d'absorption s'étendant depuis 1° 37′ et aussi loin qu'on a pu faire des observations. On y distingue des maxima à

$$\text{Dév.} = 1°\ 47', \quad \lambda = 2{,}62$$
$$\text{»} \quad = 2°\ 4', \quad \lambda = 4{,}12$$

et un minimum très fort à

$$\text{Dév.} = 2°\ 37', \quad \lambda = 7{,}42.$$

Des recherches prochaines et plus étendues décideront peut-être si nous devons regarder ces ressemblances seulement comme fortuites ou si les qualités d'un élément, quant à l'absorption de chaleur, se communiquent à ses combinaisons à un degré modifié.

5. L'absorption d'un gaz est-elle une fonction de la tension?

C'est dans le but d'examiner plus à fond quelle était la relation entre l'absorption et la tension du gaz que j'ai disposé les deux tubes d'absorption, dont l'un était juste deux fois aussi long que l'autre. Après avoir rempli les deux tubes de gaz ou de vapeur de la même tension, on la déterminait, ainsi que je l'ai déjà dit (v. p. 332). Puis on fermait le robinet entre les deux tubes et le tube le plus long était évacué jusqu'à ce que la tension du gaz qui y était enfermé n'était que la moitié de l'autre. L'absorption du gaz dans les deux tubes doit donc évidemment être la même, si elle est indépendante de la tension et ne varie qu'avec la quantité du gaz que passe le rayon. J'ai fait des recherches avec l'acide carbonique, l'éthylène, le gaz d'éclairage et avec la vapeur de l'éther, mais je dois regarder les résultats comme négatifs ou du moins comme incertains. La différence que je trouvais entre les deux tubes n'a en général pas été tellement grande, qu'elle ne puisse être attribuée à des erreurs d'observation. A peu d'exceptions près, ces différences ont pourtant présenté une absorption plus forte pour le tube plus court, c'est-à-dire pour le gaz plus dense. C'est du reste

ce qu'on pouvait attendre de ce qu'on vient d'observer pour les liquides et de ce qu'ont trouvé M.M. Janssen[1]) et Ebert[2]) dans la partie visible du spectre.

Il me semble pourtant que si la pression ne varie que d'une atmosphère, on pourrait admettre l'absorption comme indépendante de la pression entre les limites des erreurs d'observation de cette recherche.

J'espère avoir l'occasion de renouveler cette recherche avec des tubes de longueur plus différente, où l'on pourrait expérimenter avec de plus grandes variations de pression pour obtenir des résultats plus décisifs.

---

[1]) C. R., p. 1352, 1886 et p. 325, 1887.

[2]) Sitzber. physikal. med. Soc. Erlangen, p. 6, 8 juli 1889.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 7.
Stockholm.

Några formler hos M:r Bierens de Haan.

Af C. F. Lindman.

[Meddeladt den 17 September 1890.]

I.

I sin Exposé, partie 2ième chap. 2 framställer M:r Bierens de Haan en mängd formler, genom hvilka vissa definita integraler kunna reduceras till andra, som äro lättare att erhålla. Vid härledningen af några bland dessa formler använder han fyra serier, hvilkas summor angifvas, men icke sättet, hvarpå de erhållits. Icke heller har detta, så vidt jag kan erinra mig[1]), skett annorstädes, hvarför det torde tillåtas mig att här summera dem.

I Considérations préliminaires (Exposé, p. 183—190) finnas under N:is 39 och 69 resp. formlerna

$$\operatorname{Cot}(x+pi) = \frac{2\operatorname{Sin} 2x}{e^{2p}+e^{-2p}-\operatorname{Cos} 2x} - \frac{i(e^{2p}-e^{-2p})}{e^{2p}+e^{-2p}-\operatorname{Cos} 2x},$$

$$\operatorname{Cot} z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{(\nu\pi)^2 - z^2}.$$

Om man i den senare sönderdelar bråket under summationstecknet och insätter $x+pi$ i stället för z, så erhålles

$$\operatorname{Cot}(x+pi) = \frac{1}{x+pi} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1}{\nu\pi - x - pi} - \frac{1}{\nu\pi + x + pi}\right]$$

[1]) På sid. 102, not 16, hänvisas till Grunerts Archiv, B. 10, sid. 441, men jag saknar numera tillgång till denna bok.

samt, om det första bråket förlänges med $x - pi$, det andra med $\nu\pi - x + pi$, det tredje med $\nu\pi + x - pi$,

$$\operatorname{Cot}(x+pi) = \frac{x - pi}{x^2 + p^2} - \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{\nu\pi - x + pi}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} - \frac{\nu\pi + x - pi}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right].$$

När de reela och imaginära delarne åtskiljas, befinnes

$$\operatorname{Cot}(x+pi) = \frac{x}{p^2 + x^2} - \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{\nu\pi - x}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} - \frac{\nu\pi + x}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right]$$

$$- \frac{pi}{p^2 + x^2} - pi \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} + \frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right].$$

Jemföres detta med det första uttrycket på $\operatorname{Cot}(x+pi)$, så finner man

$$s_1 = \frac{x}{p^2 + x^2} - \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{\nu\pi - x}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} - \frac{\nu\pi + x}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right] = \frac{2 \operatorname{Sin} 2x}{e^{2p} + e^{-2p} - 2\operatorname{Cos} 2x},$$

$$s_2 = \frac{p}{p^2 + x^2} + p \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} + \frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right] = \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{e^{2p} + e^{-2p} - 2\operatorname{Cos} 2x}.$$

Uttrycken $\frac{1}{2}(e^p + e^{-p})$ och $\frac{1}{2}(e^p - e^{-p})$ äro de s. k. hyperboliska Cosinus och Sinus. Om man sätter dem $= g$ och h resp., så har man $e^{2p} + e^{-2p} = 2(g^2 + h^2)$, $e^{2p} - e^{-2p} = 4gh$, $g^2 - h^2 = 1$. Då dessa införas, kan man skrifva

$$s_1 = \frac{\operatorname{Sin} 2x}{g^2 + h^2 - \operatorname{Cos} 2x}, \quad s_2 = \frac{2gh}{g^2 + h^2 - \operatorname{Cos} 2x},$$

hvarest man åt nämnaren kan gifva hvilkendera man vill af formerna $2(g^2 - \operatorname{Cos}^2 x)$, $2(h^2 + \operatorname{Sin}^2 x)$, $2(g^2 \operatorname{Sin}^2 x + h^2 \operatorname{Cos}^2 x)$.

Genom formeln (33) på anförda stället fås

$$\operatorname{Cosec}(x+pi) = \frac{2\left[(e^p + e^{-p})\operatorname{Sin} x - i(e^p - e^{-p})\operatorname{Cos} x\right]}{e^{2p} + e^{-2p} - 2\operatorname{Cos} 2x}$$

eller om g och h införas

$$\operatorname{Cosec}(x+pi) = \frac{2(g \operatorname{Sin} x - ih \operatorname{Cos} x)}{g^2 + h^2 - \operatorname{Cos} 2x}.$$

Af formeln (71) dersammastädes fås

$$\text{Cosec}\, z = \frac{1}{z} - 2z \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu\pi)^2 - z^2}.$$

Då dessa båda formler behandlas på samma sätt som de båda första, finner man

$$s_3 = \frac{x}{p^2 + x^2} - \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\nu\pi - x}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} - \frac{\nu\pi + x}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right]$$

$$= \frac{g\, \text{Sin}\, x}{g^2 - \text{Cos}^2 x},$$

$$s_4 = \frac{p}{p^2 + x^2} + p \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi - x}^2} + \frac{1}{p^2 + \overline{\nu\pi + x}^2}\right]$$

$$= \frac{h\, \text{Cos}\, x}{h^2 + \text{Sin}^2 x}.$$

Dessa fyra formler användas vid härledningen af formlerna (44) . . . . . (56) på sidorna 102—105.

II.

Å sidorna 419 och 420 af sin Exposé ger M:r B. D. H. tillämpningar af sina formler (54) och (55) på sid. 105. Dessa äro:

$$\int_0^\infty \text{Arc}\, tg \frac{p}{x} \cdot \frac{d}{dx} \{F(\text{Sin}^2 x)\}\, dx = -\frac{\pi}{2} F(o) + gh \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\text{Sin}^2 x)}{g^2 - \text{Cos}^2 x} dx \quad \text{(a)}$$

$$\int_0^\infty \text{Arc}\, tg \frac{p}{x} \cdot \frac{d}{dx} \{\text{Cos}\, x\, F(\text{Sin}^2 x)\}\, dx = -\frac{\pi}{2} F(o)$$

$$+ h \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\text{Sin}^2 x) \cdot \frac{\text{Cos}^2 x\, dx}{g^2 - \text{Cos}^2 x}, \quad \text{(b)}$$

sedan ett tryckfel (π i st. för $\frac{\pi}{2}$) i den förra blifvit rättadt.

I dessa gör han $F(\text{Sin}^2 x) = \text{Cos}^{2a} x$ och får då

$$2a\int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}\cdot \text{Cos}^{\,2a-1}x\ \text{Sin}\,x\,dx = \frac{\pi}{2} - gh\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{\,2a}x}{g^2 - \text{Cos}^{\,2}x}\,dx,$$

$$(2a+1)\int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}\cdot \text{Cos}^{\,2a}x\ \text{Sin}\,x\,dx = \frac{\pi}{2} - h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{\,2a+2}x}{g^2 - \text{Cos}^{\,2}x}\,dx,$$

hvarest han på högra sidan oriktigtvis fått motsatta tecken mot förestående. Nu återstår att finna integralen

$$\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{\,2c}x}{g^2 - \text{Cos}^{\,2}x}\,dx.$$

För den skull sätter han $\text{Cos}\,x = y$ och utvecklar i serie, men detta kan man mycket väl göra genast, efter som man har $\frac{\text{Cos}\,x}{g} < 1$. Man finner då

$$\text{I} = \frac{1}{g^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1}{g^{2\nu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{Cos}^{\,2(c+\nu)}x\,dx,$$

men enligt T. 41 N:o 1 (Nouv. Tab.) är

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{Cos}^{\,2(c+\nu)}x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1^{\,c+\nu/2}}{2^{\,c+\nu/2}}$$

och man finner följaktligen

$$\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{\,2c}x}{g^2 - \text{Cos}^{\,2}x}\,dx = \frac{\pi}{2g^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1^{\,c+\nu/2}}{2^{\,c+\nu/2}}\cdot\frac{1}{g^{2\nu}},$$

hvaraf synes, att form. (1082) är falsk, hvilket ock är händelsen med (1083). Om man nu gör $c = a$ och $c = a + 1$ samt insätter i förestående integraler resp., så finner man

$$\int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}\cdot \text{Cos}^{\,2a-1}x\ \text{Sin}\,x\,dx = \frac{\pi}{4a}\left[1 - \frac{h}{g}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1^{\,a+\nu/2}}{2^{\,a+\nu/2}}\cdot\frac{1}{g^{2\nu}}\right]$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \operatorname{Cos}^{2a} \operatorname{Sin} x \, dx = \frac{\pi}{2\,(2a+1)} \left[1 - \frac{h}{g^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1^{a+1+\nu/2}}{2^{a+1+\nu/2}} \cdot \frac{1}{g^{2\nu}} \right]$$

eller om värdena på g och h införas

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \operatorname{Cos}^{2a-1} x \operatorname{Sin} x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4a} \left[1 - \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1^{a+\nu/2}}{2^{a+\nu/2}} \cdot \left(\frac{2}{e^p + e^{-p}} \right)^{2\nu} \right],$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \operatorname{Cos}^{2a} x \operatorname{Sin} x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2\,(2a+1)} \left[1 - \frac{2\,(e^p - e^{-p})}{(e^p + e^{-p})^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1^{a+1+\nu/2}}{2^{a+1+\nu/2}} \cdot \left(\frac{2}{e^p + e^{-p}} \right)^{2\nu} \right].$$

Dessa formler hafva erhållits i stället för (1084) och (1085), som äro oriktiga i flera afseenden.

De nu erhållna värdena på förestående integraler hafva den olägenheten att vara uttryckta genom oändliga serier, som för små värden på p endast långsamt konvergera. Genom att behandla dem på annat sätt kunde måhända beqvämare värden erhållas. Om man gör

$$I_1 = \int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \operatorname{Cos}^{2a-1} x \operatorname{Sin} x \, dx$$

och integrerar delvis, så befinnes

$$I_1 = \Big/_0^\infty - \frac{\operatorname{Cos}^{2a} x}{2a} \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} - \frac{p}{2a} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}^{2a} x}{p^2 + x^2} \, dx.$$

Nu har man

$$\operatorname{Cos}^{2a} x = \frac{1}{2^{2a-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=a-1} (2a)_\nu \operatorname{Cos} 2\,(a - \nu)\, x + \frac{(2a)_a}{2^{2a}}$$

samt till följd deraf

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos}^{2a}x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{(2a)_a}{2^{2a}}\int_0^\infty \frac{dx}{p^2+x^2} + \frac{1}{2^{2a-1}} \mathop{\text{S}}_{\nu=0}^{\nu=a-1} (2a)_\nu \int_0^\infty \frac{\text{Cos}\,2(a-\nu)x}{p^2+x^2}\,dx;$$

men enligt kända formler är

$$\int_0^\infty \frac{dx}{p^2+x^2} = \frac{\pi}{2p}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}\,2(a-\nu)\,x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2p}\,e^{-2p(a-\nu)}$$

och man finner genom dessas införande

$$\text{I}_1 = \int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}\cdot \text{Cos}^{2a-1}x\,\text{Sin}\,x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4a}\left[1 - \frac{(2a)_a}{2^{2a}} - \frac{1}{2^{2a-1}} \mathop{\text{S}}_{\nu=0}^{\nu=a-1} (2a)_\nu\, e^{-2p(a-\nu)}\right]$$

Om man sätter

$$\text{I}_2 = \int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}\cdot \text{Cos}^{2a}x\,\text{Sin}\,x\,dx$$

och går till väga såsom nyss förut, men anlitar formeln

$$\text{Cos}^{2a+1}x = \frac{1}{2^{2a}} \mathop{\text{S}}_{\nu=0}^{\nu=a} (2a+1)_\nu\, \text{Cos}\,(2a+1-2\nu)\,x,$$

så finner man

$$\text{I}_2 = \int_0^\infty \text{Arc}\,tg\frac{p}{x}.\quad \text{Cos}^{2a}x\,\text{Sin}\,x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\,(2a+1)}\left[1 - \frac{1}{2^{2a}} \mathop{\text{S}}_{\nu=0}^{\nu=a} (2a+1)_\nu\, e^{-p(2a+1-2\nu)}\right].$$

Dessa två formler kunna ersätta de föregående, som innehålla oändliga serier.

III.

På sid. 420 säger han sig skola i dessa samma formler sätta $F(\text{Sin}^2 x) = l\,(1 + q^2\,tg^2\,x)$. Då detta sker i (54) d. v. s. i formeln (a) härofvan, finner man också

$$\int_0^\infty \text{Arc}\, tg\frac{p}{x}\cdot\frac{tg\, x\, dx}{\text{Cos}^2 x + q^2\,\text{Sin}^2 x} = \frac{\pi}{2q^2}\, l\left(1 + q\cdot\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right)$$

eller hans formel (1086), hvilken alltså är riktig.

Om man deremot i (b) sätter $F(\text{Sin}^2 x) = l\,(1 + q^2\, tg^2 x)$, så är

$$\frac{d}{dx}\left\{\text{Cos}\, x\, F(\text{Sin}^2 x)\right\} = \left[\frac{2q^2}{\text{Cos}^2 x + q^2\,\text{Sin}^2 x} - l\,(1 + q^2\, tg^2 x)\right]\text{Sin}\, x,$$

hvarefter man finner

$$\int_0^\infty \text{Arc}\, tg\frac{p}{x}\left[\frac{2q^2}{\text{Cos}^2 x + q^2\,\text{Sin}^2 x} - l\,(1 + q^2\, tg^2 x)\right]\text{Sin}\, x\, dx$$

$$= h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^2 x\, l\,(1 + q^2\, tg^2 x)}{g^2 - \text{Cos}^2 x}\, dx$$

$$= h\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,(1 + q^2\, tg^2 x)\, dx + g^2\int_0^\infty \frac{l\,(1 + q^2\, tg^2 x)}{g^2\,\text{Sin}^2 x + h^2\,\text{Cos}^2 x}\, dx\right].$$

Om man gör $tg x = y$, så finner man medelst T. 136 N:o 12 (Nouv. Tab.)

$$\int_2^{\frac{\pi}{2}} l\,(1 + q^2\, tg^2 x)\, dx = \pi\, l\,(1 + q)$$

och genom form. (1074) i Exposé får man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\,(1 + q^2\, tg^2 x)}{g^2\,\text{Sin}^2 x + h^2\,\text{Cos}^2 x}\, dx = \frac{\pi}{gh}\, l\left(1 + q\cdot\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right).$$

Då dessa värden införas, befinnes

$$\int_0^\infty \text{Arc}\, tg\frac{p}{x}\cdot\left\{\frac{2q^2}{\text{Cos}^2 x + q^2\,\text{Sin}^2 x} - l\,(1 + q^2\, tg^2 x)\right\}\text{Sin}\, x\, dx$$

$$= \pi\left[g\, l\left(1 + q\cdot\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right) - h\, l\,(1 + q)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[(e^p + e^{-p})\, l\left(1 + q\cdot\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right) - (e^p - e^{-p})\, l(1 + q)\right].$$

Detta är likväl icke form. (1087), hvilken alltså icke uppkommit genom insättning i (b). Vi må derför undersöka, om denna erhållits genom insättning i form. (56) d. v. s. i

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{F(\operatorname{Sin}^2 x)}{\operatorname{Cos} x}\right\} dx = -\frac{\pi}{2} F(0)$$

$$+ h \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\operatorname{Sin}^2 x) \cdot \frac{dx}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x}.$$

Man finner först

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{F(\operatorname{Sin}^2 x)}{\operatorname{Cos} x}\right\} = \left[l(1 + q^2 tg^2 x) + \frac{2q^2}{\operatorname{Cos}^2 x + q^2 \operatorname{Sin}^2 x}\right] \frac{tg\, x}{\operatorname{Cos} x}$$

samt sedermera

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \left\{l(1 + q^2 tg^2 x) + \frac{2q^2}{\operatorname{Cos}^2 x + q^2 \operatorname{Sin}^2 x}\right\} \frac{tg\, x}{\operatorname{Cos} x} \cdot dx =$$

$$= h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1 + q^2 tg^2 x)}{g^2 \operatorname{Sin}^2 x + h^2 \operatorname{Cos}^2 x} \cdot dx = \frac{\pi}{g} l\left(1 + q \cdot \frac{h}{g}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{e^p + e^{-p}} l\left(1 + q \cdot \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right).$$

Värdet öfverensstämmer således med det, som M:r B. d. H. funnit, men derivatan saknar faktorn $\operatorname{Cos}^2 x$, som finnes i boken framför $l(1 + q^2 tg^2 x)$ och hvilken synes böra vara borta.

IV.

Såsom en ytterligare tillämpning af formeln (a) må vi antaga $F(\operatorname{Sin}^2 x) = l(1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x)$. Då är

$$\frac{d}{dx}\left\{F(\operatorname{Sin}^2 x)\right\} = \frac{2q^2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x}$$

och man får

$$2q^2 \int_0^\infty \operatorname{Arc} tg \frac{p}{x} \cdot \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x} dx = gh \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x)}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x} dx.$$

För att finna den sista integralen låtom oss skrifva

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l(1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x)}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x} dx$$

samt differentiera den i afseende på q. Då fås

$$\frac{dI_1}{dq} = 2q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin}^2 x \, dx}{(1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x)(h^2 + \operatorname{Sin}^2 x)}$$

eller, emedan man har

$$\frac{\operatorname{Sin}^2 x}{(1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x)(h^2 + \operatorname{Sin}^2 x)} = \frac{1}{1 - h^2 q^2}\left[\frac{1}{1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x} - \frac{h^2}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x}\right],$$

$$\frac{dI_1}{dq} = \frac{2q}{1 - h^2 q^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x} - h^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x}\right].$$

Om man i dessa inför $\frac{x}{2}$ i stället för x, så fås

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + q^2 \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + q^2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{h^2 + \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{\pi}{2h\sqrt{1 + h^2}}$$

samt genom deras insättning

$$\frac{dI_1}{dq} = \frac{\pi q}{1 - h^2 q^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + q^2}} - \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\right].$$

Emedan I_1 är $= 0$ för $q = 0$, finner man genom integration mellan 0 och q

$$I_1 = \pi\left[\int_0^q \frac{q\,dq}{(1 - h^2 q^2)\sqrt{1 + q^2}} - \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}} \int_0^q \frac{q\,dq}{1 - h^2 q^2}\right].$$

Genom vanliga substitutioner finner man

$$\int_0^q \frac{q\,dq}{(1 - h^2 q^2)\sqrt{1 + q^2}} = \frac{1}{2h\sqrt{1 + h^2}}\, l\, \frac{\sqrt{1 + h^2} + h\sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{1 + h^2} - h\sqrt{1 + q^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + h^2} - h}{\sqrt{1 + h^2} + h}$$

$$= \frac{1}{2h\sqrt{1+h^2}}\, l\, \frac{(\sqrt{1+h^2}+h\sqrt{1+q^2})^2(\sqrt{1+h^2}-h)^2}{1-h^2q^2}$$

$$\int_0^q \frac{q\,dq}{1-h^2q^2} = -\frac{1}{2h^2}\, l\,(1-h^2q^2)$$

och då dessa införas

$$I_1 = \frac{\pi}{h\sqrt{1+h^2}}\, l\,(\sqrt{1+h^2}+h\sqrt{1+q^2})(\sqrt{1+h^2}-h).$$

Man finner sedan

$$2q^2\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg\frac{p}{x}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x\, dx}{1+q^2 \operatorname{Sin}^2 x} =$$

$$= \frac{\pi g}{\sqrt{1+h^2}}\quad (\sqrt{1+h^2}+h\sqrt{1+q^2})(\sqrt{1+h^2}-h),$$

men då man betänker värdena på g och h samt att man till följd af dem har $1+h^2=g^2$, $g-h=e^{-p}$, så befinnes slutligen

$$\int_0^\infty \operatorname{Arc} tg\frac{p}{x}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x\, dx}{1+q^2 \operatorname{Sin}^2 x} =$$

$$= \frac{\pi}{2q^2}\, l\,[\tfrac{1}{2}(1+e^{-2p}+(1-e^{-2p})\sqrt{1+q^2})].$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

182. Om fenyl- och p-tolyl-o-benzylendiamin.

Af H. G. SÖDERBAUM och O. WIDMAN.

[Meddeladt den 17 Sept. 1890 genom P. T. CLEVE.]

För några år sedan utförde E. LELLMANN & C. STICKEL[1]) en undersökning på o-nitrobenzylanilin och o-nitrobenzyl-p-toluidin. Genom införande af benzoyl- (resp. acetyl-) grupper och därpå följande reduktion med tenn och saltsyra uppgifva de sig härvid hafva erhållit kondenserade derivat af fenmiazinserien enligt följande reaktionsformler:

$$1)\quad C_6H_4\left<\begin{matrix}NO_2\\ CH_2\,.\,N\left<\begin{matrix}CO\,.\,C_6H_5\\ C_6H_5\end{matrix}\right.\end{matrix}\right. + 6H = C_6H_4\left<\begin{matrix}N = C\,.\,C_6H_5\\ |\\ CH_2 - N\,.\,C_6H_5\end{matrix}\right. + 3H_2O$$

$$2)\quad C_6H_4\left<\begin{matrix}NO_2\\ CH_2\,.\,N\left<\begin{matrix}CO\;CH_3\\ C_7H_7\end{matrix}\right.\end{matrix}\right. + 6H = C_6H_4\left<\begin{matrix}N = C\,.\,CH_3\\ |\\ CH_2 - N\,.\,C_7H_7\end{matrix}\right. + 3H_2O.$$

Dessa båda föreningar, hvilka af LELLMANN & STICKEL blifvit benämnda fenylbenzylenbenzenylamidin och p-tolylbenzylenetenylamidin, saknade på grund af sitt bildningssätt ingalunda ett visst teoretiskt intresse. De måste nemligen anses hafva uppkommit genom spontan vattenafspaltning ur o-amidobenzylbenzoylanilin och o-amidobenzylacettoluidin. Som bekant har GABRIEL[2]) framstält modersubstansen till dessa baser, o-amidobenzylamin:

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}NH_2 & 1\\ CH_2\,.\,NH_2 & 2\end{matrix}\right.$$

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIX 1604 och »Ueber Nitrobenzylchloride und Benzylenamidine» von C. STICKEL Inaug. Diss. Tübingen 1886.

[2]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2230.

acetylerat densamma och på flere sätt sökt att åvägabringa en inre anhydridbildning, sådan som enligt LELLMANNS & STICKELS uppgift så ytterst lätt inträder vid fenyl- och p-tolylderivaten. Han lyckades härvid dock icke erhålla något positivt resultat. Närvaron af fenyl- (resp. p-tolyl-) gruppen skulle således i detta fall vara den väsentliga anledningen till bildning af den 6-lediga kväfvekärnan — ett faktum, som vore i högsta grad beaktansvärdt för frågan om atomernas lagring i rummet, då såsom A. v. BAEYER förut påpekat, studiet af de ringformiga atomkomplexerna måste för denna frågas lösning vara af genomgripande vigt.

Med anledning af LELLMANNS & STICKELS iakttagelse och i samband med våra undersökningar om »derivat af ortoamidobenzylalkohol» hafva vi redan för $1^1/_2$ år sedan framstält de båda baserna

o-amidobenzylanilin $C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2 . NH . C_6H_5}$ och

o-amidobenzyl-p-toluidin $C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2 . NH . C_7H_7}$

och behandlat dessa med salpetersyrlighet i hopp om att sålunda framkomma till fentriazinderivat enl. t. ex. följande reaktionsformel:

$$C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2 . NH . C_6H_5} + HONO = C_6H_4\langle{}^{N \;=\; N}_{CH_2 - N . C_6H_5} + 2H_2O$$

Till vår öfverraskning funno vi emellertid, att någon kondensation härvid icke eger rum, men ännu mera öfverraskade blefvo vi af att finna, att den af oss framstälda amidobenzyl-p-toluidinen hade alldeles samma egenskaper, som de nämnda forskarnes kondenserade bas »p-tolylbenzylenetenylamidin» så när som på smältpunkten, hvilken vi funno ligga vid 80,5°, då LELLMANN & STICKEL uppgifva sin förening smälta vid 79°. Detta gaf oss anledning att misstänka riktigheten af LELLMANNS & STICKELS iakttagelser, så mycket mer, som vi funno, att den i fråga varande basen lätt ger ett väl kristalliserande, vid 186° smältande diacetylderivat, och vi hafva därför ansett oss böra

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889 N:o 7 p. 473 och N:o 10 p. 599.

underkasta den citerade undersökningen en genomgående granskning. Såsom vi i det följande skola visa, har denna gifvit vid handen, att någon kondensation i sjelfva verket icke inträder under de angifna förhållandena, att öfverhufvudtaget benzoyl- eller acetylderivaten af amidobenzylanilin och amidobenzyltoluidin visa lika liten benägenhet för kondensation som GABRIELS acetamidobenzylamin och att LELLMANNS & STICKELS »fenylbenzylenbenzylamidin» icke är något annat än amidobenzylbenzoylanilid:

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}NH_2 \\ CH_2 . N\left\langle\begin{array}{l}CO . C_6H_5 \\ C_6H_5\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}1 \\ 2\end{array}$$

och deras »p-tolylbenzylenetenylamidin» intet annat än amidobenzyl-p-toluidin:

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}NH_2 \\ CH_2 . NH . C_7H_7\end{array}\right.$$

Emellertid har, sedan vår undersökning i hufvudsak redan var färdig, en uppsats blifvit publicerad af C. PAAL och M. BUSCH[1]), hvilken visar, att under vissa f. ö. ganska liknande förhållanden man verkligen kan erhålla föreningar af samma typ, dock icke samma föreningar, som LELLMANN och STICKEL trott sig redan hafva framstält. De förra forskarne erhöllo nemligen vid inverkan af o-nitrobenzylklorid på natriumföreningar af formylerade aromatiska baser derivat, hvilka vid reduktion glatt öfvergingo i baser af den allmänna typen:

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}N = CH \\ \quad\quad\;\, | \\ CH_2 - N . R\end{array}\right.$$

Analoga försök, som skulle leda till kroppar af typen

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}N = CR \\ \quad\quad\;\, | \\ CH_2 - NR\end{array}\right.$$

slogo däremot fel. PAAL & BUSCH anföra emellertid såsom representanter för denna typ just de af LELLMANN och STICKEL beskrifna baserna. Sådana äro således i sjelfva verket ännu icke framstälda.

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 2683.

Utgångsmaterialet för undersökningen: *o-nitrobenzylanilin* och *o-nitrobenzyl-p-toluidin* hafva vi framstält ungefär på samma sätt som LELLMANN & STICKEL. Dock hafva vi alltid användt 4 mol. bas i st. för 2, hvilket har den fördelen, att intet dibenzylaminderivat bildas. Egenskaperna hos de af oss framstälda preparaten öfverensstämde med de af LELLMANN & STICKEL angifna.

Då vi först och därför något utförligare studerat tolylderivaten, anse vi det lämpligast att äfven i beskrifningen af försöken låta dessa gå före fenylföreningarne.

o-Amidobenzyl-p-toluidin.

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH_2\\CH_2 . NH . C_6H_4 . CH_3\end{matrix}\right.$$

1 del o-nitrobenzyl-p-toluidin löstes i isättika och försattes i små portioner med 2 delar zinkgrått så långsamt, att temperaturen icke steg öfver 30°. Lösningen utspäddes för öfrigt gång på gång med vatten. Då all zink införts, hade den förut gula lösningen blifvit affärgad. Den försattes därpå med koncentrerad natronlut så, att större delen af ättiksyran neutraliserades. Härvid utföll basen färglös och i kristalliniskt tillstånd. Den kristalliserades därpå först ur en blandning af benzol och petroleumeter och därpå ur alkohol.

Föreningen är lättlöslig i benzol, kloroform och alkohol, så godt som olöslig i gasolja. I rent tillstånd kristalliserar den väl ur alkohol i tunna fyrsidiga blad eller taflor, ur en blandning af benzol och gasolja i snedt afskurna platta nålar och smälter vid 80,5°.

0,1567 gr. gaf 0,1115 gr. H_2O och 0,4568 gr. CO_2.

0,2124 gr. gaf vid 750 mm. och 18° 24,8 cm³ torr kväfgas.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{14}	168	79,24	79,45
H_{16}	16	7,55	7,90
N_2	28	13,21	13,56
	212	100,00	

Diacetamidobenzyl-p-toluid.

$$C_6H_4 \begin{cases} NH \, . \, CO\,CH_3 \\ CH_2 \, . \, N \begin{cases} CO\,CH_3 \\ C_6H_4 \, . \, CH_3 \end{cases} \end{cases}$$

Då förestående bas öfvergöts med ättiksyreanhydrid, löstes den genast, därefter inträdde stark värmeutveckling och straxt därpå stelnade hela massan. Emellertid tillsattes mer ättiksyreanhydrid i stort öfverskott, och lösningen kokades. Vid afsvalning utkristalliserar kroppen lätt och smälter redan nu vid 185—186°, hvilken smältpunkt den behåller, om den efter ättiksyreanhydridens förjagande kristalliseras ur alkohol. I detta lösningsmedel är föreningen svårlöslig äfven vid kokning, så ock i eter. Den kristalliserar i vackra, färglösa, snedt afskurna taflor.

Analys:

I 0,1861 gr. gaf 0,1179 gr. H_2O och 0,493 gr. CO_2.

II 0,1918 gr. gaf 0,12 gr. H_2O och 0,5096 gr. CO_2.

III 0,1917 gr. gaf vid 746 mm. och 16° 15,5 cm³ torr kväfgas.

	Beräknadt:		Funnet: I	II	III
C_{18}	216	72.97	72,24	72,46	—
H_{20}	20	6,76	7,04	6.93	—
N_2	28	9,46	—	—	9,40
O_2	32	10,81	—	—	—
	296	100,00.			

Då den fria basen behandlades med blott 1 molekyl ättiksyreanhydrid i afsigt att erhålla ett monoacetylderivat (se nedan), bildades samma diacetylderivat och en del bas förblef oangripen.

Redan det faktum, att o-amidobenzyltoluidin vid kokning med ättiksyreanhydrid ger ett diacetylderivat och icke en kondenserad bas, jämte den af oss gjorda iakttagelsen, att denna diacetylförening icke ens vid kokning med saltsyra öfvergår i en sådan förening, gör det i högsta grad osannolikt, att LELLMANN och STICKEL verkligen haft under händerna en förening af den af dem angifna sammansättning. Vi hafva emellertid icke låtit

oss nöja härmed, utan sökt att, så långt det varit oss möjligt eftergöra deras försök.

Vi hafva således framstält *acetylderivatet* af *o-nitrobenzyltoluidin* och kunna bekräfta de för denna kropp angifna egenskaperna. Vid framställningen är det dock alldeles onödigt, att upphetta blandningen af nitroförening och ättiksyreanhydrid i rör vid 130°, såsom LELLMANN & STICKEL föreskrifva, utan det är fullt tillräckligt att en stund upphetta blandningen på vattenbad eller för fri eld.

Det är nu genom reduktion af denna förening, som de nämnda forskarne erhållit sin kondenserade bas. Såsom reduktionsmedel hafva de användt tenn och saltsyra i isättikelösning. Vi hafva flere gånger upprepat detta försök men alltjämt erhållit en ganska oren produkt i ringa utbyte. Den var mycket svår att bringa i fast form och erhölls aldrig i tillräckliga kvantiteter för en noggrannare undersökning. Ungefär detsamma synes för öfrigt hafva händt de nämnda forskarne att döma af den omständigheten, att de icke framställt några salter eller andra derivat af sin bas och för analys blott haft 0,1239 gr. till sitt förfogande[1]). Detta ringa analysmaterial förklarar ock, hvarför de erhållit de analytiska data, som fört dem vilse vid tolkningen af kroppens sammansättning.

I sjelfva verket är kokning med tenn och saltsyra i detta fall ett särdeles olämpligt reduktionsförfarande. Medlets inverkan är nämligen af tvåfaldig art. Dels verkar det reducerande på nitrogruppen, dels saponifierande på acetamidogruppen. Därför var ock den kropp, som LELLMANN & STICKEL erhöllo, intet annat än möjligen något oren o-amidobenzyltoluidin. Väljer man nemligen ett lämpligt reduktionsmedel och utför reaktionen med mycken försigtighet, kan man så godt som glatt erhålla en monoacetylförening, som sedan vid kokning med saltsyra öfvergår i ortoamidobenzyltoluid.

---

[1]) Se STICKELS Dissertation.

o-Amidobenzylacet-p-toluid.

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}NH_2\\CH_2\,.\,N\left\langle\begin{array}{l}CO\,CH_3\\C_6H_4\,.\,CH_3\end{array}\right.\end{array}\right.\quad\begin{array}{l}1\\2\end{array}$$

3 gr. omsorgsfullt renad nitrobenzylacet-p-toluid löstes i 20 cm³ alkohol och försattes med 30 cm³ vanlig saltsyra. Lösningen afkyldes väl och 8 gr. zinkgrått infördes i små portioner och så långsamt, att temperaturen aldrig steg öfver 15 à 20°. Efter 2 timmar filtrerades lösningen och det fullkomligt färglösa filtratet öfvermättades med natronlut och utskakades upprepade gånger med kloroform. Efter torkning med klorkalcium afdestillerades kloroformen, och därvid erhölls såsom återstod en svagt gul, i köld trögflytande olja, hvilken efter 12 timmar hade stelnat till en kristallinisk massa. Denna produkt, som vägde 2,4 gr., renades nu genom omkristallisationer ur alkohol, hvarvid den kristalliserar utomordentligt väl i färglösa, mångytiga, romboederliknande kristaller, hvilka smälta konstant vid 99°. Föreningen är synnerligen lättlöslig i kall benzol, likaså i varm alkohol, mindre lätt i gasolja.

För att erhålla föreningen i kristalliseradt tillstånd synes det vara af största vigt att vid reduktionen använda fullt ren, flere gånger omkristalliserad nitroförening.

Analys:

0,1733 gr. gaf 0,114 gr. H_2O och 0,4799 gr. CO_2

0,1822 gr. gaf vid 764 mm. och 14° 16,8 cm³ torr kväfgas.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{16}	192	75,59	75,52
H_{18}	18	7,09	7,27
N_2	28	11,02	11,06
O	16	6,30	—
	254	100,00	

Saponifikation med klorvätesyra. 1 gr. af denna acetylförening digererades med ungefär sin 10-dubbla mängd koncentrerad saltsyra 1 timme på vattenbad. Den svagt gulfärgade lösningen

utspäddes med vatten och öfvermättades med natronlut. Härvid utföll en olja, som dock genast stelnade. Den kristalliserades därpå ur alkohol och uppträdde därvid i fyrsidiga, snedt afskurna blad eller taflor samt smälte konstant vid 80,5°. Detta jämte analysresultaten visar, att föreningen är intet annat än *o-amidobenzyl-p-toluidin* (se ofvan).

Analys:

0,1448 gr. gaf 0,0995 gr H_2O och 0,4193 gr. CO_2

0,1842 gr. gaf vid 757 mm. och 15,5° 20,7 cm^3 torr kväfgas.

	Beräknadt för $C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2 . NH . C_7H_7}$	: för $C_6H_4\langle{}^{N = C . CH_3}_{CH_2 - N . C_7H_7}$	: Funnet:
C	79,24	81,36	78,97
H	7,55	6,78	7,63
N	13,21	11,86	13,29
	100,00	100,00.	

Vid fenyl-(anilin-)derivaten hafva LELLMANN & STICKEL egendomligt nog icke studerat acetyl- utan benzoylföreningarne. På grund af hvad vi funnit vid p-tolylderivaten trodde vi först, att den af dem beskrifna »fenylbenzylenbenzenylamidinen» vore identisk med o-amidobenzylanilin. Vi framstälde därför denna.

o-Amidobenzylanilin.

$$C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2 . NH . C_6H_5}$$

5 gr. o-nitrobenzylklorid uppvärmdes tillsammans med 20 gr. anilin under $^1/_2$ timmes tid. Reaktionsmassan, som vid afsvalning stelnade, behandlades med ättiksyra, som lemnade en tung brun olja olöst. Denna frånskiljdes och öfverfördes i klorvätesyradt salt, som renades genom omkristallisationer ur kokande isättika. Härur anskjuter saltet i långa, fina, hvita nålar, under

det att moderluten är starkt violettfärgad. Hydrokloratet löstes därpå i isättika och reducerades med zinkgrått så, som ofvan vid amidobenzyltoluidin är beskrifvet.

Föreningen kristalliserades ur alkohol eller benzol och afskiljde sig därvid i färglösa, platta nålar eller prismer, som smälte konstant vid 81—82°.

Analys:

0,2124 gr. gaf 0,1404 gr. H_2O och 0,614 gr. CO_2

0,1771 gr. gaf vid 747 mm. och 18° 21,6 cm³ torr kväfgas.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{13}	156	78,79	78,81
H_{14}	14	7,07	7,34
N_2	28	14,14	14,10
	198	100,00.	

Då således denna bas smälte vid 81—82° och LELLMANNS & STICKELS bas först vid 114,5° kunna de icke vara identiska. Vi hafva därför i likhet med LELLMANN & STICKEL framstält *o-nitrobenzylbenzoylanilid:*

$$C_6H_4\langle{}^{NO_2}_{CH_2}\,.\,N\langle{}^{CO\,C_6H_5}_{C_6H_5}$$

och underkastat densamma reduktion. På ofvan anförda skäl hafva vi äfven här användt ett annat reduktionsförfarande än det af LELLMANN & STICKEL föreskrifna: kokning med tenn och saltsyra i isättikelösning. Reduceras nitroföreningen med zink och ättiksyra erhålles lätt

o-Amidobenzylbenzoylanilid

$$C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{CH_2}\,.\,N\langle{}^{CO\,C_6H_5}_{C_6H_5}$$

Reduktionen utfördes på ofvan beskrifvet sätt. Produkten, som lätt stelnade, kristalliserade ur alkohol i platta, korta, fyrsidiga nålar, som smälte vid 115° redan efter första kristallisationen.

Analys:

I 0,1635 gr. gaf 0,0906 gr. H_2O och 0,4742 gr. CO_2
0,214 gr. gaf vid 764,5 mm. och 15° 16,7 cm³ torr kväfgas.

II 0,175 gr. gaf 0,0983 gr. H_2O och 0,508 gr. CO_2
0,2047 gr. gaf vid 744 mm. och 13,5° 16,4 cm³ torr kväfgas.

	Beräknadt för $C_6H_4\langle^{NH_2}_{CH_2.N\langle^{CO\,C_6H_5}_{C_6H_5}}$:	för $C_6H_4\langle^{N = C\,.\,C_6H_5}_{CH_2 - N\,.\,C_6H_5}$:	Funnet: I.	II.
C	79,47	84,51	79,08	79,14
H	5,96	5,63	6,11	6,22
N_2	9,27	9,86	9,34	9,37
O	5,30	—	—	—
	100,00	100,00.		

Då LELLMANN och STICKEL beskrifva sin »fenylbenzylenbenzenylamidin» såsom fina, hvita, vid 114,5° smältande nålar, är det tydligt, att den i sjelfva verket är identisk med nyss beskrifna förening. Att de kunnat erhålla vid analysen 84,2 % kol och 5,9 % väte, kan i någon mån förklaras däraf, att de såsom analysmaterial blott användt 0,1044 gr. Visserligen hafva de äfven framstält och analyserat ett hydroklorat, men då den analyserade substansen här vägde ännu mindre, blott 0,046 gr., kan man icke tillmäta analysen någon beviskraft, isynnerhet som resultatet stämmer vida bättre med den okondenserade än med den kondenserade formeln:

	Beräknadt för $C_6H_4\langle^{NH_2\,.\,HCl}_{CH_2N(CO\,C_6H_5)C_6H_5}$:	för $C_6H_4\langle^{N = C\,.\,C_6H_5}_{CH_2.N\,.\,C_6H_5}HCl$:	Af L. & ST. funnet:
Cl	10,46	11,05	10,5

Tydligen saponifieras denna benzoylförening vida svårare än motsvarande acetylförening af tolylbasen. Vid kokning med rykande saltsyra undergår den dock sönderdelning på annat sätt, i det att ett missfärgadt, i syror och alkalier svårlösligt harts utfaller.

Vid kokning med ättiksyreanhydrid bildas

Acetamidobenzylbenzoylanilid

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}NH\ .\ CO\ CH_3\\ CH_2\ N\left\langle\begin{array}{l}CO\ C_6H_5\\ C_6H_5\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Amidobenzylbenzoylanilid uppvärmdes en stund på vattenbad med ett öfverskott af ättiksyreanhydrid och blandningen afdunstades därpå upprepade gånger till torrhet efter tillsats af alkohol. Den därvid erhållna kristallmassan omkristalliserades därpå ur alkohol, hvari den är i värme lättlöslig. Vid afsvalning erhöllos små färglösa, mångsidiga kristaller, som smälte vid 164—165°.

Analys:

0,219 gr. gaf vid 748 mm. och 13,5° 15,3 cm³ torr kväfgas.

	Ber. för $C_{22}H_{10}N_2O_2$:	Funnet:
N	8,14	8,22

Till slut vilja vi icke lemna oanmärkt, att vi äfven gjort ett annat försök att framkalla kondensation i den ifrågavarande riktningen nemligen genom att behandla amidobenzylanilinen med acetylklorid i beräknad mängd. Då dessa blandas med hvarandra, erhålles redan i köld en nästan färglös, segflytande olja. Denna olja uppvärmde vi en stund med saltsyra. Ur lösningen afsatte sig efter någon tid vackra prismer af ett hydroklorat. Vid neutralisation med kalilut utföll en färglös olja, som snart stelnade kristalliniskt. Den visade sig dock vara identisk med utgångsmaterialet.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 330.)

Kristiania. *Norvegische Commission für die Europäische Gradmessung.*
Geodätische Arbeiten. H. 6—7. 1888—90. 4:o.
Amsterdam. *K. Akademie van Wetenschappen.*
Verhandelingen. Afd. Natuurkunde. D. 27. 1890. 4:o.
Verslagen en Mededeelingen. (3). Afd. Naturkunde. D. 6—7. 1890. 8:o.
» » » » » Letterkunde D. 6. 1889. 8:o.
Jaarboek. 1889. 8:o.
Småskrift. 1.
Angers. *Société d'études scientifiques.*
Bulletin. (2) 17(1887). 8:o.
Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 42(1888): L. 2; 43(1889): 1. 8:o.
Batavia. *K. Natuurkundig Vereeniging in Nederlandsch Indië.*
Natuurkundig Tijdschrift. D. 49. 1890. 8:o.
Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahr 1890: 1—19. 8:o.
Besançon. *Société d'émulation du Doubs.*
Mémoires. (6) T. 3(1888). 8:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande . . .*
Verhandlungen. Jahrg. 46(1889): H. 2; 47(1890): 1. 8:o.
Bordeaux. *Société Linnéenne.*
Actes. Vol. 41: L. 4—6(1887). 8:o.
— *Société des sciences physiques et naturelles.*
Mémoires. (3). T. 3: Cah. 2. 1887. 8:o.
— *Observatoire.*
Annales. T. 3. 1889. 4:o.
Breslau. *Schlesiche Gesellschaft für vaterländische Cultur.*
Jahresbericht. 67(1889). 8:o.
Bruxelles. *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 33. 1889. 8:o.
Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Bulletin. (4) Vol. 2(1887/88). 8:o.
Danzig. *Naturforschende Gesellschaft.*
CONWENTZ, H., Monographie der Baltischen Bernsteinbäume. Danzig 1890. 4:o.
Delft. *École polytechnique.*
Annales. T. 5(1890): L. 3—4. 4:o.
Dijon. *Académie des sciences, arts et belles-lettres.*
Mémoires. (3) T. 10(1887). 8:o.
Edinburgh. *Edinburgh geological society.*
Transactions. Vol. 6: P. 1. 1890. 8:o.
Innsbruck. *Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg.*
Zeitschrift. (3) H. 34. 1890. 8:o.

(Forts. å sid. 400.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

183. Derivat af ortoamidobenzylalkohol. III.

Af H. G. Söderbaum.

[Meddeladt d. 17 Sept. genom P. T. Cleve.]

Såsom jag i förening med prof. O. Widman uti en föregående uppsats[1]) har visat, bildas vid oxidation af fendihydroacimiazin

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2—NH \\ NH — CO\end{cases}$$

en förening af empiriska sammansättningen $C_8H_6N_2O_2$. Denna visar till utseende och egenskaper en noggrann öfverensstämmelse med det P. Griess[2]) först framstälda, sedermera af W. Abt[3]) närmare undersökta s. k. benzoylenurinämnet

$$C_6H_4\begin{cases}CO — NH \\ NH—CO\end{cases}$$

och är väl utan allt tvifvel identisk med detta. Vi hafva (l. c.) anfört detta förhållande såsom ett bevis på, att de af oss nyligen framstälda derivat af ortoamidobenzylalkohol[4]), hvilka vi betecknat såsom fenmiaziner, verkligen äro sammansatta enligt formeln:

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2—NR \\ NH — CO\end{cases}$$

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889. N:o 10, p. 599.
[2]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. II, 415; XI, 1985.
[3]) Journ. für prakt. Chemie, N. F. **39**, 140.
[4]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 7, p. 473 och N:o 10, p. 599.

och följaktligen icke äro att uppfatta som miazoxinderivat:

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2-O \\ NH-C=NH \end{cases}$$

såsom man på grund af vissa analogier med det af GABRIEL[1]) framstälda etylenpseudourinämnet skulle kunnat förmoda.

Detta bevis företer emellertid en lucka så till vida, att vi måste afstå från en direkt jämförelse emellan benzoylenurinämnets och den af oss framstälda oxidationsproduktens smältpunkt, enär båda kropparna smälta öfver svafvelsyrans kokpunkt och följaktligen icke någon uppgift öfver benzoylenurinämnets smältpunkt föreligger i literaturen. För att komplettera bevisföringen var det därför önskvärdt att utsträcka undersökningen äfven till sådana oxidationsprodukter af fenmiazinerna, hvilkas smältpukter på vanlig väg låta sig bestämmas.

Det lät sig nu förutse, att ifall den af WIDMAN och mig uttalade åsigten om de ifrågavarande föreningarnes konstitution är riktig, så borde man genom lämplig oxidering af fenmetyldihydroacimiazin komma fram till fenmetyldiacimiazin, identiskt med det γ-metylbenzoylenurinämne, som af W. ABT erhållits genom sammansmältning af ortoamidobenzmetylamid med urinämne, och för hvilket den nämnde forskaren angifvit smältpunkten 234° C. I sjelfva verket har det visat sig, att denna förmodan var riktig, såsom af efterföljande framgår.

Oxidation af fenmetyldihydroacimiazin.

Reaktionen utfördes medels kromsyra i isättiklösning på i hufvudsak samma sätt som i ett föregående meddelande[2]) angifvits för fendihydroacimiazin. Efter två timmars digerering på vattenbad hade icke någon fast kropp afskilts. Blandningen fick nu stå vid vanlig temperatur under ett dygn. Härvid utkristalllerade en riklig mängd hvita nålar, som genom omkristallisering ur alkohol utan svårighet kunde erhållas i rent tillstånd.

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XXII, 1139.

[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 10, p. 605.

Föreningen löses tämligen lätt i kokande alkohol, betydligt svårare i kokande vatten, och kristalliserar ur båda dessa lösningsmedel i form af långa, fina nålar, som konstant smälta vid 234°. Särdeles väl kristalliserad erhålles den vid utspädning af den ursprungliga oxidationsblandningen med vatten, då den efter någon tid anskjuter i smala, färglösa nålar eller prismer af flera centimeters längd. Lösningen i alkoholisk kalilut visar en liflig blåviolett fluorescens. Vid försigtig upphettning sublimerar kroppen, utan sönderdelning, i långa, fina nålar. Utbyte: af 2 gr. utgångsmaterial erhölls genast 0,5 gr., och sedermera ytterligare 0,4 gr. ur moderlutarne efter deras utspädning med vatten.

Analysen gaf följande resultat:

I. 0,1465 gr. lemnade 0,3285 gr. kolsyra och 0,0638 gr. vatten.

II. 0,1607 gr. lemnade 21,8 kbcm. kväfgas vid 13° C. och 757 mm.

Eller i procent:

	Beräknadt för $C_9H_8N_2O_2$:	Funnet: I.	II.
C	61,36	61,21	—
H	4,55	4,83	—
N	15,91	—	16,18

Såväl af analysen som af föreningens ofvan anförda smältpunkt och öfriga egenskaper framgår alldeles otvetydigt, att denna oxidationsprodukt af fenmetyldihydroacimiazin är fullkomligt identisk med det af W. ABT genom inverkan af urinämne på ortoamidobenzmetylamid erhållna γ-metylbenzoylenurinämnet:

$$C_6H_4\langle\begin{matrix} CO - N.CH_3 \\ | \\ NH - CO \end{matrix}$$

för hvilket jag i enlighet med WIDMANS nomenklatur vill föreslå benämningen *fenmetyldiacimiazin.*

Här föreligger således en ytterligare bekräftelse på den af WIDMAN och mig för fendihydromiazinerna uppstälda konstitutionsformelns riktighet.

Samma substans, fenmetyldiacimiazin, kan äfven erhållas på ytterligare ett sätt, såsom af det efterföljande framgår.

Det syntes ur flera synpunkter önskvärdt att något närmare studera äfven de produkter, som bildas vid oxidation af fendihydro*tio*miazinerna. Man kunde nämligen bland annat vänta, att oxidationsprodukternas natur skulle kunna lemna någon upplysning om, huruvida svaflet uti de nämda tiomiazinerna förekommer i atomgrupperingen C . SH eller CS. Under gången af undersökningen har det emellertid visat sig, att reaktionen förlöper på ett delvis tämligen oväntadt sätt, i det att svaflet fullständigt aflägsnas dels i form af svafvelsyra, dels i form af svafvelsyrlighet, under det att samtidigt CH_2-gruppen öfvergår till CO. Man får således *svafvelfria* kroppar, som äro fullkomligt identiska med de genom oxidation af motsvarande syrehaltiga *aci*miazinderivat erhållna fendiacimiazinerna, hvilkas framställning ofvan blifvit beskrifven.

Oxidation af fenmetyldihydrotiomiazin.

Vid ett försök att oxidera fenmetyldihydrotiomiazin med kromsyra i isättiklösning blef visserligen kromsyran energiskt reducerad, men någon fattbar oxidationsprodukt kunde trots upprepade bemödanden icke isoleras ur reaktionsblandningen. Ett gynsammare resultat lemnade däremot följande förfaringssätt.

Det fint fördelade tiomiazinet uppslammades i tämligen mycket vatten (ungefär 200 delar), hvari det vid uppvärmning till stor del löstes. Den på vattenbad till omkring 70° uppvärmda blandningen försattes under flitig omskakning med en utspädd, 2—3-procentig kamäleonlösning i små portioner, ända till dess att vätskan ej vidare affärgades. Förbrukningen af

kaliumpermanganat motsvarade i medeltal ungefärligen 11 atomer syre på 2 molekyler miazin. Det utfälda mangansuperoxidhydratet frånfiltrerades i värme, och det färglösa, svagt alkaliska filtratet, som gaf tydlig reaktion på svafvelsyra, afdunstades till torrhet på vattenbad. Den härvid erhållna, hvita kristallmassan utlakades med kallt vatten, saltsyra tillsattes droppvis till tydligt sur reaktion (hvarvid en stark lukt af svafvelsyrlighet gjorde sig märkbar), och den olösta återstoden omkristalliserades upprepade gånger ur kokande alkohol.

På detta sätt erhölls en i fina, hvita nålar kristalliserande substans, som konstant smälte vid 234°. Ett kvalitativt pro ådagalade, att föreningen är svafvelfri. Till egenskaper och utseende visar den en fullständig öfverenstämmelse med det ofvan beskrifna fenmetyldiacimiazinet, och identiteten bekräftas ytterligare af följande analys:

0,1710 gr. lemnade 0,3826 gr. kolsyra och 0,0739 gr. vatten

	Beräknadt för $C_9H_8N_2O_2$:	Funnet:
C	61,36	60,99
H	4,55	4,79.

Reaktionsförloppet kan åskådliggöras genom följande formel:

$$2C_6H_5\left\langle\begin{matrix}CH_2-N.CH_3\\ | \\ NH-CS\end{matrix}\right. + 11O = 2C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO-N.CH_3\\ | \\ NH-CO\end{matrix}\right. + SO_3 + SO_2 + 2H_2O.$$

Oxidation af fenetyldihydrotiomiazin.

Oxidationen utföres med kaliumpermanganat på i hufvudsak samma sätt, som nyss blifvit angifvet för den homologa basen. Inverkan är nästan ögonblicklig, och hela reaktionen låter bekvämt utföra sig på en fjärdedels timme. Ur den från manganfällningen affiltrerade, vattenklara lösningen anskjuter vid koncentrering på vattenbad ett i hvita, väl utbildade blad kristalliserande kaliumsalt. Detta sönderdelas med ättiksyra, hvarvid den i utspädda syror olösliga oxidationsprodukten afskiljes såsom

ett hvitt kristalliniskt pulver. Detta frånfiltreras och omkristalliseras ur alkohol till konstant smältpunkt. På detta sätt erhålles den nya kroppen i fullkomligt rent tillstånd redan efter andra kristallisationen.

Den bildar korta, färglösa nålar eller prismer, som smälta vid 195°. Löslighetsförhållandena äro nästan alldeles de samma som hos den homologa metylföreningen. Lösningen i alkoholisk kalilut utmärkes genom sin vackra, blåvioletta fluorescens. Kalimsaltet är tämligen obeständigt. Det löses utan svårighet i alkohol, men vid lösningens utspädning med vatten utfaller den fria föreningen med smpt 195°.

Elementaranalysen stämmer noga med den väntade formeln

$$C_6H_4\begin{cases} CO - N.C_2H_5 \\ \quad\quad\;\; | \\ NH - CO \end{cases}$$

I. 0,1412 gr. lemnade 0,3274 gr. kolsyra och 0,0715 gr. vatten.

II. 0,1543 gr. lemnade 19,6 kbcm. kväfgas, mätt vid 15,5° C. och 753,5 mm.

Eller i procent:

	Beräknadt för $C_{10}H_{10}N_2O_2$:	Funnet: I.	II.
C	63,16	63,24	—
H	5,26	5,59	—
N	14,74	—	14,95.

Föreningen är följaktligen att uppfatta som *fenetyldiacimiazin.*

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 109.

Sur une équation linéaire du second orde à coefficients transcendants.

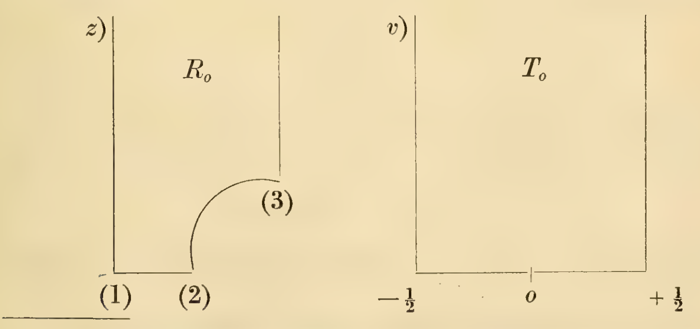
Par GUSTAV CASSEL.

(Extrait d'une lettre à M. MITTAG-LEFFLER.)

[Meddeladt den 17 Sept. 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

Permettez-moi de vous exposer quelques résultats auquels je suis parvenu et qui concernent le problème que j'ai traité dans les »Notes et Mémoires»[1]). J'ai là trouvé une fonction x de u qui réalise la représentation conforme d'un certain domaine U sur un demi-plan. Mais, comme je l'ai relevé dans la note citée, il peut être presque impossible de déterminer au cas général les valeurs α_ν et β_ν que prend la fonction x aux sommets $a_\nu\, b_\nu$ du domaine U. Toutefois, dans un cas spécial, je suis parvenu à une détermination parfaite des valeurs $\alpha_\nu\, \beta_\nu$.

En effet, soit donnée dans le plan de z une région R_0 limitée par les droites parallèles $\infty \ldots (1)$, $\infty \ldots (3)$, par l'arc de cercle $(2) \ldots (3)$ et par la droite $(1) \ldots (2)$, qui fait partie de l'axe réel.



[1]) Voir aussi: Öfver en afhandling af H. WEBER. Bihang till K. V. A:s Handlingar 1890.

Supposons en outre dans le plan de v une région T_o limitée par trois droites $\infty \ldots -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \ldots +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \ldots \infty$. Les angles des sommets des régions R_o et T_o seront tous égals à $\frac{\pi}{2}$. Je me propose de trouver une fonction v de z qui réalise la représentation conforme de la région R_o sur la région T_o. En vertu d'un théorème bien connu de M. SCHWARZ il est toujours possible de trouver une telle fonction.

Pour résoudre ce problème il convient de faire entrer une variable auxiliaire s. Si s sera définie comme fonction de z par l'équation

$$\{z,s\} = \frac{d^2}{ds^2}\log\frac{dz}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{ds}\log\frac{dz}{ds}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{8}\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{s^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s-1},$$

cette fonction réalisera la représentation conforme de la région R_o sur la moitié du plan de s, pourvu que les coefficients A satisfassent aux conditions

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$
$$-A_1 + A_3 + {}^9/_8 = {}^1/_2.$$

Introduisons maintenant dans cette équation $s = \sin \pi v$. Nous aurons:

$$\{z,\pi v\} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sin^2 \pi v} + \frac{A_2}{\sin \pi v} \tag{1.}$$

Par la substitution

$$t = \left(\frac{dz}{d\pi v}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

cette équation se transformera en l'équation linéaire:

$$\frac{d^2 t}{d\pi v^2} + \left[\frac{3}{16}\frac{1}{\sin^2 \pi v} + \frac{A_2}{2}\frac{1}{\sin \pi v}\right] t = 0. \tag{2.}$$

L'intégration de l'une de ces équations nous donnera la solution de notre problème. En effet, si nous considérons v comme fonction de z, cette fonction réalisera la représentation conforme de la région R_o sur la région T_o. On voit aussi que si on peut à l'aide

de la théorie de la représentation conforme déterminer la fonction v de z, on parviendra tout d'un même coup à l'intégration parfaite de l'équation (2.).

Construisons maintenant les régions R_{-1} et R_1 symétriques à la région R_0 par rapport aux droites $\infty \ldots (1)$ et $\infty \ldots (3)$, puis les régions symétriques aux régions R_{-1} et R_1 par rapport aux côtés qui correspondent aux côtés $\infty \ldots (3)$, $\infty \ldots (1)$, et ainsi de suite. On voit que toutes ces régions seront congruentes entre eux, et que leur ensemble formera un domaine Z limité par une infinité de demicercles C_μ équidistants, ayant leurs centres sur l'axe réel, et par une infinité de droites faisant partie de ce même axe. Il est évident que v considéré comme fonction de z représentera conformément le domaine Z sur la moitié supérieure du plan de v.

Désignons par $\bar{a}_\mu$ $\bar{b}_\mu$ les points où le cercle C_μ coupe l'axe réel; soit $\bar{b}_\mu < \bar{a}_\mu$; $\bar{b}_0 = -\bar{a}_{-1}$. Dans les points $\bar{a}_\mu$ $\bar{b}_\mu$ la fonction v prend les valeurs $2\mu + 1$ et 2μ respectivement.

Posons maintenant:

$$z = \frac{1}{u}\,;\; a_\mu = \frac{1}{\bar{a}_\mu}\,;\; b_\mu = \frac{1}{\bar{b}_\mu}\,.$$

Le domaine Z se transformera en un domaine U, qui satisfera aux conditions imposées au domaine U dont je parle dans ma note déjà citée plusieurs fois. Il suit de là que la fonction x définie par les équations

$$\frac{x - \alpha_\lambda}{x - \beta_\lambda} = P_\lambda^2(u) = \prod_{\nu_1 \neq \lambda} \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \qquad (3.)$$

réalise la représentation conforme du domaine U sur la moitié du plan de x. Aux points a_λ b_λ correspondront les points α_λ β_λ. Au point $u = \infty$ correspondra le point $x = \infty$. Si nous faisons

$$\lambda = 0\,,\; \alpha_0 = {}^2/_3\,,\; \beta_0 = 2\,,$$

la fonction x sera parfaitement déterminée.

Donc nous aurons entre x et v la relation:

$$x = \frac{2}{1 + 2v}\,,$$

et par suite

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{4\lambda + 3}, \beta_\lambda = \frac{2}{4\lambda + 1}.$$

Donc l'équation (3.) peut s'écrire

$$\frac{x - \frac{2}{4\lambda + 3}}{x - \frac{2}{4\lambda + 1}} = \left[\prod_{\nu_1 \neq \lambda} \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}\right]^2,$$

ou si nous reprenons les variables z et v:

$$\frac{4\lambda + 1}{4\lambda + 3} \frac{v - (2\lambda + 1)}{v - 2\lambda} = \left[\prod_{\nu_1 \neq \lambda} \frac{a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \frac{\frac{1}{a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} - z}{\frac{1}{b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} - z}\right]^2. \qquad (4.)$$

Quant aux coefficients a_λ b_λ ils sont les inverses de $\bar{a}_\lambda$ $\bar{b}_\lambda$ et par suite ils dépendent de deux paramètres $\bar{b}_o$ et $\bar{a}_o$, de manière que

$$\bar{a}_{\nu-1} = \nu(\bar{a}_o + \bar{b}_o) - \bar{b}_o; \bar{b}_{\nu-1} = \nu(\bar{a}_o + \bar{b}_o) - \bar{a}_o.$$

Au point de vue de la représentation conforme ces deux paramètres peuvent être choisis à volonté; par la fixation de leurs valeurs le coefficient A_2, qui entre dans les équations (1.) et (2.), est déterminé. Si, au contraire, l'équation (1.) ou (2.) est donnée, on peut fixer $\bar{b}_o$ par exemple à volonté et déterminer $\bar{a}_o$ à l'aide d'une équation transcendante. La fonction v devient parfaitement déterminée, et nous pouvons intégrer les équations (1.) et (2.).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 110.

Om Maxima och minima af Dubbelintegraler.

Af GUSTAF KOBB.

[Meddeladt den 17 September 1890 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

I sina föreläsningar öfver Variationskalkyl har Herr WEIERSTRASS framstält en ny teori för undersökningen af maxima och minima af enkla integraler och dervid för första gången gifvit åt detta slag af undersökningar all den skärpa och stränghet, som man inom den moderna matematiken har rätt att fordra. Jag har försökt att, utgående från samma principer, framställa en liknande teori för maxima och minima af dubbelintegraler, och min afsigt är att här meddela de vigtigaste af de resultater, till hvilka jag har framkommit. På grund af den ofullkomlighet, i hvilken teorien för partiella differentialeqvationer af andra ordningen ännu befinner sig, har det ej varit möjligt att helt och hållet följa samma metod som Herr WEIERSTRASS, utan har jag följt en annan väg och dervid väsentligen stödt mig på Herr PICARD's utmärkta arbeten öfver dylika differentialeqvationer [1]).

I en afhandling, hvilken inom kort skall publiceras i Acta Matematica, har jag genomfört undersökningen i det allmänna fallet, då den betraktade ytans koordinater äro entydiga funktioner af tvänne hjelpvariabler. Här antager jag för enkelhets skull, att z kan betraktas som en entydig funktion af x och y.

Låt

$$F(xyzz'z'')$$

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'' = \frac{\partial z}{\partial y}$$

[1]) Journal de Math. 4 Serie, T. IV, sid. 145.

vara en regulär funktion af de deri ingående variablerna och betrakta dubbelintegralen

$$I = \iint F(xyzz'z'')dydx \tag{1}$$

utsträckt inom någon viss sluten kurva

$$f(xy) = 0,$$

hvilken vi antaga ej är underkastad någon variation.

Vi skola nu bestämma en yta

$$z = z(xy)$$

sådan att (1) blir ett maximum eller ett minimum.

Den förändring, integralens värde undergår, då z utbytes mot $z + \zeta$, angifves genom eqvationen

$$\triangle I = \iint \{F(x,y,\, z+\zeta,\, z'+\zeta',\, z''+\zeta'') - F(xyzz'z'')\} dydx$$

eller genom att utveckla differensen

$$\triangle I = \iint \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \zeta + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \zeta' + \frac{\partial F}{\partial z''} \cdot \zeta'' \right\} dydx + H \tag{2}$$

der H innehåller termerna af andra och högre ordning.

Medelst de identiska relationerna

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta \frac{\partial F}{\partial z''}\right) = \frac{\partial F}{\partial z''} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)$$

transformera vi (2) uti

$$\triangle I = \iint \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) \right\} \zeta dydx + \int \left\{ \frac{\partial F}{\partial z''} \zeta dx - \frac{\partial F}{\partial z'} \zeta dy \right\} + H. \tag{3}$$

I den enkla integralen är integrationen utförd längs gränskurvan

$$f(xy) = 0,$$

men, om den varierade ytan antages gå igenom samma gränskontur som den ursprungliga, är

$$\zeta = 0$$

längs gränsen, och följaktligen försvinner den enkla integralen. Således

$$\triangle I = \iint \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) \right\} \zeta \, dy \, dx + H.$$

Skall nu $\triangle I$ för alla värden på ζ behålla samma tecken, måste 1:sta variationen försvinna.

$$\delta I = \iint \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) \right\} \zeta \, dy \, dx = 0.$$

Man kan lätt visa, att denna eqvation nödvändigt leder till eqvationen

$$G = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) = 0, \tag{4}$$

hvilken är en partiel differentialeqvation af andra ordningen, som bestämmer alla de ytor, hvilka kunna göra (1) till ett maximum eller minimum.

Vi antaga nu, att vi ha funnit en yta, som satisfierar (4) och går igenom den gifna konturen. För att afgöra, huruvida denna yta gör integralen (1) till ett maximum eller minimum inslå vi följande väg.

Först måste vi afgöra, huruvida det existerar någon annan yta, som satisfierar samma differentialeqvation, går igenom samma kontur och i hvarje punkt skiljer sig godtyckligt litet från den förra. Härvid kunna vi använda följande allmänna sats:

»Låt

$$\Phi(xyz\ldots) = 0$$

vara en partiel differentialeqvation af andra ordningen, som är lineär med afseende på derivatorna af andra ordningen, z och $z + \zeta$ tvänne integraler till denna, som gå genom samma slutna kontur, $\delta\Phi$ termerna af första ordningen i utvecklingen af differensen

$$\Phi(xy_1z + \zeta\ldots) - \Phi(xyz\ldots)$$

och betrakta dubbelintegralen

$$\iint \zeta \delta \Phi \, dy \, dx$$

tagen inom den gifna konturen. Om, sedan man genom partiel integration bortskaffat alla termer, innehållande

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2},$$

de återstående termerna i $\zeta \delta \Phi$, för det i fråga varande integrationsområdet, bilda en definit qvadratisk form af

$$\zeta,\quad \frac{\partial \zeta}{\partial x},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

så kan man alltid kring den yta, som representeras af integralen z, frånskilja ett rum, sådant att inom detsamma ej existerar någon annan yta, som satisfierar differentialeqvationen

$$\Phi = 0$$

och går igenom den gifna konturen.»

Låt oss tillämpa denna sats på eqvationen

$$G = 0.$$

Då är, om

$$z'_{,} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad z'_{,,} = z''_{,} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\quad z''_{,,} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \zeta + \frac{\partial G}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z''} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z'_{,}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial z'_{,,}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G}{\partial z''_{,,}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$$

der

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z'} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z'}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z''} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z'_{,}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2};\quad \frac{\partial G}{\partial z'_{,,}} = -2\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''};\quad \frac{\partial G}{\partial z''_{,,}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}.$$

Vi ha således

$$\iint \zeta\delta G dy dx = \iint \zeta \Big\{ \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z}\Big)\Big]\zeta - \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\Big)\Big]\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$- \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\Big) + \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\Big)\Big]\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\Big\} dy dx.$$

Vidare är, då ζ försvinner vid gränserna

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\cdot \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dy dx = \iint \Big\{\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\cdot\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\Big)\cdot \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big\} dy dx$$

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\cdot \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dy dx = \iint \Big\{\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\Big)\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big\} dy dx$$

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\cdot \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dy dx = \iint \Big\{\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\Big)\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big\} dy dx$$

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\cdot \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dy dx = \iint \Big\{\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\cdot\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\Big)\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big\} dy dx.$$

Införa vi dessa värden i uttrycket för

$$\iint \zeta\delta G dy dx$$

öfvergår denna uti

$$\iint \zeta\delta G\, dy\, dx =$$

$$= \iint \Big\{\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z}\Big)\Big]\zeta^2\Big\} dy dx = \tag{5}$$

$$= \iint \Big\{F_1\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\Big)^2 + F_2\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big)^2 + 2F_3\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y} + F_4\zeta^2\Big\} dy dx.$$

Den qvadratiska formen under integraltecknen är definit, så snart

$$\begin{aligned} F_1F_2 - F_3^2 &> 0 \\ F_1F_4 &> 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Äfven då det senare vilkoret ej är uppfyldt, kan den qvadratiska formen göras definit, såsom Herr PICARD har visat.

Genom addition af identiteten

$$\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x}(B\zeta^2) + \frac{\partial}{\partial y}(B_1\zeta^2)\right\}dydx = 0$$

bringar man (5) på formen

$$\iint\zeta\delta G dydx =$$

$$= \iint\left\{F_1\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y} + 2B\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2B_1\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + F_4\right)\zeta^2\right\}dydx.$$

Denna nya form är definit, då man kan bestämma B och B_1 så att

$$F_1F_2 - F_3^2 > 0$$

$$F_1\left\{(F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + F_4\right) - F_1B_1^2 + 2F_3B_1B - F_2B^2\right\} > 0. \tag{7}$$

Herr PICARD har visat, att detta alltid är möjligt, så snart den gifna konturen är tillräckligt liten.

Vi antaga nu, att vilkoren (7) äro uppfylda för den funna integralen z. Enligt nyss anförda allmänna sats är det då alltid möjligt, att omkring den i rymden gifna konturen afskilja ett rum, sådant att inom detsamma det ej finnes någon annan yta, som satisfierar differentialeqvationen

$$G = 0$$

och går igenom denna kontur, än den redan funna. Häraf kunna vi draga en mycket vigtig slutsats.

F_1, F_2, F_3 och F_4 äro kontinuerliga funktioner af z och dess derivator. Följaktligen, om vilkoren (7) äro uppfylda för alla punkter, som ligga i ytan z, äro de äfven uppfylda för hvarje annan yta, som ligger tillräckligt nära den ursprungliga. Vi kunna då omkring denna afskilja ett visst rum, sådant att vilkoren (7) äro uppfylda för hvarje yta derinom, som ligger tillräckligt nära densamma. Inom detta rum taga vi en godtycklig

sluten kontur och kunna då uttala följande sats:

»Om det existerar en yta, som satisfierar

$$G = 0$$

och går igenom denna kontur, och, om denna yta är belägen helt och hållet inom ifrågavarande rum, så kan det derinom ej existera någon annan yta, som satisfierar

$$G = 0$$

och går igenom samma kontur.»

Vi skola snart se vigten af detta resultat.

Det är lätt att se, att för existen af ett maximum eller ett minimum, är det nödvändigt, att den qvadratiska formen under integraltecknen i (5) är definit. Den betraktade integralen

$$\iint \zeta \delta G \, dy \, dx$$

är nemligen ej annat än 2:dra variationen af (1)

$$I = \iint F dy \, dx .$$

Vi ha nemligen

$$\delta I = \iint \zeta G \, dy \, dx$$

och således

$$\delta^2 I = \tfrac{1}{2} \iint (\zeta \delta G + G \delta \zeta) \, dy \, dx = \tfrac{1}{2} \iint \zeta \delta G \, dy \, dx$$

på grund af eqvationen

$$G = 0.$$

Vore nu den qvadraiiska formen indefinit, så kunde 2:dra variationen vexla tecken, och följaktligen kunde något maximum eller minimum af (I) ej ega rum.

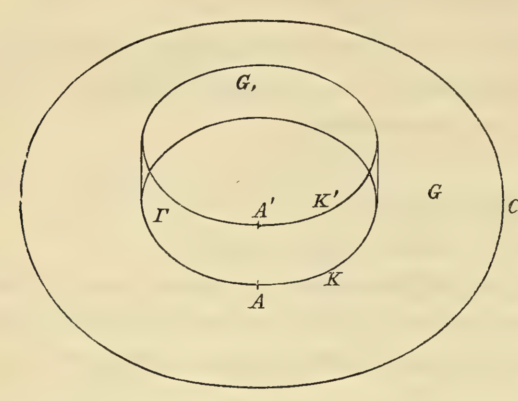
Vi skola nu framställa ännu ett nödvändigt vilkor för existensen af ett maximum eller minimum.

Hvarje yta som är en integral till

$$G = 0$$

kalla vi en yta G. På den yta G, som går igenom den gifna konturen C taga vi en viss sluten regulär kontur K. Genom denna låta vi passera en godtycklig regulär yta Γ och på Γ taga vi en annan kontur K', som ligger mycket nära K. Vi

antaga, att det existerar en yta G, som passerar genom K'. Följaktligen är K' icke helt och hållet arbiträr. Den nya ytan G kalla vi G_1.



Betrakta nu integralen (1) utsträckt öfver ytan G utanför K, öfver ytan F mellan K och K', samt öfver ytan G_1. Denna integral I' kan betraktas såsom en variation af integralen I, utsträckt öfver ytan G. Följaktligen måste

$$I' - I$$

städse bibehålla samma tecken, huru än konturerna K och K' äro valda, om ett maximum eller minimum skall ega rum.

Vi ha

$$I' - I = \iint_{K'} F\,dy\,dx - \iint_{K} F\,dy\,dx + \iint_{\Gamma} F\,dy\,dx$$

eller då konturen K' ligger mycket nära K.

$$I' - I = \iint_{K} G\zeta\,dy\,dx + \int_{K} \left\{\frac{\partial F}{\partial z''}dx - \frac{\partial F}{\partial z'}dy\right\}\zeta +$$

$$+ \iint_{G} F\,dy\,dx + \iint_{\Gamma} F\,dy\,dx + (\quad)_2$$

enligt en känd formel för variationen af en dubbelintegral med föränderliga gränser. Den första dubbelintegralen försvinner, då integrationen är utsträckt öfver en yta G; de båda andra äro utsträckta öfver oändligt smala remsor af ytorna G och Γ och kunna följaktligen transformeras till enkla integraler, tagna längs konturen K.

Äro A och A' tvänne motsvarande punkter på konturerna K och K', så kalla vi l projectionen af afståndet AA' uti tangentplanet till ytan Γ i A, ω den vinkel, som denna projection gör med tangenten till K uti punkten A, samt ds bågelementet af K. Då erhålla vi

$$I' - I = \int_K \mathcal{E}(xyzz'z''\bar{z}'\bar{z}'')l \sin \omega ds + (l)_2 \tag{8}$$

$\bar{z}'$ och $\bar{z}''$ äro de motsvarande värdena på z' och z'' för Γ. Funktionen $\mathcal{E}$ är oberoende af l och ω. Det är ej nödvändigt, att ω längs hela konturen bibehåller samma värde. Vi skola snart se, huru vigtig denna omständighet är.

Vi kunna nu alltid välja l så litet, att tecknet af högra membrum af (8) endast beror på tecknet af dess första term. Det är således nödvändigt att

$$\int_K \mathcal{E} l \sin \omega ds$$

alltid bibehåller samma tecken för hvarje kontur K och för hvarje yta Γ, men då måste $\mathcal{E}$ sjelf alltid bibehålla samma tecken, ty om $\mathcal{E}$ kunde vexla tecken längs K, så existerade det säkert en del af ytan G, der $\mathcal{E}$ vore positif och en annan der $\mathcal{E}$ vore negatif, och följaktligen kunde vi alltid välja vår kontur så, att integralen hade olika tecken. Vi kunna tydligen alltid antaga, att

$$l \sin \omega ds > 0.$$

Det kan inträffa att $\mathcal{E}$ blir noll, men då får den ej vexla tecken.

Efter dessa betraktelser kunna vi uttala följande resultat:

»För att dubbelintegralen

$$\iint F(xyzz'z'')dy\,dx$$

utsträckt öfver en yta som satisfierar eqvationen

$$G = 0$$

skall vara ett maximum, är det nödvändigt att funktionen

$$\mathcal{E}(xyzz'z''\bar{z}'\bar{z}'')$$

aldrig blir positif och för att integralen skall vara ett minimum, att densamma aldrig blir negatif.»

Funktionen $\mathcal{E}$ försvinner identiskt, som man lätt kan se, då

$$\bar{z}' = z' ; \quad \bar{z}'' = z'' .$$

Vi antaga nu, att vilkoren (7) äro uppfylda, äfvensom att funktionen $\mathcal{E}$ för hvarje punkt af ytan G, som går igenom den gifna konturen, bibehåller ett konstant tecken. Då existerar det ett visst rum omkring G, sådant att för hvarje godtycklig sluten kontur derinom det endast existerar en enda yta G.

Inom detta rum taga vi en viss kontur K_1 mycket nära K, sådan att det existerar en yta G, som går derigenom och helt och hållet ligger inom rummet, samt bilda funktionen $\mathcal{E}$ för denna kontur. Ligger nu K_1 tillräckligt nära K, så har denna nya funktion $\mathcal{E}$ säkert samma tecken som densamma för konturen K. Det existerar således omkring ytan G ett rum (A) med följande egenskaper.

1) Om det inom detsamma finnes en yta G, som går igenom en gifven kontur, så finnes det blott en enda sådan yta.

2) Funktionen $\mathcal{E}$ har alltid samma tecken och försvinner utan att vexla detsamma.

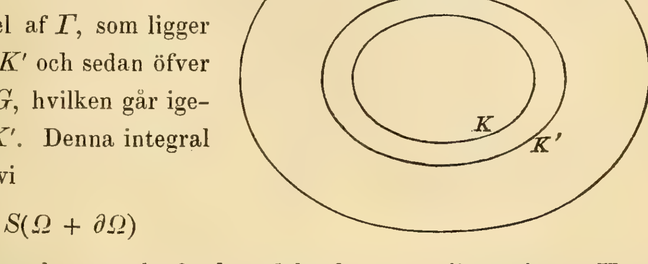
Man kunde nu fråga, huruvida det ej inom detta rum existerar någon yta längs hvilken $\mathcal{E}$ ständigt vore noll. Man kan emellertid förvissa sig om, att utom den ursprungliga ytan G, det ej existerar någon sådan.

Sedan vi ådagalagt existensen af detta rum A, skola vi visa, att integralen (1) utsträckt öfver den yta, som satisfierar

$$G = 0$$

i det fall då $\mathcal{E}$ aldrig blir positif, är större, och då $\mathcal{E}$ aldrig blir negatif, är mindre än samma integral, utsträckt öfver hvarje annan regulär eller irregulär yta, som ligger inom A och går igenom den gifna konturen C. Låtom oss först antaga en regulär yta Γ, som går genom C och ligger inom A. På ytan Γ taga vi tvänne slutna närbelägna konturer K och K', så-

dana att det existerar ytor G, hvilka passera genom respective K och K' samt ligga inom A. För hvarje kontur existerar endast en dylik yta.



Betrakta integralen (1) utsträckt först öfver den del af Γ, som ligger utom K' och sedan öfver ytan G, hvilken går igenom K'. Denna integral kalla vi

$$S(\Omega + \partial\Omega)$$

och beteckna med Ω den del af Γ, som ligger inom K samt med $\partial\Omega$ partiet mellan K och K'. Så snart K' och K äro gifna, är följaktligen denna integral fullkomligt bestämd. På samma sätt kalla vi samma integral, utsträckt öfver partiet utanför K och sedan öfver den yta G, som passerar genom K

$$S(\Omega)$$

Vi ha således

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = \iint_{K'} F\,dy\,dx - \iint_{K} F\,dy\,dx - \iint_{K} \overline{F}\,dy\,dx$$

I de båda första integralerna är integrationen utsträckt öfver ytor G; i den sista öfver den del af Γ som ligger mellan K och K'.

Man ser lätt, att högra membrum är

$$-\int_K \varepsilon l \sin\omega\,ds + (l)_2$$

alltså

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\int_K \varepsilon\,.\,l \sin\omega\,ds + (l)_2 \tag{10}$$

och emedan ε alltid har samma tecken

$$\int_K \varepsilon l \sin\omega\,ds = \varepsilon_m \int_K l \sin\omega\,ds = \varepsilon_m\,\partial\Omega \tag{11}$$

om ε_m är ett medelvärde. Följaktligen är

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\varepsilon_m \partial\Omega + (l)_2 x - -$$

och

$$\lim_{l=0} \frac{S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\varepsilon_m$$

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\varepsilon_m \tag{12}$$

Är nu ε aldrig positif, är städse

$$\varepsilon_m < 0$$

och följaktligen växer $S(\Omega)$ ständigt samt uppnår sitt största värde, när K uppnår gränsen C. Men, då är

$$S(\Omega) = \iint_G F\,dy\,dx$$

och å andra sidan är

$$S(0) = \iint_\Gamma F\,dy\,dx$$

hvarvid i bägge integralerna integrationen är utsträckt intill konturen C. Följaktligen

$$\iint_G F\,dy\,dx > \iint_\Gamma F\,dy\,dx \tag{13}$$

Vi ha hittills antagit, att ytan Γ är regulär, men det är lätt att se, det olikheten (13) består, äfven då Γ är sammansatt af ett ändligt antal regulära stycken.

Vid bildandet af funktionen ε hafva vi visserligen förutsatt, att de båda konturerna K och K' äro regulära, men, detta är ej alldeles nödvändigt; de kunna mycket väl vara sammmansatta af ett ändligt antal reguljära stycken. Vi måste emellertid i sådant fall gifva åt vinkeln ω olika värden för hvarje regulärt stycke af konturen, och uppdela vår integral i ett visst antal delintegraler.

Eqvationen (10) antager nu formen

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} \varepsilon^{(\mu)} l_\mu \sin\omega_\mu \, ds_\mu + (\quad)_2$$

Då inom hvarje integral de uppträdande funktionerna äro kontinuerliga, så är, om ε_m^μ är ett medelvärde

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \varepsilon_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu \, ds_\mu + (\quad)_2$$

men

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu \, ds_\mu = \partial\Omega$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \varepsilon_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu \, ds_\mu = \bar{\varepsilon}_m \, \partial\Omega$$

deraf följer

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\bar{\varepsilon}_m$$

och vidare

$$\iint_G F\, dy\, dx > \iint_\Gamma F\, dy\, dx$$

Låt oss slutligen antaga, att ytan Γ är alldeles irregulär. I allmänhet eger då integralen

$$\iint_\Gamma F\, dy\, dx$$

ej mera någon betydelse. I det fall då den emellertid eger en sådan, kunna vi alltid konstruera en polyederyta Γ', belägen helt nära Γ och sådan, att

$$\iint_\Gamma F\, dy\, dx - \iint_{\Gamma'} F\, dy\, dx < \delta \tag{14}$$

der δ är en arbiträr qvantitet, hvars absoluta belopp kan väljas huru litet som helst.

Vi konstruera vidare omkring Γ en viss rymd A', belägen inom A, men sådan, att åtminstone en del af ytan G ligger utom densamma.

För hvarje polyederyta inom A', hafva vi (13)

$$\iint_G F\,dy\,dx - \iint_{\Gamma'} F\,dy\,dx > 0$$

Då denna differens aldrig kan blifva noll, har den säkert inom A' en undre gräns. Välja vi nu en positif qvantitet h mindre än denna gräns, är för hvarje yta Γ' derinom

$$\iint_G F\,dy\,dx - \iint_{\Gamma'} F\,dy\,dx > h \tag{15}$$

Låt oss vidare välja

$$|\delta| < h \tag{16}$$

och Γ' sådan, att (14) är uppfyldt, så erhålla vi af (14) och (15)

$$\iint_G F\,dy\,dx > \iint_\Gamma F\,dy\,dx + h - \delta$$

eller på grund af (16)

$$\iint_G F\,dy\,dx > \iint_\Gamma F\,dy\,dx$$

Detta, alltid under förutsättningen, att $\mathcal{E}$ aldrig är positif. Är deremot $\mathcal{E}$ aldrig negatif erhålla vi

$$\iint_G F\,dy\,dx < \iint_\Gamma F\,dy\,dx$$

Härmed är ytans maximal- eller minimal-egenskap fullständigt bevisad.

Den metod för undersökningen af maxima och minima af dubbelintegraler, som jag här framstält, är i princip analog med den, Herr WEIERSTRASS gifvit för enkla integraler och det är lätt att se, det densamma också kan användas på multipelintegraler, ehuru då de erhållna vilkoren måste blifva ytterst komplicerade. Men äfven för de enkla integralerna låter metoden

mycket väl använda sig och leder kanske på en kortare väg till alla af Herr WEIERSTRASS funna resultat. Man kan således medelst densamma gifva en teori för Variationskalkylen, der behandlingen af dubbla och multipelintegraler ej i väsentlig mån skiljer sig från behandlingen af de enkla. Den svårighet, som vid de förra uppträder, ligger i vilkoret (7)

$$F_1\left\{(F_1F_2-F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+F_4\right)-F_1B_1^2+2F_3B_1B-F_2B^2\right\}>0$$

Detta fordrar lösningen af en lineär partiel differentialeqvation af 2:dra ordningen. För de enkla integralerna åter leder motsvarande vilkor till en ordinär lineär differentialeqvation af 2:dra ordningen, som är identisk med den, hvars allmänna lösning först blifvit funnen af JACOBI, och hvilken gifver de konjugerade punkterna. Att denna lösning var möjlig att finna, berodde just på den omständigheten, att man känner huru många arbiträra konstanter, som måste ingå i den allmänna lösningen till en ordinär differential-eqvation.

Vore det möjligt att finna den allmänna lösningen af en partiel differentialeqvation af 2:dra ordningen, så skulle lösningen af motsvarande eqvation för de dubbla och de multipla integralerna kunna ske på samma sätt som för de enkla, och densamma skulle då gifva för ytor ett system af kroklinier, hvilket alldeles motsvarar de konjugerade punkterna för kurvor.

Existensen af ett dylikt system af kroklinier är lätt att bevisa, men den verkliga framställningen är i allmänhet ej möjlig.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 374.)

Königsberg. *Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft.*
Schriften. Jahrg. 30(1889). 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. Vol. 25: N:o 101. 1890. 8:o.
Leipzig. *Astronomische Gesellschaft.*
Catalog der Astronomischen Gesellschaft. Abth. 1: St. 4; 14. Lpz. 1890. 4:o.
— *Verein für Erdkunde.*
Mittheilungen. Jahr 1889. 8:o.
London. *British museum.*
Catalogue of birds. Vol. 13, 15, 18. 1890. 8:o.
LYDEKKER, R., Catalogue of the fossil Reptilia and Amphibia. P. 4. 1890. 8:o.
Guide to the exhibition galleries of the department of geology and palæontology. P. 1—2. 1890. 8:o.
— *Royal society.*
Philosophical transactions. Vol. 180(1889): A—B. 4:o.
Proceedings. Vol. 47: N:o 286-291. 1889/90. 8:o.
List 1889 $^{30}/_{11}$. 4:o.
— *R. Astronomical society.*
Mémoirs. Vol. 49: P. 2(1887/89). 4:o.
— *Linnean society.*
Transactions. (2) Zoology. Vol. 5: P. 4. 1890. 4:o.
Journal. » Vol. 20: N:o 122—123; 21: 133—135; 22: 141—144. 1889—90. 8:o.
» Botany. Vol. 25: 171—172; 26: 174; 27: 181—182. 1889—90. 8:o.
Proceedings. Year $1887/_{11}$—$1888/_{6}$. 8:o.
List of the society $1890/_{1}$. 8:o.
Lyon. *Observatoire.*
Travaux. 1. 1888. 4:o.
ANDRÉ, Ch., Description du service horaire de la ville de Lyon. Paris 1889. st. 8:o.
— Småskrifter. 2 st. 8:o.
— *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Mémoires. Classe des sciences. Vol. 28—29. 1886—88. st. 8:o.
» » » lettres. Vol. 24—26. 1887—88. st. 8:o.
— *Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles.*
Annales. (5) T. 9(1886)—10(1887); (6) T. 1(1888). st. 8:o.
— *Société Linnéenne.*
Annales. (2) T. 32(1885)—34(1887). st. 8:o.

(Forts. å sid. 405.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 7.
Stockholm.

Om den nya upplagan af Galileis samlade arbeten.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 17 September 1890 genom D. G. Lindhagen.]

Den intensiva värksamhet, som i våra dagar utvecklas inom de matematiska vetenskapernas forskningsområde, är visserligen i främsta rummet egnad åt dessa vetenskapers fortbildning, men den har äfven satt sig före en uppgift af mera litterär art, nämligen att göra förgångna tiders forskningsresultat icke blott bättre kända utan äfven uppskattade till sitt rätta värde, då hänsyn tages till de förhållanden, under hvilka de blifvit vunna. Denna uppgift realiseras naturligtvis ytterst genom en historisk framställning af matematikens utveckling, men innan en sådan framställning kan komma till stånd, måste materialet därtill vara framskaffadt, och för detta ändamål är det af stor vikt att få äldre författares skrifter utgifna i mönstergilla upplagor. Flere sådana upplagor hafva också under de sista decennierna blifvit ombesörjda, särskildt med hänsyn till de grekiska matematikernas skrifter. Äfven för medeltiden och för vetenskapernas nydaningsperiod saknas de icke helt och hållet, men för åtminstone en af matematikens stormän från denna tid har en fullt tidsenlig upplaga af hans samlade arbeten saknats, nämligen för Galileo Galilei. Visserligen utgafs af Albèri 1841—1856 i Firenze en »edizione completa» af den store florentinarens skrifter, men denna upplaga kan hvarken i afseende på noggrannhet eller fullständighet anses uppfylla det därmed afsedda ändamålet, i synnerhet som under det sista årtiondet flere nya handskrifter af Galilei blifvit upptäckta. Med anledning häraf beslöt italienska regeringen i början af år 1887 att låta utgifva en ny fullständig

samling af GALILEIS arbeten, hvilken är afsedd att fylla 20 kvartvolymer om 500 sidor. De 9 första delarna skola innehålla de vetenskapliga och den 10:de delen de skönlitterära skrifterna; sedermera skola nio band egnas åt GALILEIS brefväxling och det sista bandet skall upptagas dels af aktstycken rörande GALILEI, dels af en galileiansk bibliografi och noggranna register. Ledningen af redaktionsarbetet har blifvit uppdragen åt professor ANTONIO FAVARO i Padova och för bestridande af omkostnaderna har ett statsanslag af 100,000 lire blifvit beviljadt.

Af denna så storartadt anlagda samling har nu första bandet utkommit; dess titel är: *Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume I.* (Firenze, tipografia di G. Barbèra 1890; 4:o, 423 + (2) sidor[1]). Enligt den uppgjorda planen böra de vetenskapliga skrifterna ordnas i kronologisk följd, och första bandet innehåller således GALILEIS ungdomsarbeten, bland hvilka de tvänne utförligaste, *Iuvenilia* och *De motu*, tillsammans upptaga ungefär $^4/_5$ af hela bandet. Det förra är här för första gången utgifvet efter en egenhändig handskrift af GALILEI från år 1584; emellertid kan det ännu icke anses fullt afgjordt, att GALILEI värkligen själf författat det. Emot detta antagande talar, såsom herr FAVARO själf anmärker, den stora beläsenhet, hvarom arbetet vittnar, och hvilken knappast kan förutsättas hos en tjuguårig yngling; vida närmare till hands ligger den tanken, att *Iuvenilia* utgör en uppteckning af föreläsningar, hållna af någon bland GALILEIS lärare, eller afskrift af något äldre arbete. Då det emellertid icke varit möjligt att utröna värkliga förhållandet i detta afseende, och då skriften onekligen är af stort intresse för kännedomen om GALILEIS ungdomsstudier, har utgifvaren ansett sig böra gifva den plats i den nya upplagan. *Iuvenilia* består egentligen af två ofullstän-

[1]) Denna *edizione nazionale*, af hvilken blott 500 exemplar blifvit tryckta, är icke tillgänglig i bokhandeln. I stället har förlagsfirman »Successori Le Monnier» i Firenze låtit med vederbörligt tillstånd aftrycka densamma, sida för sida och rad för rad, i vanligt oktavformat och utgifvit denna upplaga med titel: *Le opere di Galileo Galilei ristampate fedelmente sopra la edizione nazionale con approvazione del ministero della pubblica istruzione. Volume I.* Firenze, Successori Le Monnier. 1890.

diga afdelningar, hvilka båda behandla naturfilosofien, sådan den af ARISTOTELES grundlades och sedan af medeltidens skolastiska filosofer utbildades; den första afdelningen kan närmast karakteriseras som en kommentar till ARISTOTELES' skrift »Om himmelen».

Ett helt annat skaplynne än det nu nämda arbetet erbjuder skriften *De motu*, författad omkring 1590 och egentligen bestående af flere olika uppsatser, hvilka väl behandla samma ämne, men icke strängt systematiskt äro förenade. Här finner man fröen till flere af de epokgörande upptäckter, som sedermera offentliggjordes i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica et i Movimenti Locali* (Leiden 1638). Så meddelar GALILEI t. ex. åtskilliga satser om tunga kroppar, om tyngd, lätthet och rörelse, samt vederlägger flere af ARISTOTELES påståenden, t. ex. att rörelsen skulle ske ögonblickligt i tomrum. Det gör ett ganska egendomligt intryck att läsa denna skrift omedelbart efter *Iuvenilia*, och man har svårt att tänka sig, att blott sex år ligga mellan nedskrifvandet af dessa båda arbeten; i själfva värket representera de också tankeriktningar, som äro skilda från hvarandra genom nära två årtusenden.

Utom de nu nämda större arbetena innehåller bandet fyra mindre uppsatser: *Theoremata circa centrum gravitatis solidorum*, *La bilancetta*, *Tavola delle proporzioni delle gravità in specie de i metalli e delle gioiè pesate in aria ed in aqqua* och *Postille ai libri de sphaera et cylindro di Archimede*, tillsammans upptagande 42 sidor. Den första uppsatsen är författad 1585, och innehåller, såsom titeln angifver, några satser rörande solida figurers, särskildt koners och revolutionsparaboloiders, tyngdpunkt. I den andra uppsatsen, författad 1586, redogöres för den af GALILEI uppfunna hydrostatiska vågen; den tredje uppsatsen angifver i tabellarisk form åtskilliga medels denna våg erhållna resultat. Den fjärde uppsatsen slutligen är sammansatt af marginalanteckningar i ett exemplar af ARCHIMEDES' arbete *De sphaera et cylindro* (Basel 1544).

Hvar och en af de sex i bandet införda skrifterna föregås af en inledning innehållande bibliografiska och historiska upplysningar och under själfva texten finnas textkritiska anmärkningar. I slutet af bandet är infördt ett alfabetiskt register öfver de författare, som af GALILEI blifvit citerade.

Den ovanligt stora sakkunskap med hänsyn till GALILEIS vetenskapliga värksamhet och lefnadsförhållanden, hvilken herr FAVARO genom mer än ett årtiondes studier och forskningar förskaffat sig, gifver sig till känna redan i detta första band, om den också på grund af de här utgifna skrifternas natur endast vid ett eller annat tillfälle kunnat i någon högre grad framlysa. Särskildt förtjänar framhållas den noggrannhet, med hvilken han gått till väga vid utgifvandet af *La bilancetta*, hvarvid han tagit hänsyn till alla bekanta handskrifter af denna först efter GALILEIS död utgifna uppsats och kritiskt jämfört de olika varianter, som i dessa handskrifter förekomma; likaledes bör ej lämnas oanmärkt den omsorg, han nedlagt vid tryckningen af handskriften till *Iuvenilia*, hvilken erbjudit mycket betydande svårigheter.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 400.)

Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Rendiconti. (2) Vol. 21. 1888. 8:o.
Atti della fondazione scientifica Cagnola . . . Vol. 8 (1882/88). 8:o.
— *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 32: Fasc. 1—4. 1889—90. 8:o.
— *R. Osservatorio di Brera.*
Pubblicazioni. N:o 36. 1890. 4:o.
Montpellier. *Académie des sciences et lettres.*
Mémoires. Sect. des lettres. T. 8: F. 3 (1888/89). 4:o.
Moskwa. *Observatoire.*
Annales. (2) Vol. 2: L. 1—2. 1890. 4:o.
Nancy. *Académie de Stanislas.*
Mémoires. (5) T. 6 (1888). 8:o.
— *Société des sciences.*
Bulletin. (2) T. 9 (1888): F. 22. 8:o.
Paris. *Ministère des travaux publics.*
Annales des mines. (8) T. 16 (1889). 8:o.
— *Bureau des longitudes.*
Annuaire. Année 1889. 16:o.
Connaissance des temps. An 1890—91. 8:o.
» » » Extrait à l'usage des écoles d'hydrographie et des marins du commerce. An 1890—91. 8:o.
LOEWY, M., Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1889—90. 4:o.
— PUISEUX, P., Théories nouvelles de l'équatorial coudé et des équatoriaux en général. 1888. 4:o.
— *École polytechnique.*
Journal. Cah. 58. 1889. 4:o.
— *Académie des sciences.*
Collection des anciens chimistes Grecs, publiée par M. Berthelot. L. 4. 1888. 4:o.
CAUCHY, A., Oeuvres, publiées sous la direction de l'Académie des sciences. Sér. 2: T. 7—8. 1889—90. 4:o.
LAGRANGE, J. L. DE, Oeuvres, publiées par les soins de J. A. Serret et G. Darboux. T. 11—12. 1888—89. 4:o.
— *Observatoire.*
Annales: Observations. Année 1883. 4:o.
— *Société zoologique de France.*
Mémoires. T 1 (1888); 2 (1889): F. 1; 3 (1890): 1. 8:o.
Bulletin. Année 1 (1876)—14 (1889): N:o 1—8. 8:o.
— *Société entomologique de France.*
Annales. (6) T. 8 (1888): Trim. 1—4. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Mémoires. (3) T. 5, 2: Fasc. 1. 1890. 4:o.
Pisa. *R. Scuola normale superiore.*
Annali. Vol. 12. = Scienze fisiche e matematiche. Vol. 6. 1889. 8:o.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. (7) Math.-naturw. Classe. Bd. 3. 1890. 4:o.
» » Philos.-hist.-philol. Classe. Bd. 3. 1890. 4:o.
Sitzungsberichte. » » » » Jahr 1889. 8:o.
» » Math.-Naturw. » Jahr 1890: 1. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1889. 8:o.

Rio de Janeiro. *Imp. Observatorio.*
Annuario. Anno 1888—90. 12:o.

Roma. *K. Italienska regeringen.*
GALILEI, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. 1. Firenze 1890. 4:o.

— *Reale Accademia dei Lincei.*
Memorie. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 5. 1888. 4:o.

— *R. Istituto botanico.*
Annuario, redatto da R. Pirotta. Anno 1—2: Fasc. 1—2; 3: 1. Milano 1884—87. 4:o.

Toulouse. *Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres.*
Mémoires. (8) T. 10. 1888. 8:o.

Trieste. *Museo civico di storia naturale.*
Atti. 8. 1890. 8:o.

Troyes. *Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres du dép. de l'Aube.*
Mémoires. T. 52 (1888). 8:o.

Wellington. *New Zealand institute.*
Transactions and procedings. Vol. 22 (1889). 8:o.

Wien. *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd. 4 (1889): N:o 4. 8:o.

Utgifvaren.
Bohuslänsk fiskeritidskrift, utgifven af A. W. LJUNGMAN. 6 (1889): 41—44. Göteborg. 8:o.

Författarne.
AGARDH, J. G., Till algernas systematik. Afd. 6. Lund 1890. 4:o.
STUXBERG, A., Minnen från Vegas färd och dess Svenska föregångare. Göteb. 1890. 8:o.
BRÖGGER, W. C., Die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der Südnorwegischen Augit- und Nephelinsyenite. Lpz. 1890. 8:o.
FRESENIUS, C. R., Chemische Analyse der Antonienquelle zu Warmbrunn in Schlesien. Wiesbaden 1890. 8:o.
— — Småskrifter. 4 st. 8:o.
HISINGER, E., Recherches sur les tubercules du Ruppia rostellata et du Zanichellia polycarpa, provoqués par le tetramyxa parasitica. 1. Hfors 1887. 8:o.
WESTWOOD, J., Revisio insectorum familiæ Mantidarum, speciebus novis aut minus cognitis descriptis et delineatis. London 1889. F.
ZEUNER, G., Technische Thermodynamik. Bd. 2. Lpz. 1890. 8:o.

Stockholm 1890. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 8.

Onsdagen den 8 Oktober.

INNEHÅLL:

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en framställning af Kongl. Italienska Regeringen rörande en kongress i Rom för fortsatt behandling af frågan om en för hela jorden gemensam första meridian för longituds- och tidsberäkningar afgåfvo Hrr LINDHAGEN och GYLDÉN infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Hr HASSELBERG meddelade resultaten af sina undersökningar öfver bromgasens absorptionsspectrum.

Hr SMITT gaf en framställning af Klumpfiskens utvecklingshistoria.

Hr AURIVILLIUS redogjorde för en af honom under sistlidne sommar med Akademiens understöd utförd resa till södra Sverige och Danmark.

Hr GYLDÉN förevisade några från den berömda firman Lumière i Lyon öfversända fotografier i färg af mikroskopiska föremål.

Hr NILSSON redogjorde för egenskaperna hos en af Professor CURTIUS i Kiel upptäckt ny förening mellan qväfve och väte, HN_3, hvilken visar en öfverraskande likhet med saltbildarnes väteföreningar och derför fått namnet *qväfve-vätesyra*.

Sekreteraren öfverlemnade till offentliggörande i Akademiens skrifter följande inkomna uppsatser: 1:o) »Studier öfver arsenikkisens kristallform och sammansättning», af Docenten M. WEIBULL (se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.); 2:o) »Studier öfver Naftalinderivat», af Filos. Kandidaten P. HELLSTRÖM (se Bihanget); 3:o) »Om anatomien hos gräsens underjordiska utlöpare», af densamme (se Bihanget); 4:o) »Om RIBAUCOUR's cykliska system», af Professor A. V. BÄCKLUND (se Bihanget); 5:o) »Über die Leitung von Elektricität durch heisse Salzdämpfe», af Docenten S. ARRHENIUS (se Bihanget); 6:o) »Om förekomsten af Dictiophyllum Nilssoni Brogn. sp. i Kinas kolförande bildningar», af Professor A. G. NATHORST*; 7:o) »Bidrag till teorien för oändliga determinanter», af Filos. Kandidaten H. VON KOCK*; 8:o) »Derivat af etylidendisulfonsyra», af Filos. Kandidaten R. MAUZELIUS*; 9:o) »Om 1, 4. fluornaftalinsulfonsyra», af densamme*; 10:o) »Bidrag till kännedomen af Canadaområdets mossflora», af Lektor N. C. KINDBERG*.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Lund. *K. universitetet.*
Årsskrift. T. 25 (1888/89): 1—4. 4:o.
Upsala. *K. vetenskapssocieteten.*
Nova acta. (3) Vol. 14: Fasc. 1. 1890. 4:o.
JOSEPHSON, A. G. S., Catalogue méthodique des Acta et Nova acta ... 1744—1889. Upsala 1889. 4:o.
Kristiania. *K. Norska Frederiks universitetet.*
Universitets-Bibliothekets Aarbog. Aar 1889. 8:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 9: N:o 81—82. 1890. 4:o.
American chemical journal. Vol. 11 (1889): N:o 8; 12 (1890): 1—5. Index to Vol. 1—10.
» journal of mathematics. Vol. 12: N:o 3—4. 1890. 4:o.
» » » philology. Vol. 10: 4; 11: 1. 1889—90. 8:o.

(Forts. å sid. 432.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 8.
Stockholm.

Om förekomsten af *Dictyophyllum Nilssoni* Brongn. sp. i Kinas kolförande bildningar.

Af A. G. Nathorst.

[Meddeladt den 8 Oktober 1890.]

För någon tid sedan meddelade mig bibliotekarien D:r E. W. Dahlgren, att hamnkaptenen vid den kejserliga kinesiska marinen Mr J. W. Patersson i Shanghai, till börden svensk, vid sitt besök i fäderneslandet sistlidne sommar (1890) till honom öfverlemnat några för Naturhistoriska Riksmuseum afsedda växtförsteningar från Kina. Jag blef naturligtvis mycket nyfiken att närmare lära känna de långväga försteningarne, och tillfredsställelsen vid öppnandet af paketet blef ej mindre derför att desamma visade sig vara tvenne gamla bekanta arter från de kolförande bildningarne i Skåne. Visserligen är det ingen nyhet. att man i långt aflägsna trakter af vår jord träffar försteningar identiska med sådana i Europa, men det har dock alltid sitt intresse då sjelfva sakförhållandet erhåller förnyad bekräftelse.

De fem stycken, om hvilka här är fråga, utgöras af en gråaktig skifferlera, och aftrycken äro vanligen försedda med ett öfverdrag af jernoxidhydrat. Rörande lokalen, hvarifrån styckena härstamma, har jag ej erhållit andra upplysningar än genom en på ett af desamma fastklistrad etikett, på hvilken läses »upper Yangtszi». Växtaftrycken utgöras af tvenne arter.

1. *Dictyophyllum Nilssoni* Brongn. sp. Redan 1820 upptäcktes denna art af Nilsson vid Hör i Skåne och erhöll sedermera sin artbenämning af Brongniart[1]), efter det att den till en början af såväl honom som Sternberg ansetts tillhöra

---

[1]) Brongniart, Histoire des végétaux fossiles p. 376, pl. 132, fig. 2. 1836.

en dikotyledon växt. Utom vid Hör förekommer den i Sverige isynnerhet vid Pålsjö och Sofiero samt är känd flerestädes från Europa från aflagringar tillhörande öfre rhät och lias. Den anföres af ZEILLER från Tonkin[1]), men har hittills icke varit angifven från Kina. Exemplaren (tvenne motstycken) öfverensstämma fullständigt med sådana, som förekomma vid Hör i Skåne.

2. *Podozamites lanceolatus distans* PRESL sp. Flere småblad af denna art föreligga och flertalet höra till formen *minor* SCHENK. Äfven denna art är sedan länge bekant från Hör (*Cycadites giganteus* HISINGER) och andra ställen i Skåne, finnes flerestädes i Europa och är bland annat känd från Sibirien[2]), Tonkin[3]) och äfven från Kina, hvarifrån SCHENK erhållit den såväl bland de af baron VON RICHTHOFEN[4]) som af grefve BELA SZÉCHÉNYI[5]) hemförda samlingarne. Föreliggande exemplar öfverensstämma isynnerhet med dem, som af RICHTHOFEN insamlats vid Pa-Ta-Tshu, vester om Peking (SCHENK, l. c. Taf. 50, Fig. 5, 6). Arten synes vara temligen allmän i Kinas kolförande juralager.

Den omständigheten, att den ena af de två arter, som finnas i kapten PATERSSONS samling, var för Kina ny, låter förmoda, att fortsatta insamlingar skulle bringa mycket af intresse i dagen. Det vore sålunda i hög grad önskligt att mera omfattande material blefve hopbragt.

---

[1]) R. ZEILLER, Examen de la flore fossile des couches de charbon du Tong-King. Extrait des Annales des Mines. Sept. - Okt. 1882. Paris 1882.

[2]) HEER, Beiträge zur Juraflora Ostsibiriens und des Amurlandes. Mém. Acad. Imp. Sciences. St. Petersbourg. 7:o Série, tome 12, N:o 12. 1876. Flora fossilis arctica, vol. 4.

[3]) ZEILLER, l. c. samt Notes sur les empreintes végétales recueillies par M. JOURDAY au Tonkin. Bull. Soc. Géol. France. 3:e sér. t. 14, p. 454. 1886; Note sur les empr. végét. rec. par M. SARRAN dans les couches de combustible du Tonkin. Bull. Soc. Géol. etc. l. c. p. 575.

[4]) VON RICHTHOFEN, China. Bd 4. Zehnte Abhandlung. A. SCHENK, Jurassische Pflanzen.

[5]) SCHENK, Die während der Reise des Grafen Bela Széchényi in China gesammelten fossilen Pflanzen. Palaeontographica, Bd 31. Cassel 1884.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 112.

Bidrag till teorin för oändliga determinanter.

Af Helge von Koch.

[Meddeladt den 8 Oktober 1890 genom G. Mittag-Leffler.]

Vid fortsättningen af det arbete öfver användningen af vissa oändliga determinanter inom teorin för lineära differentialekvationer, hvaraf en första afdelning redan offentliggjorts[1]), visade det sig nödvändigt att äga åtskilliga satser angående dylika determinanters allmänna egenskaper. Några teorem i denna riktning finnas redan i Poincarés afhandling »Sur les déterminants d'ordre infini», men flertalet af för det anförda ändamålet erforderliga satser äro hittills ej bevisade. Detta har föranledt mig att genomföra den följande undersökningen.

1. *Definition.* Med en oändlig determinant

$$D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{-m,-m} & \cdot & \cdot & A_{-m0} & \cdot & \cdot & A_{-mm} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{0,-m} & \cdot & \cdot & A_{00} & \cdot & \cdot & A_{0m} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{m,-m} & \cdot & \cdot & A_{m,0} & \cdot & \cdot & A_{mm} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

förstås det gränsvärde, hvartill determinanten

$$D^{(m)} = \begin{vmatrix} A_{-m,-m} & \cdot & \cdot & A_{-m0} & \cdot & \cdot & A_{-mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{0,-m} & \cdot & \cdot & A_{00} & \cdot & \cdot & A_{0m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,-m} & \cdot & \cdot & A_{m0} & \cdot & \cdot & A_{mm} \end{vmatrix}$$

[1]) Öfvers. af K. V. A. Förh. 1890, N:o 5.

närmar sig vid indefinit växande m. Är detta gränsvärde ändligt och bestämdt, säges D vara konvergent, och man har

$$D = \lim_{m=\infty} D^{(m)} .$$

För korthetens skull skola vi i det följande använda beteckningssättet

$$D^{(m)} = \left[A_{ik}\right]_{i,k=-m\,..\,+m} ; \quad D = \left[A_{ik}\right]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty} .$$

2. Om vi sätta $A_{ik} = a_{ik} \, (i \neq k)$ och $A_{ii} = 1 + a_{ii}$, är den oändliga determinanten

$$\Delta = \left[A_{ik}\right]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}$$

konvergent, så framt dubbelserien

$$\Sigma_i \, \Sigma_k \, | \, a_{ik} \, | \qquad (i, k = -\infty\,..\,+\infty)$$

konvergerar[1]).

Ty bilda produkterna

$$P_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} a_{ik}); \quad \overline{P}_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} | \, a_{ik} \, |).$$

Om man i utvecklingen af P_m ersätter vissa termer med noll och för vissa termer ändrar tecknet, erhålles Δ_m; således kunna termerna i utvecklingen af $\overline{P}_m$ ej vara mindre än absoluta beloppen för motsvarande termer i Δ_m.

Men man erhåller Δ_m ur Δ_{m+p} och $\overline{P}_m$ ur $\overline{P}_{m+p}$ genom att ersätta storheterna a_{ik} $[i, k = \pm (m+1), \, . \, . \, , \pm (m+p)]$ med nollor; således är $\Delta_{m+p} - \Delta_m$ sammanfattningen af vissa termer i Δ_{m+p} och $\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$ sammanfattningen af motsvarande termer i P_{m+p}, hvaraf följer:

$$| \, \Delta_{m+p} - \Delta_m \, | \leqq \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m \ .$$

På grund af konvergensen hos serien $\Sigma | \, a_{ik} \, |$ kan man alltid, sedan man godtyckligt valt ett positivt tal δ, bestämma ett helt

[1]) En determinant, hvars element uppfylla detta vilkor, må i det följande för korthetens skull benämnas »en oändlig determinant af formen Δ».

tal m' sådant, att för alla $m > m'$ och för godtyckliga positiva heltalsvärden på p man har

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m < \delta$$

$$\therefore | \Delta_{m+p} - \Delta_m | < \delta .$$

Därmed är konvergensen hos Δ ådagalagd.

Anm. För det fall, att samtliga a_{ii} $(i = -\infty \,.\,.\, +\infty)$ äro noll, har ofvanstående sats först uttalats och bevisats af POINCARÉ, l. c.

3. En oändlig determinant af formen Δ förblir konvergent, ifall man ersätter elementen i en hvilken som helst af dess rader eller kolonner med storheter, hvilkas absoluta belopp ej öfverstiga en viss gräns.

Låt oss t. ex. ersätta elementen i den 0:te raden:

$$. \; . \; A_{0-m} \; . \; . \; A_{00} \; . \; . \; A_{0m} \; . \; .$$

med storheter

$$. \; . \; \mu_{-m} \; . \; . \; \mu_0 \; . \; . \; \mu_m \; . \; .$$

som uppfylla olikheten

$$| \mu_r | \leqq \mu , \; \mu \geqq 0 ;$$

beteckna med Δ'_m den då erhållna determinanten och med P'_m och $\overline{P}'_m$ de produkter, som erhållas genom att i P_m och $\overline{P}_m$ utelemna den faktor, som svarar mot $i = 0$; ingen term i utvecklingen af produkten $\mu \overline{P}'_m$ kan vara mindre än absoluta beloppet för motsvarande term i Δ'_m, och man finner på samma sätt som nyss

$$| \Delta'_{m+p} - \Delta'_m | \leqq \mu \overline{P}'_{m+p} - \mu \overline{P}'_m ,$$

hvarigenom påståendet är bevisadt.

Anm. Under förutsättningen $a_{ii} = 0$ $(i = -\infty \,.\,.\, +\infty)$ är äfven denna sats bevisad af POINCARÉ l. c. På analogt sätt finner man, att determinanten Δ äfven förblir konvergent, om man ersätter elementen i ett ändligt antal godtyckligt valda rader eller kolonner med storheter, som absolut tagna ej öfverstiga en viss gräns.

4. En oändlig determinant af formen Δ ändrar tecken, om två rader byta plats; den är noll, om två rader äro identiska.

Beviset härflyter omedelbart ur def. 1 och sats 3.

5. En oändlig determinant af formen Δ kan utvecklas på följande olika sätt.

a) Utgå från identiteten

$$\Delta_{2m+1} = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + . . + (\Delta_{2m+1} - \Delta_{2m})$$

där

$$\Delta_{2r+1} = [A_{ik}]_{i,\,k = -r\,..\,+r};\quad \Delta_{2r} = [A_{ik}]_{i,\,k = -(r-1)\,..\,r};$$

ponera

$$\Delta_{2r+1} - \Delta_{2r} = V_{2r+1};\quad \Delta_{2r} - \Delta_{2r-1} = V_{2r}$$

$$V_{2r+1} = \begin{vmatrix} a_{-r,-r} & . & . & A_{-r0} & . & . & A_{-r,r} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ A_{0,-r} & . & . & A_{00} & . & . & A_{0r} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ A_{r,-r} & . & . & A_{r0} & . & . & A_{rr} \end{vmatrix}.$$

$$V_{2r} = \begin{vmatrix} A_{-r+1,-r+1} & . & A_{-r+1,0} & . & . & A_{-r+1,r} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{0,-r+1} & . & A_{00} & . & . & A_{0r} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{r,-r+1} & . & A_{rr} & . & . & a_{rr} \end{vmatrix}$$

och låt m växa öfver hvarje gräns. Man erhåller därigenom utvecklingen

$$\Delta = V_1 + V_2 + . . . + V_m + . . . \tag{a}$$

Af konvergensen hos Δ följer, att serien i högra membrum är konvergent; att denna serie är *absolut* konvergent, framgår däraf, att utvecklingen

$$\overline{P} = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + . .$$

där

$$P_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{r} (1 + \sum_{k=-r}^{+r} |a_{ik}|);\quad P_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{r} (1 + \sum_{k=-r+1}^{+r} |a_{ik}|)$$

är konvergent, och att

$$|\Delta_m - \Delta_{m-1}| \leqq P_m - P_{m-1}$$

b) Hvar och en term $(P_m - P_{m-1})$ i utvecklingen af $\overline{P}$ låter skrifva sig som en summa af idel positiva termer, som ej äro mindre än absoluta beloppen för motsvarande termer i utvecklingen af determinanten V_m. Om vi således på vanligt sätt skrifva denna determinant som en summa af $m! = M$ termer, och därefter ersätta hvarje term med dess absoluta belopp, är serien i högra membrum af (a) fortfarande konvergent. Med andra ord: är

$$V_m = \sum_{k=1}^{M} \varepsilon_{mk}$$

så är dnbbelserien

$$\Delta = \Sigma_m \Sigma_k \varepsilon_{mk}$$

absolut konvergent.

Häraf följer, att om man skrifver determinanten Δ_{2m+1} som en summa af $2m+1!$ termer och därefter i hvarje term låter index m växa öfver hvarje gräns, erhålles utvecklingen af determinanten Δ.

Således kunna vi äfven skrifva

$$\Delta = \Sigma \pm \ldots A_{-m,-m} \ldots A_{00} \ldots A_{mm} \ldots, \tag{b}$$

då med uttrycket till höger menas summan af alla termer, som erhållas genom att verkställa alla permutationer af begynnelsetermens:

$$\ldots A_{-m,-m} \ldots A_{00} \ldots A_{mm} \ldots$$

kolonnindices, och därvid iakttaga, att hvarje så bildad term erhåller tecknet + eller — allt eftersom antalet inversioner mellan nämda indices är ett jemt eller udda tal. Dessutom ser man omedelbart, att hvarje permutation kan erhållas genom att utföra successiva permutationer af 2 indices.

c) Häraf följer äfven, att Δ låter skrifva sig som en *lineär* funktion af elementen i en godtycklig rad eller i en godtycklig kolonn.

Beteckna med

$$\text{adj } A_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial A_{ik}} = \alpha_{ik}$$

koefficienten för A_{ik} i utvecklingen af Δ efter elementen i den i:te raden; då är

$$\Delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} A_{ik} \quad . \tag{c}$$

På grund af 4 erhållas relationerna

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} A_{mk} \qquad (i \neq m) ,$$

och på analogt sätt finner man

$$\Delta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} A_{ik}$$

$$0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} A_{im} \qquad (k \neq m) .$$

För att verkligen framställa α_{ik} behöfver man blott i den i:te raden eller k:te kolonnen ersätta A_{ik} med 1 och öfriga element med 0. Dessa storheter $\alpha_{ik} = \text{adj } A_{ik}$ skall jag i det följande benämna »underdeterminanter af första ordningen».

d) Likaså må

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A_{ik} \partial A_{mn}},$$

d. v. s. den till elementet A_{mn} i determinanten α_{ik} adjungerade underdeterminanten, benämnas »underdeterminant till Δ af ordningen 2» och betecknas med

$$\text{adj} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix};$$

densamme erhålles, om i Δ elementen A_{ik}, A_{mn} ersättas med ettor och öfriga element i den i:te och den m:te raden eller i den k:te

och den n:te kolonnen med nollor. De termer i Δ, i hvilka A_{ik} och A_{mn} ingå som faktorer, äro sammanfattade i uttrycket

$$A_{ik}\, A_{mn} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix}$$

och de, som innehålla A_{mk}, A_{in} framställas genom

$$- A_{mk}\, A_{in} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix};$$

således omfattar summan

$$\Sigma_{k,\,n} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix}$$

i hvilken k, n antaga alla med vilkoret $k < n$ förenliga värdekombinationer i raden $-\infty\,..+\infty$, alla termer i Δ, hvar och en endast en gång, och är följaktligen $= \Delta$.

e) Låt oss nu allmännare med $i_1, i_2, .. i_r$; $k_1, k_2, .. k_r$ beteckna tal i raden $-\infty\,..+\infty$

och med

$$\operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & . & . & A_{i_1 k_r} \\ . & . & . & . \\ A_{i_r k_1} & . & . & A_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

förstå den »underdeterminant af ordningen r», som erhålles af Δ genom att ersätta elementen $A_{i_1 k_1} .. A_{i_r k_r}$ med 1 och öfriga element i den i_1:te .. i_r:te raden eller i den k_1:te ., k_r:te kolonnen med nollor. Vi finna då på liknande sätt som nyss, att Δ kan framställas under formen

$$\Delta = \underset{k_1 < k_2 .. < k_r}{\Sigma_{k_1} \Sigma_{k_2} .. \Sigma_{k_r}} \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & . & . & A_{i_1 k_r} \\ . & . & . & . \\ A_{i_r k_1} & . & . & A_{i_r k_r} \end{vmatrix} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & . & . & A_{i_1 k_r} \\ . & . & . & . \\ A_{i_r k_1} & . & . & A_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

f) Det har redan (5. *b*) blifvit nämdt, att alla termer i Δ erhållas genom permutation af diagonalelementens kolonnindices, och att desamma kunna ordnas efter behag. Låt oss genom ett horisontalt streck indela elementen A_{ik} i två grupper:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot\ \cdot & A_{-m,-m} & \cdot\ \cdot & A_{-m0} & \cdot\ \cdot & A_{-m,m} & \cdot\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot\ \cdot & A_{-1,-m} & \cdot\ \cdot & A_{-10} & \cdot\ \cdot & A_{-1,m} & \cdot\ \cdot \\
\hline
\cdot\ \cdot & A_{0,-m} & \cdot\ \cdot\ \cdot & A_{00} & \cdot\ \cdot\ \cdot & A_{0m} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot\ \cdot & A_{m,-m} & \cdot\ \cdot\ \cdot & A_{m0} & \cdot\ \cdot\ \cdot & A_{mm} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Om vi sätta

$$p_1 = \Sigma \pm A_{-1,-1}\ A_{-2,-2} \ldots A_{-m,-m} \ldots$$
$$q_1 = \Sigma \pm A_{00}\ \ A_{11} \ \ \ldots A_{mm} \ \ \ldots$$

är $p_1\ q_1$ tydligen lika med sammanfattningen af alla de termer i $\varDelta$, som erhållas, om i prodnkten

$$\ldots A_{-m,-m} \ldots A_{00} \ldots A_{mm} \ldots$$

kolonn-indices för faktorerna

$$A_{00} \ldots A_{mm} \ldots$$

permuteras på alla möjliga sätt. Låt oss efter en godtycklig lag numrera och med

$$p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_\mu,\ \ldots$$

beteckna de determinanter, som erhållas genom att successivt permutera alla kolonner i p_1 med alla öfriga kolonner i gruppen ofvanför strecket, och låt

$$q_2,\ q_3,\ \ldots\ q_\mu,\ \ldots$$

vara de motsvarande determinanterna ur den nedre gruppen. Då omfattar summan $\Sigma p_\mu\, q_\mu$ alla termer i $\varDelta$, hvar och en endast en gång. Således är

$$\varDelta = \sum_{\mu=1}^{\infty} p_\mu\, q_\mu$$

På samma sätt kan man naturligtvis utveckla $\varDelta$ efter underdeterminanter bildade genom att med ett *vertikalt* streck indela elementen i två grupper. Öfver hufvud taget inser man

lätt, att denna sats kan generaliseras till fullständig analogi med LAPLACE's allmänna sats rörande utvecklingen af *ändliga* determinanter[1]).

6. Om elementen i en rad, t. ex. den 0:te, ersättas med storheter μ_m, som absolut tagna ligga under en viss gräns μ, kan den nya determinanten utvecklas efter dessa storheter μ_m. För att inse detta, är det tydligen tillräckligt att bevisa, att serien

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mu_m \alpha_{0,\,m}$$

är konvergent. Man erhåller $\alpha_{0,\,m}$ ur Δ genom att ersätta elementet A_{0m} med 1 och öfriga element i den m:te kolonnen med nollor. Således består olikheten

$$|\alpha_{0,\,m}| \leqq \sum_{k \neq m} |a_{mk}| \cdot \prod_{i \neq m} (1 + \Sigma_k |a_{ik}|)$$

$$\leqq \sum_{k \neq m} |a_{mk}| \cdot \overline{P}$$

Nu är serien

$$\Sigma_m \sum_{k \neq m} |a_{mk}|$$

konvergent, således äfven

$$\Sigma_m |\alpha_{0,\,m}|,$$

således äfven

$$\Sigma_m |\mu_m| |\alpha_{0m}|,$$

hvilket bevisar påståendet.

På liknande sätt kunna äfven utvecklingarne $(5, b, c, \ldots f)$ bevisas giltiga för det fall, att elementen i en rad af Δ eller i

---

[1]) Jfr BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5 aufl., p. 36.

ett ändligt antal rader ersättas med storheter, som absolut tagna ej öfverstiga en viss gräns.

7. Om i en oändlig determinant af formen Δ elementen i en rad eller kolonn ersättas med storheter, som absolut tagna ligga under en viss gräns, och som äro aggregat af n termer, låter determinanten uttrycka sig som ett aggregat af n determinanter.

Ersättas t. ex. elementen i den 0:te horisontalraden A_{0k} med

$$\mu_k = \mu_{1k} + \mu_{2k} + \ldots + \mu_{nk}, \, |\mu_k| < \mu$$

blir determinanten

$$\Sigma\, \alpha_{0k}\, \mu_k = \Sigma_k\, \alpha_{0k}\, \mu_{1k} + \Sigma_k\, \alpha_{0k}\, \mu_{2k} + \ldots + \Sigma_k\, \alpha_{0k}\, \mu_{nk}$$

Ersättas elementen A_{0k} med oändliga, absolut konvergerande serier

$$\mu_k = \Sigma_k\, \mu_{\lambda k}, \, |\mu_k| < \mu\,,$$

blir

$$\Sigma_k\, \alpha_{0k}\, \mu_k = \sum_{k,\lambda} \alpha_{0k}\, \mu_{\lambda k} = \Sigma_\lambda \left(\Sigma\, \alpha_{0k}\, \mu_{\lambda k}\right)$$

d. v. s. en summa af ett oändligt antal oändliga determinanter.

8. Värdet af Δ förändras ej, om man till elementen i en rad adderar elementen i en därmed parallel rad efter att ha multiplicerat dem med en godtycklig gemensam faktor.

Följer omedelbart af 7.

9. Låt $c_\lambda\, (\lambda = -\infty \ldots +\infty)$ vara storheter, som absolut tagna ligga under en viss gräns c. Ersätt elementen A_{0k} med

$$A_{0k} + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' c_\lambda\, A_{\lambda k} = A'_{0k}\,^{1)}$$

och kalla den nya determinanten Δ'. Emedan A'_{0k} till sitt absoluta belopp ligga under en viss gräns, är (6)

[1]) Tecknet $'$ utmärker att vid summationen $\lambda = 0$ uteslutes.

$$\Delta' = \Sigma\, \alpha_{0k}\, A'_{0k} = \Delta + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' c_\lambda \cdot \Sigma_k\, \alpha_{0k}\, A_{\lambda k}$$
$$= \Delta$$

Determinantens värde har således ej undergått någon förändring.

10. *Multiplikation af oändliga determinanter.*

Betrakta två oändliga determinanter af formen Δ:

$$A = [A_{i,k}]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}\,;\; B = [B_{i,k}]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}$$

i hvilka således elementen

$$A_{ik} = a_{ik}\,; \qquad B_{ik} = b_{ik} \qquad (i \neq k)$$
$$A_{ii} = 1 + a_{ii}\,; \quad B_{ii} = 1 + b_{ii}$$

hafva egenskapen, att serierna

$$S_a = \Sigma_i\, \Sigma_k\, |\, a_{ik}\,|\,; \quad S_b = \Sigma_i\, \Sigma_k\, |\, b_{ik}\,|$$

konvergera.

Bilda storheterna

$$C_{ik} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}\, B_{kj}\,;$$

då är determinanten

$$C = [C_{ik}]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}$$

af formen Δ, och man har

$$C = AB.$$

Ty om vi sätta

$$C_{ik} = c_{ik}\,(i \neq k)\,; \quad C_{ii} = 1 + c_{ii}$$

är

$$c_{ii} = a_{ii} + b_{ii} + a_{ii}\, b_{ii} + \sum_{j \neq i} {}_j\, a_{ij}\, b_{ij}\,;$$

således är serien $\Sigma_i\,|\,c_{ii}\,|$ konvergent.

Välj två positiva tal α och β så stora, att för alla i, k

$$|A_{ik}| < \alpha\,; \quad |B_{ik}| < \beta$$

då är, för $i \neq k$,

$$|c_{ik}| < \alpha\,|b_{ik}| + \beta\,|a_{ik}| + \sum_{j \neq i,k} |a_{ij}|\,|b_{kj}|\,;$$

men

$$S_a\,S_b \geqq \Sigma_i\,\Sigma_k \sum_{j \neq i,k} |a_{ij}|\,|b_{kj}|\,,$$

således är serien

$$\Sigma_i\,\Sigma'_k\,|c_{ik}|\,, \qquad (k \neq i)$$

således också

$$\Sigma_i\,\Sigma_k\,|c_{ik}|$$

konvergent. Således (sats 2) konvergerar determinanten C.

Inför nu beteckningarna

$$A_m = [A_{ik}]\,; \quad B_m = [B_{ik}]\,; \quad C_m^\infty = [C_{ik}] \qquad (i, k = -m \,..\, +m)$$

$$A = A_m + \alpha_m\,; \quad B = B_m + \beta_m\,; \quad C = C_m^\infty + \gamma_m^\infty$$

$$\mu_{ik} = \sum_{j=-m}^{+m} A_{ij}\,B_{kj}\,; \quad \nu_{ik} = C_{ik} - \mu_{ik}\,; \quad C_m^m = [\mu_{ik}]_{i,\,k = -m\,..\,+m}$$

Determinanten C_m^∞ kan skrifvas som en summa af $2m+2$ determinanter; om vi beteckna dessa genom angifvande af deras 0:te horisontalrad, är

$$C_m^\infty = (\mu_{0,-m} \cdots \mu_{0,m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot\, \mu_{0,m-1}\,\nu_{0m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot\, \mu_{0,m-2}\,\nu_{0,m-1} C_{0m}) + \cdots$$
$$\cdots + (\mu_{0,-m}\,\nu_{0,-m+1}\,C_{0,-m+2} \cdot\cdot\, C_{0m}) + (\nu_{0,-m}\,C_{0,-m+1} \cdot\cdot\, C_{0m})$$

Adjunkterna till elementen ν_{ik} i hvar och en af dem äro samtliga, för alla värden på m, till sina absoluta belopp mindre än

$$P = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{ik}|\right);$$

häraf och med beaktande af likheten

$$C_m^m = (\mu_{0,\,-m} \,.\, . \, \mu_{0m})$$

erhålles

$$\left| C_m^\infty - C_m^m \right| < P \sum_{k=-m}^{+m} \sum_{r=-m}^{+m} | \nu_{kr} | ;$$

men högra sidan af denna olikhet kan, genom att m väljes tillräckligt stort, göras hur liten som helst; ty man har

$$\sum_{k=-m}^{+m} \sum_{r=-m}^{+m} | \nu_{kr} | \leqq \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sum_{-m}^{+m}{}_{i,k} \left\{ | a_{ij}\, b_{kj} | + | a_{i,-j}\, b_{k,-j} | \right\}$$

och uttrycket till höger i denna olikhet kan, på grund af konvergensen hos den trefaldiga serien

$$\Sigma_{j,i,k} | a_{ij}\, b_{kj} | ,$$

göras hur liten som helst. Således kan man, efter att ha valt ett godtyckligt positivt tal δ, alltid välja m' så stort, att för alla $m > m'$ de absoluta beloppen $| A - A_m |$, $| B - B_m |$, $\left| C - C_m^\infty \right|$, $\left| C_m^\infty - C_m^m \right|$ äro mindre än δ. Låt Q vara ett positivt tal sådant, att för alla $m > m'$ olikheten

$$| A_m | + | B_m | < Q$$

eger rum; då är, för $m > m'$

$$| A\, B - A_m\, B_m | = | A_m\, \beta_m + \alpha_m\, B_m + \alpha_m\, \beta_m | < \delta\, Q + \delta^2$$

$$\left| C - C_m^m \right| < 2\, \delta ;$$

men enligt multiplikationsteoremet för ändliga determinanter har man

$$A_m\, B_m = C_m^m .$$

Således

$$| A\, B - C | < \delta\, (Q + \delta + 2) ,$$

d. v. s.

$$A\,B = C\,,$$

h. s. b.

11. Låt $A = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ vara en oändlig determinant af formen A, och beteckna med α_{ik} den till A_{ik} adjungerade underdeterminanten af första ordningen. Då är

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1 k_1} & . & . & \alpha_{i_1 k_r} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{i_r k_1} & . & . & \alpha_{i_r k_r} \end{vmatrix} = A^{r-1} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & . & . & A_{i_1 k_r} \\ . & . & . & . \\ A_{i_r k_1} & . & . & A_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

då $i_1 .. i_r$; $k_1 .. k_r$ äro godtyckliga tal i raden $-\infty .. +\infty$ och $r \geqq 1$.

Beviset för denna sats kan med användning af multiplikationsteoremet 10 utföras på ett sätt, fullkomligt analogt med det, som användes för att bevisa motsvarande egenskap hos *ändliga* determinanter[1]). I stället för att göra detta vill jag härleda några andra formler, som stå i ett nära samband med den ofvan anförda, och som behöfvas i det följande. Låt oss för korthetens skull med

$$\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{pmatrix}$$

beteckna den underdeterminant af r:te ordningen, som erhålles, om i determinanten A elementen $A_{i_1 k_1} .. A_{i_r k_r}$ ersättas med ettor och öfriga element i den i_1:te .. i_r:te raden och i den k_1:te .. k_r:te kolonnen med nollor. Af denna definition följer, att determinanten $\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{pmatrix}$ är noll, om tvänne i eller tvänne k äro lika, och att den ändrar tecken, om tvänne i eller tvänne k byta plats. Specielt är

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \alpha_{i_1 k_1}\,.$$

Dubbelserien

$$S = \Sigma_m \Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r & m \\ k_1 & . & . & k_r & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

---

[1]) Se t. ex. BALTZER, anf. arbete, p. 63.

är absolut konvergent, ty storheterna

$$\Sigma_\lambda \left| \binom{i}{\lambda} A_{m\lambda} \right| \qquad (m = -\infty \,..\, \infty)$$

ligga alla till sina absoluta belopp under en ändlig gräns, och serien

$$\Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix}$$

är absolut konvergent, eftersom den är lika med utvecklingen af den determinant, som erhålles, om i determinanten $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ samtliga element tillhörande den k:te kolonnen ersättas med ettor (jfr n:o 6). Således är summationsordningen likgiltig, och man har

$$S = \Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} \cdot \Sigma_\lambda \binom{i}{\lambda} A_{m\lambda}$$

$$= \Sigma_\lambda \binom{i}{\lambda} \cdot \Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

men

$$\text{(a)} \qquad \Sigma_\lambda \binom{i}{\lambda} A_{m\lambda} = \begin{cases} A & \text{om } m = i \\ 0 & \text{om } m \neq i \end{cases}$$

och

$$\text{(b)} \quad \Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} & \text{om } \lambda = k \\ -\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} & \text{om } \lambda = k_\nu \;\; (\nu = 1 \,..\, r) \\ 0 & \text{om } \lambda \neq k, k_1, .., k_r \end{cases}$$

Således är å ena sidan

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A,$$

å andra sidan

$$S = \binom{i}{k} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} - \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i}{k_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix}.$$

Följaktligen består identiteten

$$(\alpha)\qquad \binom{i}{k}\binom{i_1\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i}{k_\nu}\binom{i_1\;..\;i_{\nu-1}\;i_\nu\;i_{\nu+1}\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_{\nu-1}\;k\;k_{\nu+1}\;..\;k_r} + A\binom{i\;i_1\;..\;i_r}{k\;k_1\;..\;k_r}.$$

När i är lika något af indices $i_1\;..\;i_r$, t. ex. $i = i_1$, öfvergår denna identitet till

$$(\alpha')\quad \binom{i_1}{k}\binom{i_1\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i_1\;i_2\;..\;i_r}{k\;k_2\;..\;k_r} + .. + \binom{i_1}{k_r}\binom{i_1\;..\;i_{r-1}\;i_r}{k_1\;..\;k_{r-1}\;k}.$$

Men eftersom i determinanten A raderna kunna betraktas som kolonner och kolonnerna som rader, är äfven

$$(\beta)\qquad \binom{i}{k}\binom{i_1\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i_\nu}{k}\binom{i_1\;..\;i_{\nu-1}\;i\;i_{\nu+1}\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_{\nu-1}\;k_\nu\;k_{\nu+1}\;..\;k_r} + A\binom{i\;i_1\;..\;i_r}{k\;k_1\;..\;k_r} \qquad (k \neq k_1, k_2, .. k_r)$$

och, för $k = k_1$

$$(\beta')\quad \binom{i}{k_1}\binom{i_1\;..\;i_r}{k_1\;..\;k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i\;i_2\;..\;i_r}{k_1\;k_2\;..\;k_r} + .. + \binom{i_r}{k_1}\binom{i_1\;..\;i_{r-1}\;i}{k_1\;..\;k_{r-1}\;k_r}.$$

Tillämpning på oändliga lineära ekvationssystem.

12. Sätt

$$u_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik}\,x_k \qquad (i = -\infty\;..+\infty)$$

och antag, att determinanten

$$A = [A_{ik}]_{i,\,k = -\infty\;..+\infty}$$

är af formen $\varDelta$. Vi ställa oss uppgiften att bestämma alla de värden på storheterna x_k ($k = -\infty\;..+\infty$), som uppfylla likheterna

$$(1.\,a) \qquad u_i = 0 \qquad (i = -\infty \,..\, +\infty)\,,$$

och som dessutom ha egenskapen

$$(1.\,b) \qquad |x_k| < X \qquad (k = -\infty \,..\, +\infty)\,,$$

där X är ett ändligt positivt tal.

Antag först $A \neq 0$. För alla värden på de obekanta, som uppfylla olikheten (1. b), är

$$(2) \qquad \Sigma_k\, |A_{ik}|\, |x_k| < U \qquad (i = -\infty \,..\, +\infty)$$

där U är ett ändligt positivt tal. Således är serien

$$S = \Sigma_i\, \Sigma_\lambda \binom{i}{k} A_{i\lambda}\, x_\lambda$$

absolut konvergent. Således är

$$S = \Sigma_i \binom{i}{k} u_i = \Sigma_\lambda\, x_\lambda \cdot \Sigma_i \binom{i}{k} A_{i\lambda}$$

hvaraf följer:

$$(3) \qquad x_k \cdot A = \Sigma_i \binom{i}{k} u_i = 0$$

d. v. s.

$$x_k = 0 \qquad (k = -\infty \,..\, +\infty)\,,$$

systemet (1. a, b) har ingen lösning. Således:

Ett nödvändigt vilkor för att systemet (1. a, b) skall ha en lösning är att $A = 0$.

Antag $A = 0$. Bilda underdeterminanten af $2m + 1$:te ordningen $\binom{-m \,..\, +m}{-m \,..\, +m}$, och beteckna med $(-m \,..\, +m)$ den produkt som erhålles, om i produkten

$$\overline{P} = \Pi_i\, (1 + \Sigma_k\, |a_{ik}|)$$

de faktorer utelemnas, som svara mot $i = -m \,..\, +m$. I utvecklingen af $\binom{-m \,..\, +m}{-m \,..\, +m}$ såväl som af $(-m \,..\, +m)$ förekommer termen $+1$, men hvarje annan term i utvecklingen af den förra är till sitt absoluta belopp mindre eller lika motsvarande term i utvecklingen af den senare. Man har således

$$\left| \begin{pmatrix} -m \,.\,.\, +m \\ -m \,.\,.\, +m \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (-m \,.\,.\, +m) - 1 \,. \tag{4}$$

Låt δ vara en godtycklig positiv storhet mindre än ett; man kan alltid välja ett positivt helt tal m' så stort, att för alla $m \geqq m'$ högra sidan af olikheten (4) är mindre än δ. Häraf följer, att för $m \geqq m'$ man har

$$1 - \delta < \left| \begin{pmatrix} -m \,.\,.\, +m \\ -m \,.\,.\, +m \end{pmatrix} \right| < 1 + \delta \,.$$

Således är säkert underdeterminanten $\begin{pmatrix} -m' \,.\,.\, +m' \\ -m' \,.\,.\, +m' \end{pmatrix}$ skild från noll. I raden

$$\begin{pmatrix} -m \,.\,.\, +m \\ -m \,.\,.\, +m \end{pmatrix} \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots)$$

finnes således en *första* determinant, som är skild från noll, och om det är $\begin{pmatrix} -N \,.\,.\, +N \\ -N \,.\,.\, +N \end{pmatrix}$, så är med nödvändighet $N \leqq m'$, således determinantens ordningstal ej högre än $2m' + 1$.

Om det öfverhufvud taget finnes någon underdeterminant af första ordningen, som ej är noll, måste en sådan nödvändigt finnas bland underdeterminanterna

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \qquad (i, k = -N \,.\,.\, +N) \,. \tag{5}$$

Ty antag att dessa alla vore noll. Eftersom $A = 0$, ger oss identiteten $(11, \beta)$ följande likhet:

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N \,.\,.\, +N \\ -N \,.\,.\, +N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i, & -N+1, \,.\,.\, +N \\ -N, & -N+1, \,.\,.\, +N \end{pmatrix} + \,.\,.\, + \begin{pmatrix} +N \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N \,.\,.\,, N-1, i \\ -N \,.\,.\,, N-1, N \end{pmatrix}$$

hvaraf följer

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = -\infty \,.\,.\, +\infty \\ k = -N \,.\,.\, +N \end{pmatrix} \,.$$

I identiteten (jfr $11, \alpha$)

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N \,.\,.\, +N \\ -N \,.\,.\, +N \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i \\ -N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N, & -N+1, \,.\,.\, +N \\ k, & -N+1, \,.\,.\, +N \end{pmatrix} + \,.\,.\, + \begin{pmatrix} i \\ +N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N, \,.\,.\,, N-1, N \\ -N, \,.\,.\,, N-1, k \end{pmatrix}$$

är således högra sidan noll för $i, k = -\infty \,.\,.\, +\infty$, hvaraf följer

$$\binom{i}{k} = 0 \qquad (i, k = -\infty \,..\, +\infty) \;.$$

Ett analogt förhållande gäller om underdeterminanterna af ordningarna 2, 3 o. s. v., och man kommer slutligen till det resultat, att om alla dessa försvinna, men determinanten A har någon underdeterminant af ordningen n ($n \leqq 2N + 1$) skild från noll, måste en sådan finnas bland underdeterminanterna

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_n \\ k_1 & .. & k_n \end{pmatrix} \qquad (i_1 \,..\, i_n;\; k_1 \,..\, k_n = -N \,..\, +N)$$

Låt oss nu i ordning undersöka determinanterna

$$(6) \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} & (i_1, k_1 = -N \,..\, +N) \\ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} & (i_1, i_2;\; k_1, k_2 = -N \,..\, +N) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \begin{pmatrix} -N & .. & +N \\ -N & .. & +N \end{pmatrix} & \end{cases}$$

Antag att af dessa underdeterminanter alla de af ordningarna 1, 2, .. $r - 1$, försvinna, men att bland underdeterminanterna af ordningen r åtminstone fins en — låt vara $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ — skild från noll. Det är då först och främst lätt att se, att i systemet (1. a, b) likheterna

$$u_{i_1} = 0\,, \quad u_{i_2} = 0\,, \; .. \; u_{i_r} = 0$$

äro en följd af de öfriga. Ty låt i_ν vara ett af indices $i_1 \,..\, i_r$. Dubbelserien

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda}\, x_\lambda$$

är absolut konvergent, således är

$$\Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} u_m$$

$$= \Sigma_\lambda\, x_\lambda \cdot \Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda} \;.$$

Men serien

$$\Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

är identiskt noll om $\lambda \neq k_1, k_2, .. k_r$; den är äfven noll, om λ är lika något af indices $k_1 .. k_r$, eftersom densamma då är lika med en viss underdeterminant af ordningen $r - 1$. Således är

$$\Sigma_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} u_m = 0 .$$

Här är koefficienten för u_{i_ν} skild från noll, men koefficienterna för $u_{i_1} .. u_{i_{\nu-1}} u_{i_{\nu+1}} .. u_{i_r}$ noll. Således är likheten $u_{i_\nu} = 0$ en följd af de likheter $u_i = 0$ i systemet (1), hvilkas index $i \neq i_1 .. i_{\nu-1} i_{\nu+1} .. i_r$. Således äro likheterna $u_{i_1} = 0$, $u_{i_2} = 0, .. u_{i_r} = 0$ en följd af de öfriga likheterna i det gifna systemet.

Dubbelserien

$$S = \Sigma_m \Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda} x_\lambda$$

är absolut konvergent. Uppfylla de obekanta x_k likheterna $u_m = 0$, är $S = 0$. Häraf och med användning af identiteterna (11, b) erhålles

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & .. & i_r \\ k & k_2 & .. & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + .. + \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & .. & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{k_r} .$$

Denna relation mellan de obekanta är nödvändig; att den är tillräcklig följer däraf, att hvar och en af summorna

$$\Sigma_k \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & .. & i_r \\ k & k_2 & .. & k_r \end{pmatrix} A_{mk}, .., \Sigma_k \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & .. & k_{r-1} & k \end{pmatrix} A_{mk} \quad (m = -\infty .. +\infty)$$

är noll. Denna sats är således riktig:

Låt (1. a) vara ett oändligt lineärt ekvationssystem, hvars determinant är af formen Δ och lika med noll, och där de obekanta underkastas vilkoret, att till sina absoluta belopp ej öfverstiga en ändlig gräns. Välj godtyckligt ett positivt tal δ mindre än ett och ett helt positivt tal m' så stort, att för alla $m \geq m$ olikheten

$$(-m\,..+m)-1<\delta$$

eger rum. Låt i raden

$$\begin{pmatrix}-m\,..+m\\-m\,..+m\end{pmatrix}\qquad(m=0,1,2,\ldots)$$

$\begin{pmatrix}-N\,..+N\\-N\,..+N\end{pmatrix}$ *vara den första determinant skild från noll. Då är nödvändigt* $N\leqq m'$; *och om bland underdeterminanterna* (6) *de af ordningarna* 1, 2, . . $r-1$ *försvinna, men bland underdeterminanterna af r:te ordningen finnes en — låt vara* $\begin{pmatrix}i_1\,..\,i_r\\k_1\,..\,k_r\end{pmatrix}$ *— skild från noll; då äro i systemet* (1) *likheterna* $u_{i_1}=0$, $u_{i_2}=0$ . . $u_{i_r}=0$ *öfverflödiga, och de obekanta* x_k *äro genom* (7) *entydigt bestämda såsom lineära homogena funktioner af storheterna* x_{k_1}, x_{k_2}, . . x_{k_r}, *hvilka kunna väljas godtyckligt.*

För ett oändligt lineärt *icke*-homogent ekvationssystem

$$u_i=c_i\qquad(i=-\infty\,..+\infty)$$

där c_i äro storheter, som absolut tagna ej öfverskrida en ändlig gräns, finner man lätt genom ett analogt förfaringssätt en motsvarande sats.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 408.)

Studies from the biological laboratory. Vol. 4: N:o 6. 1890. 8:o.
» in historical and political science. Ser. 8: 1–4. 1890. 8:o.

Berlin. *K. Preussisches Geodätisches Institut.*
Astronomisch-geodätische Arbeiten 1 Ordnung: Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1888—1889 . . . . 1890. 4:o.
Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde. Mittheil. 2. 1890. 4:o.
Verhandlungen der neunten allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung . . . in Paris 1889 $^{3}/_{10}$—$^{12}/_{10}$. 1890. 4:o.

— *K. Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Jahr 1889. 4:o.

— *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd. 34—35: H. 1. 1890. 8:o.

Bern. *Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften.*
Neue Denkschriften. Bd. 32: Abth. 1. 1890. 4:o.
Jahresversammlung 72(1889) in Lugano. Verhandlungen. 8:o.
Session » » » Compte rendu des travaux. 8:o.

— *Naturforschende Gesellschaft.*
Mittheilungen. Jahr 1889. 8:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 24(1888/89). 8:o.

Breslau. *Verein für Schlesische Insektenkunde.*
Zeitschrift für Entomologie (2) H. 15. 1890. 8:o.

Budapest. *Magyar tudományos akadémia.*
Mathematikai es természettudományi értesitö (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger). Kötet 7: 4–9; 8: 1–5. 1889. 8:o.
Értekezéket a mathematikai tudományok Köréböl (Mathematische Abhandlungen). K. 14: 2–3; 1889. 8:o.
Értekezéket a természettudományok Köréböl (Naturwissenschaftliche Abhandlungen). K. 18: 6–7; 19: 1–10. 1889. 8:o.
Mathematikai és természettudományi közlemények (Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen). K. 23: 4. 1889. 8:o.
Archæologiai értesitö (Archæologisches Bulletin). K. 9(1889): 3–5; 10(1890): 1–2. 8:o.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd 7(1888/89). 8:o.
Ungarische Revue. Jahrg. 9(1889): H 4–10; 10(1890): 1–4. st. 8:o.
Almanach. 1890. 8:o.
Kiadásaban megjelent munkák és folyóiratok betürendes czim- és tartalomjegyzéke 1830—1889. (Zusammenstellung der Werke und Abhandlungen welche von der K. Ungarischen Akademie herausgegeben sind.) 1890. 8:o.

— *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Mittheilungen. Bd. 9: H. 1. 1890. st. 8:o.

(Forts. å sid. 456.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

184. Derivat af etylidendisulfonsyra. I.

Af Rob. Mauzelius.

[Meddeladt den 8 Oktober 1890 genom P. T. Cleve.]

Genom Wislicenus' undersökningar öfver acetättiketern och Conrads öfver malonsyreetern, känner man, att i atomgruppen

$$— CO . CH_2 . CO —$$

det vid kol bundna vätet kan ersättas af positiva radikaler.

Analogien mellan grupperna CO och SO_2 lät förmoda, att äfven den senare skulle ha samma inflytande på vätet i en metylengrupp som den förra. Att detta är fallet i atomgruppen

$$— CO . CH_2 . SO_2 —$$

ha Michael och Comey[1]) visat hos fenylsulfonättiketern och Lovén[2]) hos sulfodiättiksyreetern samt slutligen Franchimont[3]) och ungefär samtidigt jag[4]) hos sulfoättiksyreetern.

Likheten mellan de bägge grupperna synes dock ej vara fullständig. Så har V. Meyer[5]) visat, att, ehuru i desoxibenzoïn,

$$C_6H_5 . CH_2 . CO . C_6H_5 ,$$

metylengruppens väte kan ersättas af natrium och alkoholradikaler, detta dock ej är fallet med den analoga föreningen

$$C_6H_5 . CH_2 . SO_2 . C_6H_5 .$$

[1]) Ber d. d. chem. Ges. 16, 2300; Ref.
[2]) » » » » » 17, 2817.
[3]) Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Tome VII, 1, p. 25.
[4]) Ber. d. d. chem. Ges. 21, 1550.
[5]) » » » » » 20, 2944.

Det återstod nu att pröfva, hur gruppen

$$— SO_2 . CH_2 . SO_2 —$$

förhölle sig. Sedan jag redan börjat mitt arbete i detta syfte, har FROMM[1]) undersökt disulfoner innehållande denna grupp och funnit, att i dessa metylengruppens väte lätt utbytes mot alkoholradikaler. Som i det följande skall visas, förhåller sig den i etylidendisulfonsyreeterns metylengrupp återstående väteatomen på samma sätt. Jag har visserligen ej undersökt metandisulfonsyreetern, men det torde icke kunna betviflas, att den skall förhålla sig lika[2]).

Metylmetandisulfonsyra,

$$\begin{matrix} CH_3 \\ H \end{matrix} \!\!>\! C(SO_3H)_2,$$

eller etylidendisulfonsyra framställdes först af GUARESCHI, som erhöll den genom oxidation af tialdin[3]) och tritioaldehyd[4]) med kaliumpermanganat. Att den har ofvan anförda konstitution framgår däraf, att den är isomer, men icke identisk med den förut bekanta etylendisulfonsyran.

Jag har framställt syran ur tialdin enligt GUARESCHIS föreskrift. Det erhållna kaliumsaltet öfverfördes till bariumsalt genom upprepade omkristalliseringar med bariumacetat. Utbytet af rent bariumsalt (beräknadt som vattenfritt) blef omkring 90 % af den använda tialdinens vikt.

Bariumsaltet kan erhållas med olika vattenhalt. GUARESCHI har analyserat ett salt med 3 och ett med 3 $^1/_2$ mol. vatten. Ur en icke fullt mättad vattenlösning erhöll jag vid afsvalning ganska stora prismer, som lätt vittra i luften. Mellan papper prässadt salt gaf vid analys i procent:

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 253, 135.

[2]) FRANCHIMONT omnämner i sitt ofvan anförda arbete (1888), att C. A. KLOBBIE redan börjat en undersökning af metandisulfonsyran i detta syfte. KLOBBIE har dock, mig veterligt, hittills icke publicerat något härom.

[3]) Gazz. chim. 9, 75.

[4]) Ann. Chem. Pharm 222, 302.

	Funnet:		Beräknadt för
	I	II	$C_2H_4S_2O_6Ba + 4H_2O$.
Ba	34,6	34,7	34,5
H_2O	17,4	17,3	18,1

Möjligen är detta identiskt med GUARESCHI'S salt med 3 ½ mol. H_2O.

$C_2H_4S_2O_6Ba + H_2O$. När en lösning af saltet afdunstas på vattenbad, afsätta sig små hårda kristaller, som innehålla 1 mol. kristallvatten, hvilken bortgår fullständigt först vid en temperatur öfver 200°. Analysen gaf i procent:

	Funnet.	Beräknadt för $C_2H_4S_2O_6Ba + H_2O$.
Ba	39,9	39,9
H_2O	5,0	5,2

Silfversaltet erhölls genom att neutralisera en lösning af etylidendisulfonsyra (ur bariumsaltet och svafvelsyra) med silfveroxid. Saltet kan erhållas så väl vattenfritt som vattenhaltigt. Vid afsvalning af en varm mättad lösning utkristallisera glänsande sexsidiga prismer af vattenfritt salt, som är mycket beständigt och kan utan sönderdelning upphettas till 165°. Analysen å det mellan papper prässade saltet gaf i procent:

	Funnet.		Beräknadt för
	I	II	$C_2H_4S_2O_6Ag_2$.
Ag	53,6	53,4	53,4

Saltet, som är lättlösligt, bildar gerna öfvermättade lösningar, och ur sådana kristalliserar det i fina nålar, som innehålla en mol. H_2O, hvilken lätt bortgår vid 100°. Vid frivillig afdunstning erhålles samma salt i små prismer. Analysen gaf i procent:

	Funnet		Beräknadt för
	I	II	$C_2H_4S_2O_6Ag_2 + H_2O$.
Ag	—	51,0	51,2
H_2O	4,3	4,4	4,3

Metylmetandisulfonsyrans eterarter.

Metyletern — $C_2H_4(SO_3CH_3)_2$ — erhålles af silfversaltet och metyljodid, hvarvid reaktionen försiggår lätt, utan att uppvärmning behöfver användas. Produkten utdrages med vattenfri eter. Om eterlösningen lämnas att frivilligt afdunsta eller afdunstas i mycket lindrig värme, återstår metyletern såsom en färglös vätska. Afdestilleras däremot etern på vattenbad, färgas produkten mot slutet af destillationen rödaktig, och denna färg blir vid fortsatt upphettning allt mörkare. Etylidendisulfonsyremetyletern löses mindre lätt i eter än motsvarande etyleter. Den är tyngre än vatten och löses vid uppvärmning härmed ganska lätt till en starkt sur vätska. Vanligen erhålles såväl denna som följande eterart förorenad af något fri syra, som meddelar dem sur reaktion. Analysen gaf i procent:

	Funnet	Beräknadt för $C_4H_{10}S_2O_6$.
C	21,5	22,0
H	4,7	4,6

Etyletern — $C_2H_4(SO_3C_2H_5)_2$ — som nästan fullständigt liknar metyletern, erhålles på samma sätt som denna af silfversaltet och jodetyl. Äfven då öfverskott af jodetyl användes, förblir alltid en del silfversalt oangripet. Eterarten är olöslig i kallt vatten och kall utspädd natronlut, men löses lätt i eter och alkohol. Vid upphettning sönderdelas den och kan således ej under vanligt tryck destilleras. Analysen gaf i procent:

	Funnet	Beräknadt för $C_6H_{14}S_2O_6$.
C	29,4	29,3
H	5,9	5,7
S	26,3	26,0
O	(38,4)	39,0
	100,0	100,0

Blandar man lika molekyler etyleter och natriumalkoholat, bägge lösta i eter, erhåller man inom få minuter en riklig fällning af små nålar förenade till bollar. Dessa utgöra sannolikt natriumföreningen

$$CH_3{-}CNa\begin{matrix}\diagup SO_3C_2H_5\\ \diagdown SO_3C_2H_5\end{matrix}.$$

Analysen visade dock, att den var icke obetydligt förorenad af någon annan förening troligen ett natriumsalt af etylidendisulfonsyra. Att ifrågavarande förening dock verkligen förelåg, visades däraf, att den vid kokning med alkohol och etyljodid samt följande tillsats af natronlut öfverfördes till natriumsaltet af en butandisulfonsyra.

Metyletylmetandisulfonsyra,

$$\begin{matrix}CH_3\\ C_2H_5\end{matrix}\!\!>C(SO_3H)_2\,.$$

Då etyletern, blandad med något mer än 1 molekyl jodetyl och något absolut alkohol, försättes med en lösning af en molekyl natrium i 15—20 gånger dess vikt absolut alkohol, inträder en mycket häftig reaktion under stark kokning, som ofta måste modereras genom kolfvens omspolning med kallt vatten. Vid denna reaktion afskiljes en hvit af små nålar bestående fällning. Sedan den häftiga reaktionen upphört, kokas en stund på vattenbad under upprätt kylrör, hvarvid massan antager en starkt sur reaktion. Efter afsvalning försättes den med en varm koncentrerad lösning af bariumhydrat i öfverskott. Härvid löser sig den förutvarande fällningen, men efter några ögonblick afskiljes en hvit massa af mikroskopiska kristaller. Dessa upptogos på sugfiltrum, tvättades med litet alkohol och löstes i kokande vatten. Efter barytöfverskottets aflägsnande afdunstades till kristallisation.

Den erhållna kristallmassan visade sig utgöra en blandning af bariumsalterna till etyliden- och butandisulfonsyrorna. Jag

har upprepade gånger beredt saltet på detta sätt och ständigt erhållit samma blandning, som med mycket små variationer gifvit i medeltal 9,2 % H_2O och 36,4 % Ba. Dessa tal motsvara en blandning af 2 delar etylidendisulfonat och 3 delar butandisulfonat. Genom omkristallisering ändrade sig ej sammansättningen, och någon ren produkt kunde således på detta sätt icke erhållas.

Blandningen af bariumsalter öfverfördes därför till kopparsalter. Genom några omkristalliseringar af dessa erhölls ganska lätt ett rent butandisulfonat skildt från det ytterst lättlösliga kopparetylidendisulfonatet. Ur det rena kopparsaltet ha sedan öfriga salter erhållits utom natriumsaltet, som i rent tillstånd lätt kan framställas ur det alkoholiska filtratet från det först erhållna bariumsaltet.

Den fria butandisulfonsyran, som enligt sitt bildningssätt måste vara metyletylmetandisulfonsyra, erhålles ur bariumsaltet genom sönderdelning med en beräknad mängd svafvelsyra. Efter afdunstning först på vattenbad och därefter öfver svafvelsyra erhållas stora, vattenklara prismer, som äro ytterst delikvescenta. När en större kristall uppläggges på filtrerpapper, flyter den inom få minuter sönder och suger sig in i papperet. Syran kunde således ej prässas torr och har därför icke kunnat analyseras, utan har i stället fullständig analys utförts å tvänne dess salter.

Salter af metyletylmetandisulfonsyra.

Natriumsaltet — $C_4H_8S_2O_6Na_2 + 3H_2O$ — kristalliserar färglösa prismer, som lätt lösas i vatten. I stark alkohol är natriumsaltet liksom de öfriga salterna af denna syra ytterst svårlösligt. Vid 100° förlorar det hela vattenhalten. Mellan papper prässadt salt gaf vid analys i procent:

	Funnet		Beräknadt för
	I	II	$C_4H_8S_2O_6Na_2 + 3H_2O$.
Na	14,6	—	14,6
S	20,3	20,2	20,3
H_2O	16,9	17,0	17,1

Vid 160° torkadt salt gaf:

	Funnet	Beräknadt för $C_4H_8S_2O_6Na_2$.
C	18,1	18,3
H	3,5	3,1
S	24,5	24,4
O	(36,3)	36,6
Na	17,6	17,6
	100,0	100,0

Silfversaltet — $C_4H_8S_2O_6Ag_2$ — kristalliserar i små lättlösliga nålar. Saltet är vattenfritt och förändras ej genom upphettning till 130°. Mellan papper prässadt salt gaf i procent:

	Funnet I	Funnet II	Beräknadt för $C_4H_8S_2O_6Ag_2$.
Ag	50,2	50,1	50,0

Kopparsaltet — $C_4H_8S_2O_6Cu + 5H_2O$ — bildar vid frivillig afdunstning vackert blåa, ganska stora 6- eller 8-sidiga prismer med snedt afskurna ändar. Ganska lättlösligt. Innehåller 5 molekyler kristallvatten af hvilka 3 bortgå vid 100°. Det sista vattnet bortgår fullständigt först vid en temperatur, vid hvilken saltet börjar sönderdelas (öfver 200°). Vittrar ej öfver svafvelsyra. Analysen af det mellan papper prässade saltet gaf i procent:

	Funnet	Beräknadt för $C_4H_8S_2O_6Cu + 5H_2O$.
C	13,2	13,0
H	5,0	4,9
S	17,6	17,3
Cu	17,2	17,2
$3H_2O$	14,6	14,6

Bariumsaltet — $C_4H_8S_2O_6Ba + 2\frac{1}{2}H_2O$ — kristalliserar ur en svalnande lösning i färglösa prismer med rakt afskurna ändar. 100 delar vatten af 18° lösa 19,8 delar vattenfritt salt. Analysen å det mellan papper prässade saltet gaf i procent:

	Funnet		Beräknadt för
	I	II	$C_4H_8S_2O_6Ba + 2\frac{1}{2}H_2O$.
Ba	34,4	34,5	34,4
H_2O	10,9	11,1	11,3

Det torde böra anmärkas, att man vid synteser med etylidendisulfonsyreeter, natriumalkoholat och jodalkyler icke kan isolera de i första hand bildade nya eterarterna såsom vid motsvarande synteser med malonsyreetern. Den stora lätthet med hvilken dessa disulfonsyreetrar saponifieras, försvårar i hög grad renandet af de sökta produkterna. Redan vid tillsättandet af natriumalkoholatet synes delvis bildas natriumsalt af etylidendisulfonsyra (jfr. sid. 437), som sedan undandrager sig reaktionen. En annan anmärkningsvärd omständighet är, att, då mängden jodnatrium, som bildas vid reaktionen, vid ett par tillfällen bestämdes, denna befanns icke obetydligt understiga den ur bildad butandisulfonsyra beräknade, oaktadt man skulle väntat snarare motsatsen. Jag torde vid ett annat tillfälle återkomma härtill.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1888. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

185. Om 1, 4-fluornaftalinsulfonsyra.

Af Rob. Mauzelius.

[Meddeladt den 8 Okt. 1890 genom P. T. Cleve.]

I en föregående uppsats[1]) har jag beskrifvit en fluornaftalinsulfonsyra erhållen af 1, 5-amidonaftalinsulfonsyra. Då denna visade sig äga helt andra egenskaper, än man skulle ha väntat — smältpunkterna hos dess derivat lågo i allmänhet högre än hos motsvarande derivat af 1, 5-klornaftalinsulfonsyra och de bägge syrornas klorider voro ej isomorfa — har jag ansett det vara af intresse att undersöka ännu en fluornaftalinsulfonsyra, hvars motsvarande klorderivat vore kända. Jag har härtill valt 1, 4-syran, som lätt erhölls på följande sätt.

Väl torkad diazonaftalinsulfonsyra (ur naftionsyra) infördes portionsvis i fyra gånger sin vikt varm fluorvätesyra (ren syra med 43 % HFl användes). Den löstes härvid lätt under stark kväfgasutveckling. Lösningen neutraliserades med kali, och det erhållna rödbruna kaliumsaltet omkristalliserades ur kokande vatten, hvarefter det på vanligt sätt öfverfördes till klorid. Den råa kloriden utkokades med lättflyktig gasolja, som lämnade stora mängder af svarta klibbiga ämnen olösta. Vid gasoljans afdestillering erhölls kloriden i gulfärgade massor af platta prismer, som lätt renades genom omkristallisering ur isättika. Utbytet af klorid blef endast omkring 20 % af diazoföreningens vikt

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, s. 559.

Salter af 1,4-fluornaftalinsulfonsyra.

Kaliumsaltet — $2C_{10}H_6Fl\,SO_3K + H_2O$ — kristalliserar ur en svalnande lösning i nålar, som äro tämligen svårlösliga i kallt vatten.

Analys:

0.4282 gr. mellan papper prässadt salt förlorade vid 100° 0.0148 gr. H_2O och gaf 0.1347 gr. K_2SO_4.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
K	14.1	14.3
H_2O	3.5	3.3

Silfversaltet — $2\,C_{10}H_6Fl\,SO_3Ag + H_2O$ — bildar ljust gulbruna små hårda prismer, som tämligen lätt lösas i varmt vatten. Saltet innehåller $^1/_2$ molekyl kristallvatten, som ej bortgår öfver svafvelsyra.

Analys:

0.3470 gr. mellan papper prässadt salt förlorade vid 130° 0.0094 gr.

0.2454 gr. förlorade vid 165° 0.0068 gr. samt gaf 0 0781 gr. silfver.

I procent:

	Funnet.		Beräknadt.
Ag	—	31.8	31.6
H_2O	2.7	2.8	2.6

Bariumsaltet — $(C_{10}H_6Fl\,SO_3)_2\,Ba + H_2O$ — erhölls af kloriden genom ihållande kokning med bariumhydrat. Kristalliserar i färglösa små taflor, som lösas i 358 delar vatten af vanlig temperatur. Saltet aftar ej i vikt vid 130°. Vid omkring 160° sönderdelas det.

Analys:

0.2708 gr. gaf efter afrykning med svafvelsyra 0.1037 gr. $Ba\,SO_4$.

0.2774 gr. gaf 0.1066 gr. $Ba\,SO_4$.

I procent:

	Funnet.		Beräknadt.
Ba	22.5	22.6	22.6

Löslighetsbestämning: 13.02 gr. vid rumstemperatur mättad lösning, gaf 0.0365 gr. vid 120° torkadt salt, som efter afrykning med svafvelsyra lämnade 0.0139 gr. $Ba SO_4$.

Etyletern — $C_{10}H_6Fl SO_3C_2H_5$ — erhölls af silfversaltet och etyljodid. Ur svalnande alkohol kristalliserar den i färglösa prismer, som smälta vid 93°. Den löses lätt i varm alkohol och benzol, tämligen lätt i eter.

Analys:

0.2040 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0.4231 gr. CO_2 och 0.0842 gr. H_2O.

0.2331 gr. gaf 0.2110 gr. $Ba SO_4$.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
C	56.6	56.7
H	4.6	4.3
S	12.4	12.6

Hr H. BÄCKSTRÖM har benäget undersökt kristallformen och därom meddelat:

»Isomorf med den af mig förut[1]) undersökta motsvarande klorföreningen, med hvilken den äfven visar fullständig öfverensstämmelse i anseende till de uppträdande ytorna och deras relativa storlek.

Kristallsystemet är det *monosymmetriska;* axelförhållandet:

$$a : b : c = 1.3548 : 1 : 1.1049; \ \beta = 82° \ 8'.$$

Iakttagna ytor äro: (100) $\infty P \infty$; (001) oP; (101) $-P\infty$; (120) $\infty P2$; (011) $P\infty$.

	Mätt.	Beräknadt.
100 : 001	= 82° 8′	—
: 101	= 46° 16′	46° 11′ 29″
: 120	= 69° 37′	—
120 : $\bar{1}$20	= 40° 39½′	40° 46′ 0″
001 : 011	= 47° 35′	—
011 : 01$\bar{1}$	= 84° 53′	84° 50′ 0″.»

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 10, s. 322.

Fluornaftalinsulfonsyreklorid.

$C_{10}H_6Fl\,SO_2Cl$.

Kloriden löses lätt i varm isättika, kloroform och benzol, tämligen lätt i varm gasolja, mindre lätt i eter. Den smälter vid 86° och är delvis utan sönderdelning flyktig.

Analys:

0.1968 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0.3526 gr. CO_2 och 0.0484 gr. H_2O.

0.2330 gr. gaf efter glödgning med kalk 0.1377 gr. AgCl.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
C	48.9	49.1
H	2.7	2.5
Cl	14.6	14.5

Hr H. BÄCKSTRÖM har om kristallformen meddelat:

»Kristallerna tillhöra det *asymmetriska* systemet och äro isomorfa med motsvarande klorförenings, hvilka de äfven med afseende på sin utbildning och de uppträdande ytorna fullständigt likna.

Som de öfversända kristallerna icke tilläto noggrannare mätningar, kan jag först längre fram lämna detaljeradt meddelande om kristallformen.»

Fluornaftalinsulfonsyreamid.

$C_{10}H_6Fl\,SO_2NH_2$.

Kloriden löstes i absolut alkohol, och lösningen försattes kokhet med konc. amoniak. En ymnig gulhvit fällning uppstod, som efter tvättning med vatten omkristalliserades ur alkohol. Vid afsvalning erhöllos glänsande små blad, som smälte vid 204°—205°. Löses lätt i varm alkohol, svårare i kall. Vid kvalitativ pröfning erhölls stark fluorreaktion.

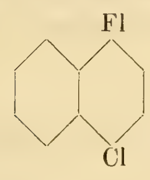
Analys:

0.2474 gr. öfver svafvelsyra torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 13.3 cm^3 kväfgas mätt öfver kali vid 14.9° och 743 mm. bar.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
N	6.3	6.2

1,4-Fluorklornaftalin.



Vid destillation med fosforpentaklorid förhåller sig 1,4-fluornaftalinsulfonsyrekloriden på samma sätt som 1,5-syrans klorid. Man erhåller nämligen ett destillat, som utom en fluorklornaftalin äfven innehåller oförändrad klorid. De bägge kropparna skiljas lätt genom sin olika löslighet i alkohol. Då destillatet efter tvättning med vatten omkristalliseras ur alkohol, afsätter sig först kloriden. Fluorklornaftalinen, som stannar i moderluten, erhålles lättast ren genom destillation med vattenånga och därpå följande omkristallisering ur en något utspädd alkohol. Ur 5 gr. klorid erhölls 1.4 gram ren fluorklornaftalin och återvanns 0.75 gr. klorid af smpt 85°.

1,4-Fluorklornaftalin är lättlöslig i alkohol och kristalliserar därur i färglösa tunna fjäll, som smälta skarpt vid 39°.

Analys:

0.2154 gr. gaf efter glödgning med kalk 0.1697 gr. AgCl.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	19.5	19.65

1,4-Difluornaftalindisulfid.

$(C_{10}H_6Fl)_2S_2$.

Till en varm isättiklösning af fluornaftalinsulfonsyrekloriden sattes stark jodvätesyra, hvarefter värmdes en stund på vattenbad. Den af fri jod starkt bruna lösningen affärgades med svafvelsyrlighetsvatten, och härvid utfälld disulfid omkristalliserades ur isättika. Difluornaftalindisulfiden löses ganska lätt i kokande isättika, svårt i kall. Kristalliserar ur en svalnande lösning i brungula hårda aggregat af små taflor, som smälta vid 143°.

Analys:

0.1924 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0.4761 gr. CO_2 och 0.0643 gr. H_2O.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt.
C	67.5	67.8
H	3.8	3.4

Då kloriden upphettades med vatten i tillsmält rör, hvarvid temperaturen under en kort stund fick stiga till 170°, afskildes en brunsvart olja, som efter destillation med vattenånga blef nästan färglös. Den utgjordes af α-fluornaftalin. Sönderdelningen var ganska fullständig.

Äfven genom användande af ARMSTRONGS metod har jag ur 1,4-syran framstält α-fluornaftalin. Kaliumsaltet löstes i 70-procentig svafvelsyra, och lösningen uppvärmdes till begynnande kokning. Härvid afskildes en nästan svart olja, som destillerades med vattenånga.

De på bägge sätten erhållna kvantiteterna blandades, torkades med klorkalcium och destillerades. Nästan altsammans gick härvid öfver mellan 209°—212° (endast termometerkulan i gasen. Bar. 748 mm.). Hufvudmassan, som öfverdestillerade vid 211°, visade en sp. v. af 1.133 (okorr.) vid 18°.

Vid ett försök, som gjordes att ur 1,5-fluornaftalinsulfonsyra afskilja α-fluornaftalin genom upphettning med 70-procentig svafvelsyra, visade sig, att denna sönderdelas betydligt svårare och ger sämre utbyte af fluornaftalin än 1,4-syran.

Jag lämnar här en öfversikt af smältpunkterna för de kända derivaten af naftalins 1,4-halogensulfonsyror:

	Fluor-sulfonsyra.	Klor-sulfonsyra.[1]	Brom-sulfonsyra.	Jod-sulfonsyra.
Klorid	86°	95°	100.5° [2]	123° [2]
Bromid	—	120°	114.5° [3]	—
Amid	205°	187°	190° [3]	—
Metyleter	—	83°	—	—
Etyleter	93°	104°	—	—
	Fluorklornaftalin.	Diklornaftalin.		
	39°	68°		

Af denna sammanställning synes, att fluorföreningarna (med undantag af amiden) ha lägre smältpunkt än klorföreningarna, således öfverensstämmande med hvad WALLACH funnit hos benzolderivaten. Äfven äro de bägge syrornas klorider såväl som etyletrar isomorfa. Egendomligt kan då synas vara, att hos 1,5-fluornaftalinsulfonsyran ett motsatt förhållande eger rum.

Dicyannaftalin ur 1,5-fluornaftalinsulfonsyra.

DARMSTÆDTER och WICHELHAUS[4]) ha visserligen genom destillation af kaliumsaltet till 1,5-bromnaftalinsulfonsyra med cyankalium erhållit en dicyannaftalin, men då, enligt WALLACH[5]), fluoren vida svårare än de öfriga saltbildarna elimineras ur aromatiska föreningar, hoppades jag ur en fluornaftalinsulfonsyra genom ett liknande förfarande vinna en fluornaftonitril. Resultatet blef dock äfven här en dicyannaftalin.

---

[1]) ARNELL, Om naftalins klorsulfonsyror, sid. 46 (Upsala 1889).

[2]) ARMSTRONG, Britt. association, Manchester Meeting 1887.

[3]) JOLIN, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1877, N:o 7, 23.

[4]) Ann. Chem. Pharm. 152, 307.

[5]) » » » 243, 288.

7 gr. kaliumsalt af 1,5-fluornaftalinsulfonsyra sammanrefs noga med 5 gr. vattenfritt gult blodlutsalt, och blandningen destillerades ur en retort, genom hvilken leddes en ström torr koldioxid. I retorthalsen afsatte sig långa gula nålar. Dessa tvättades med vatten och löstes i kokande alkohol under tillsats af blodlutkol. Vid afsvalning erhöllos små, nästan färglösa nålar, som voro mycket svårlösliga äfven i kokande alkohol. I benzol löstes de något lättare. I kokande isättika voro de tämligen lättlösliga och utkristalliserade därur vid afsvalning i spetsiga nålar. Smältpunkten låg vid 263°.

Analys:

0.1730 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 23.5 cm^3 kväfgas mätt öfver kali vid 18.8° och 758 mm. bar.

I procent:

	Funnet.	Beräknadt för $C_{10}H_6(CN)_2$.
N	15.9	15.7

En dicyannaftalin med smältpunkten 262° har af DARMSTÆDTER och WICHELHAUS erhållits ur α-naftalindisulfonsyra. Samma dicyannaftalin har framställts af EBERT och MERZ [1]). Dessa uppgifva smältpunkten till 267°—268°. Sannolikt är den af mig erhållna identisk med denna. Men α-naftalindisulfonsyra ger enligt CLEVE [2]) den vid 114° smältande diklornaftalinen, som antages vara ett 2,7-derivat, och då dessutom den ur 1,5-bromnaftalinsulfonsyra erhållna dicyannaftalinen enligt DARMSTÆDTER och WICHELHAUS smälter vid 236°, så måste vid någon eller några af dessa reaktioner en omlagring ha egt rum, så vida de föregående författarne, som framstält dicyannaftaliner, ha arbetat med rent material. Hvilken konstitution, som verkligen tillkommer den af mig erhallna dicyannaftalinen, har jag med den lilla kvantitet (0.7 gr.), som stått till mitt förfogande, ej kunnat afgöra.

---

[1]) Ber. d. d. chem. Ges. 9, 604.

[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1876, N:o 7, s. 35.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 8.
Stockholm.

Bidrag till kännedomen om Canada-områdets mossflora.

Af N. C. Kindberg.

(Meddeladt den 8 Oktober 1890 af A. G. Nathorst.)

Efter att under sommarens lopp hafva företagit den studieresa till utlandet, till hvilken jag erhållit understöd af allmänna medel, får jag härmed inför K. Vetenskaps-Akademien i största korthet framlägga de vigtigaste af de dervid vunna resultaten. Några ord om anledningen till den företagna resan torde derjemte vara på sin plats.

Redan år 1887 erhöll jag i uppdrag att bearbeta materialierna till en förteckning öfver Canada-områdets bladmossor för Geolog. and Nat. Hist. Survey i Ottawa, som hör till Statens Inrikes-Departement; dess botanist är Professor John Macoun. Sedan han i många år sysselsatt sig med förstudier till en förteckning öfver områdets växter och redan fullbordat en sådan öfver kärlväxterna, vill han nu äfven katalogisera sporväxterna. Dervid åligger mig att mikroskopiskt examinera alla tillgängliga (redan omkring 3,000) exemplar af bladmossor samt att beskrifva nya arter, underarter och varieteter. Af sådana hade jag påträffat en så stor mängd, att jag icke vågat på egen hand uppställa alla dessa såsom nya; ej heller hade jag med säkerhet kunnat hänföra alla exemplar till förut beskrifna arter i saknad af typexemplar och tillräcklig litteratur; jag har derföre måst rådföra mig med andra bryologer. Som främsta rummet bland dessa intages af D:r C. Müller i Halle, erhöll jag hans benägna tillåtelse att i hans hem gemensamt med honom få genomgå och mikroskopiskt undersöka de kritiska mossformerna.

Jag reste derföre till Halle och tillbragte der öfver sex veckor. Under denna tid har D:r MÜLLER egnat åtskilliga timmar hvarje dag åt mossornas undersökning och äfven i öfrigt visat mig den största liberalitet, för hvilket allt jag hembär honom min varmaste erkänsla; utan hans välvilliga biträde hade det varit mig omöjligt att uppnå det märkliga resultat, som nu vunnits. Hans samling, den rikaste i verlden, innefattar omkring 10,000 arter, af hvilka han sjelf beskrifvit åtminstone 5,000 såsom nya; den innehåller äfven typexemplar af nästan alla hittills kända, i Nordamerika funna arter, sända bland andra från DRUMMOND, SULLIVANT, LESQUEREUX, JAMES, AUSTIN, BOLÄNDER, SCHRADER och Mrs MANN. Alldenstund litteraturen i afseende på Nordamerikas mossor är högst bristfällig, måste största betydelsen tillmätas de ursprungliga typexemplaren.

Redan före år 1887 hade Prof. MACOUN insamlat mossor under sina resor, men måste då egna sig hufvudsakligen åt de högre växterna. Med en ovanlig energi har han genomforskat många för vetenskapen okända trakter och på fjellen uppstigit till den ständiga snöns område. Oaktadt han icke haft tid att göra studiet af bladmossorna till sin specialitet, har hans skarpa öga dock uppdagat inemot ett par hundra nya arter. Detta har i väsentlig mån förändrat den hittills gängse föreställningen, att Nordamerikas mossflora skulle till större delen öfverensstämma med Europas; ty åtminstone halfva antalet befinnes utgöra sådana arter, som visserligen äro korresponderande men ej identiska med europeiska. De delar af Canada-området, som ligga vester om Klippiga Bergen och på deras vestra sluttning, kunna anses tillhöra den växtprovins, hvartill GRISEBACH hufvudsakligen räknar Kalifornien. Genom upptäckter af NEEVIUS, HALL, HOWELL, HENDERSON, MANN, RÖLL m. fl. har det visat sig, att den mellanliggande trakten invid Stilla Hafvet, t. ex. Oregon, i bryologiskt hänsende sammanhänger dermed.

Under sin resa på Vancouver Island 1887 sände mig MACOUN exemplar af hvarje mossform, han der insamlade; likaså 1888 från Prins Edwards ö, 1889 från en trakt af Britiska

Columbia samt detta år från en annan trakt deraf och från Selkirkbergen; dessutom har han under dessa år gjort bryologiska exkursioner omkring Ottawa och i andra delar af Canada. Ensamt detta års resa har redan inbringat inemot femtio nya arter. Tillika har MACOUN sändt exemplar, samlade af J. MOSER i Nya Braunschweig; bland dessa finnas äfven åtskilliga nya arter.

Före mitt besök hos D:r MÜLLER hade jag urskilt inemot 80 arter såsom nya; somliga af dessa äro beskrifna i tidskrifterna Ottawa Naturalist, mars 1889, och Bulletin of Torrey Bot. Club, april 1889 och 1890. Genom jemförelse med typexemplar i sin samling kunde MÜLLER hänföra inemot tio arter till förut kända, ehuru origtigt eller ofullständigt beskrifna; alltså återstå 69, af hvilka han examinerat och godkänt 67; af de båda öfriga eger jag så små exemplar, att han icke om dem kunde fälla något bestämdt omdöme. Utom dessa hafva vi gemensamt urskilt öfver 110 andra såsom nya.

Enligt tillgänglig litteratur samt meddelanden af C. MÜLLER, F. RENAULD (öfverste och kommendant i Monaco), J. CARDOT (i Stenay, Meuse, Frankrike) och V. F. BROTHERUS (lektor i Helsingfors) kan jag beräkna de nordamerikanska bladmossornas artantal på följande sätt:

I hela Nordamerika	omkr.	1200;
i Förenta Staterna	inemot	850;
i Canada-området jemte Alaska och Grönland	minst	850;
af dessa äfven i Europa	inemot	600;
ensamt i Canada-området	omkr.	170.

Framdeles torde vid närmare undersökning visa sig, att åtskilliga amerikanska former, som antagits vara identiska med europeiska, utgöra själfständiga arter.

Af de arter, MACOUN funnit i Canada, äro åtskilliga nya för Amerika, men förut funna i Europa, t. ex. *Homalothecium sericeum*, *Thamnium alopecurum*, *Heterocladium heteropterum*, *Hypnum Sommerfeltii*, *Hypnum Goulardi*, *Orthothecium intricatum*, *Polytrichum sexangulare*, *Philonotis marchica*, *Grimmia*

tortifolia, *Mnium inclinatum*, *Andreæa Huntii*, *Orthotrichum Braunii*. Andra äro förut funna både i Europa och Förenta Staterna, t. ex. *Barbula Vahlii*, *rigida*, *ambigua*, *cylindrica*, *gracilis*, *Mülleri; Grimmia anodon*, *contorta; Orthotrichum lævigatum*, *pulchellum; Schistostega osmundacea; Campylostelium saxicola; Webera Tozeri; Atrichum crispum; Neckera oligocarpa; Antitrichia californica*, *Pterygophyllum lucens; Fabronia pusilla; Myurella Careyi; Hypnum eugyrium*, *trifarium; Hylocomium Oakesii*. Nyligen har den europeiska *Timmia norvegica* äfven blifvit funnen.

Andra hafva hittills endast påträffats i Förenta Staterna, t. ex.:

Barbula brachyphylla; *Grimmia calyptrata*, *Manniæ* C. M., *tenella* C. M.; *Racomitrium Neevii; Scouleria Neevii* C. M.; *Polytrichum ohioense* REN. et CARD.; *Ptychomitrium Gardneri; Drummondia clavellata; Orthotrichum texanum*, *ohioënse; Physcomitrium turbinatum; Glyphocarpus Menziesii; Bryum miniatum*; *Fontinalis Novæ Angliæ*, *disticha*, *biformis; Homalothecium pseudosericeum; Thuidium Whipplei; Camptothecium Amesiæ* REN. et CARD., *æneum*, *nevadense*, *megaptilum; Brachythecium Donnellii*; *Isothecium Breweri; Eurhynchium oreganum; Raphidostegium Jamesii*, *Roellii* REN. et CARD.; *Thamnium Bigelowii; Plagiothecium Sullivantiæ; Hypnum Sequoieti*, *Novæ Angliæ*. Dessutom är en ny *Racomitrium*, *R. speciosum* C. M., funnen af MACOUN och RÖLL på Vancouver Island.

De af mig ensam (KINDB.) namngifna arterna äro:

Antitrichia tenella
Anomodon heteroideus
Amblystegium fenestratum
speirophyllum
Brachythecium lævisetum
pseudo-albicans
Camptothecium hamatidens
Eurhynchium Dawsoni
substrigosum
Heterocladium vancouveriense
Homalothecium corticola
Hypnum (Harpid.) Moseri
longinerve
(Drepan.) canadense
Renauldi
(Campyl.) Macounii
(Limnob.) pseudo-arcticum
Isothecium Cardoti
myurellum
Platygyrium rupestre

Pseudoleskea oligoclada
sciuroides
Plagiothecium bifariellum
membranosum
brevipungens
Pylaisea Selwyni
Thelia compacta
Thuidium lignicola.

Atrichum leiophyllum
Andreæa Macounii
Barbula (Aloina) macrorhyncha
(Syntrich.) megalocarpa
Bryum (Rhodobryum) simplex
» *ontariense*
(Eubryum) meeseoides
vancouveriense
hydrophilum
denticulatum
percurrentinerve
Cynodontium subalpestre
Dicranella parvula
Desmatodon camptothecius
Dicranum canadense
brachycaulon
Dicranum subulifolium
leioneuron
angustifolium
sulcatum
Encalypta leiomitra
leiocarpa
Gymnostomum platyphyllum
Grimmia nivalis
arcuatifolia
chloroblasta
heterophylla
depilata
sarcocalyx
Monocranum stenodictyon
Merceya latifolia
Philonotis glabriuscula
Physcomitrium megalocarpum
Polytrichum (Pogon.) Macounii
» *erythrodontium*
Orthotrichum connectens
Racomitrium brevisetum
Macounii
robustifolium
Ulota scabrida
Webera columbica

De af D:r MÜLLER och mig gemensamt (C. M. et KINDB.) namngifna äro:

Amblystegium subcompactum
Brachythecium chloropterum
decursivifolium
lamprochryseum
leucoglaucum
platycladum
spurio-rutabulum
viridi-albicans
Brachythecium spurio-acuminatum
gemmascens
mirabundum
nanopes
digastrum
harpidioides
Eurhynchium semiasperum

Entodon (Cylindrothecium) acicularis
Macounii
pallidissimus
Heterocladium frullaniopsis
homoeopterum
(= *aberrans* REN. et CARD.?)
Homalia Macounii
Homalothecium sericeoides
Hypnum (Harpid.) conflatum
(Drep.) pseudo-fastigiatum
(Campyl.) unicostatum
byssirameum
decursivulum
(Limnob.) circulifolium
columbico-palustre
(Heterophyll.) flaccum
subflaccum
pseudo-drepanium
Leskea subobtusifolia
Lescuræa imperfecta
Plagiothecium aciculari-pungens
Pterigynandrum papillosulum
Pseudoleskea falcicuspis
malacoclada
Pylaisea ontariensis
filari-acuminata
Raphidostegium subadnatum

Atrichum rosulatum
Bartramia glaucoviridis
circinnulata
Barbula sparsidens
subicmadophila
melanocarpa
Barbula carnifolia
subcarnifolia
robustifolia
circinnatula
tortellifolia
horridifolia
subgracilis
chrysopoda
platyneura
oenea
papillinervis
brachyangia
lato-excisa
leptotricha
rotundo-emarginata
inclinatula
Bryum microglobum
Edwardsianum
oligochloron
capitellatum
lato-decurrens
micro-erythrocarpum
hæmatocarpum
pygmæo-alpinum
synoico-cæspiticium
microcephalum
heteroneuron
rubicundulum
anoectangiaceum
leucolomatum
hyalodontium
Cynodontium strumulosum
Distichium Macounii
Desmatodon subtorquescens
Dicranum leucobasis

Dicranum congestiforme
undulifolium
subpalustre
crispulum
plano-alare
Encalypta cucullata
subspathulata
Grimmia atricha
prolifera
pachyneurula
microtricha
Mnium decurrens
macro-ciliare
pseudo-lycopodioides
Orthotrichum lonchothecium
psilothecium
Racomitrium attenuatum
Ulota maritima
subulata
subulifolia
obtusiuscula
Weisia convoluta
Webera subcucullata
micro-apiculata
micro-denticulata
pycno-decurrens
microcaulon
canaliculata

Härtill komma tvenne nya arter af *Pseudoleskea* och en *Scouleria*, som ännu ej blifvit namngifna. Slutligen må några uppgifter anföras, som specielt intressera europeiska bryologer:

Brachythecium lætum är icke identisk med den europeiska art, som SCHIMPER dertill hänfört; den senare bör behålla sitt namn *Brachythecium luteolum* C. M.

Entodon (*Cylindrothecium*) *cladorhizans* är skild från den europeiska *E. Schleicheri*, såsom redan Prof. DEMETER visat i Revue bryologique.

Ulota phyllantha innefattar tvenne, både i Europa och Nordamerika funna arter, neml. *Ulota jutlandica* BRID. och *U. maritima* C. M. et KINDB.; den förra arten växer på träd, den senare på kustklippor, t. ex. vid Marstrand; båda arterna äro i Nordamerika funna med frukt, som hos den senare har ett bågböjdt skaft.

Hylocomium alaskanum LESQ. finnes äfven mångenstädes i Europas fjell, t. ex. på Dovre vid Kongsvold o. s. v., men synes vara densamma, som SCHIMPER kallat *Hylocomium splendens* var. *alpinum*.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 432.)

Földtani közlöny (Geologische Mittheilungen). K. 20(1890): F. 1—4. st. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1888. st. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 28: Entr. 3—6; 29: 1—6. 1889—90. 8:o.
» Indice de Vol. 1—29. 1890. 8:o.
Memoria del presidente. Periodo 18(1889/90). 8:o.
Calcutta. *R. Botanic garden.*
Annals. Vol. 2. 1889. 4:o.
KING, G., The species of Ficus of the Indo-Malayan- and Chinese countries. Vol. 2 & Appendix. Calcutta 1888—89. 4:o.
— *Asiatic society of Bengal.*
Journal. P. 1. Vol. 58(1889): N:o 2 & Suppl.; 59(1890): N:o 1—2; P. 2. Vol. 57(1888): 5; 58(1889): N:o 2—4; Suppl. 1—2; 59(1890): 1 & Suppl. 1. 8:o.
Proceedings. Year 1889: N:o 7—10; 1890: 1—3. 8:o.
Cambridge. *Cambridge philosophical society.*
Proceedings. Vol. 7: P. 1. 1889. 8:o.
Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Year 6(1889): P. 2; 7(1890): 1. 8:o
Charlottesville. *Leander Mc Cormick observatory of the university of Virginia.*
Publications. Vol. 1: P. 4. 1889. 8:o.
Cincinnati. *Observatory of the university.*
Publications. 10. 1890. 8:o.
Cincinnati. *Cincinnati society of natural history.*
Journal. Vol. 12: N:o 1—4. 1889/90. 8:o.
Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft.*
Schriften. 5. 1890. 4:o
Sitzungsberichte. Bd. 9: H. 1(1889). 8:o.
Edinburgh. *Royal society.*
Transactions. Vol. 33: P. 3; 35: 1—4. 1888—90. 4:o.
Proceedings. Vol. 15(1887/88) — 16(1888/89). 8:o.
Erlangen. *Physikalisch-medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 21(1889). 8:o.
Frankfurt a/M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Bericht. Jahr 1889/90. 8:o.
Giessen. *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Bericht. 27. 1890. 8:o.
Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. H. 26(1889). 8:o.
Greenwich. *Royal observatory.*
Introduction to the astronomical observations in the year 1887. 4:o.
Results of » » » » » » 4:o.

Results of to the magnetical and meteorological observations in the year 1887. 4:o.
Appendix to the Greenwich observations for the year 1887: 1—3. 1889. 4:o.

Haag. *K. Nederländska regeringen.*
Flora Batava. Afl. 287—290. Leiden 1889—90. 4:o.
Boerlage, J. G., Handleiding tot de Kennis der Flora van Nederlandsch Indië. D. 1: St. 2. Leiden 1890. 8:o.

Heidelberg. *K. Universität.*
Akademiskt tryck. 1889/90. 42 häften. 4:o & 8:o.

Helsingfors. *K. Universitetet.*
Akademiskt tryck. 1889/90. 23 häften. 4:o & 8:o.

Lansing. *State board of agriculture of the state of Michigan.*
Annual report. 28(1888/89). 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Bd. 25: N:o 5—7; 26: 7—8; 27: 1—2. 1889—90. st. 8:o.
= » Math.-phys. Classe. Bd. 15: N:o 7—8; 16: 1—2.
» Philol.-hist. Classe. Bd. 11: N:o 5—7.
Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Classe. Jahr 1889: 2—4; 1890: 1. 8:o.
Berichte über die Verhandlungen. Philol.-hist. Classe Jahr. 1889: 2—4.
Register zu den Berichten Jahrg. 1846—1885 und zu den Bänden 1—12 der mathematisch- physischen Classe. 1889. 8:o.

— *Fürstl. Jablonowski'sche Gesellschaft.*
Jahresbericht. 1890 März. 8:o.

Liverpool. *Liverpool biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 4(1889/90). 8:o.

London. *British association for the advancement of science.*
Report of meeting 59(1889), Newcastle-upon-Tyne. London 1890. 8:o.

— *Zoological society.*
Proceedings of the scientific meetings. Year 1890: P. 1—2. 8:o.

Madison. *Washburn observatory.*
Publications. Vol. 6: P. 1—2. 1890. 4:o.

Madrid. Comisión del mapa geológico de España.
Memorias: Gonsalo y Tarin, J., Descripcion . . . de la provincia de Huelva. T. 2. 1888. st. 8:o.
Mapa geológico de España $^{1}/_{400,000}$. Hoja 6, 8, 12, 16, 19—20, 23—24, 27—28, 31—32. 1889. F.

Minneapolis. *Minnesota academy of natural sciences.*
Bulletin. Vol. 3: N:o 1. 1889. 8:o.

Montreal. *Royal society of Canada.*
Proceedings. and transactions. Vol. 7(1889). 4:o.
Småskrifter. 3 st. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Bd. 61: 3; 62: 1—2; 63: 1. 4:o.
= Abhandlungen. Cl. 1. Philos.-philol. Bd 18: Abth. 3. 1890.
» » 2. Mathem.-phys. Bd 17: 1. 1889.
» » 3. Hist. Bd 19: 1—2. 1889—90.

= Abhandlungen Philos.-philol.-hist. Classe. Jahr 1889, Bd 2: H. 2; 1890: Bd. 1: H. 1—3; 2: 1. 8:o.
Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1889: 3; 1890: 1—3. 8:o.
Almanach. Jahr 1890. 16:o.
New York. *American museum of natural history.*
Annual report. 42(1889/90). 8:o.
Nordamerika. *United states. American association for the advancement of sciences.*
Meeting 38(1889), Toronto, Proceedings. 8:o.
Noothfield. U. S. *Carleton college observatory.*
Publications. 1. 1890. 4:o.
Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd. 8: Bogen 8—13. 1890. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1889. 8:o.
Odessa.
Sapiski. T. 14: B. 2. 1889. 8:o.
» Matematiska afdelningen. T. 10. 1889. 8:o.
Paris. *Bureau international des poids et mesures.*
Travaux et mémoires. T. 7. 1890. 4:o.
Comptes rendus des séances de la 1:e conférence générale des poids et mesures, 1889. 1890. 4:o.
Philadelphia. *Wagner free institute of science.*
Transactions. Vol. 3. 1890. 4:o.
— *American entomological society.*
Transactions. Vol. 16(1889): N:o 3—4; 17(1890): 1. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 27: N:o 131; 28: 132—133. 1888—89. 8:o.
Regensburg. *K. Bayerische botanische Gesellschaft.*
Denkschriften. Bd. 6. 1890. 4:o.
Rio de Janeiro. *Imperial observatorio.*
Annaes. T. 4: P. 1—2. 1889. 4:o.
Revista. Anno 4(1889). N:o 1—12. 8:o.
Rostock. *K. Universität.*
Akademiskt tryck. 1889/90. 50 häften. 4:o & 8:o.
San Francisco. *California academy of sciences.*
Proceedings. (2) Vol. 2(1889). 8:o.
S:t Petersburg. *Societas entomologica Rossica.*
Trudi. — Horæ. T. 24(1889/90). 8:o.
Verona. *Accademia d'agricoltura, arti e commercio.*
Memorie. (3) Vol. 64—65: F. 1—3. 1888—89. 8:o.
Washington. *U. S. Geological survey.*
Monographs. Vol. 15: 1—2; 16. 1889. 4:o.
Bulletin. N:o 54—57. 1889—90. 8:o.
Annual report. 8(1886/87). 1—2. st. 8:o.
— *Engineer department, U. S. Army.*
Report upon the U. S. geographical surveys west of the 100:th meridian. Vol. 1. Geographical report. 1889. 4:o.

— *U. S. Naval observatory.*
Observations. Year 1884. 4:o.
» » 1885: Appendix 1—2. 4:o.
— *Smithsonian institution.*
Smithsonian contributions to knowledge. Vol. 26. 1890. 4:o.
Annual report. 1885/86: P. 2; 1886/87: P. 1—2. 8:o.
— *National academy of sciences.*
Memoirs. Vol. 4: P: 2. 1889. 4:o.

Författarne.

NORDENSKIÖLD, A. E., Utkast till en Svensk antarktisk expedition. Sthm. 1890. 8:o.

ALBERT, PRINCE DE MONACO, Expériences de flottage sur les courants superficiels de l'Atlantique du nord. Paris 1890. 8:o.

BREUER, A., Übersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Th. 1. Hannover. 8:o.

FRITSCHE, H., On chronology and the construction of the calendar, with special reference to the Chinese computation of time . . . St. Petersburg. 1886. 8:o.

PLATEAU, F., Les Myriopodes marins et la résistance des Arthropodes à respiration aërienne à la submersion. Paris. 18 8:o.

SEOANE, V., Nouvelle espèce de Batracien anoure des îles Philippines. Paris 1890. 8:o.

YARKOVSKI, J., Hypothèse cinétique de la gravitation universelle en connexion avec la formation des éléments chimiques. Moscou 1888. 8:o.

Stockholm 1890. Kongl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 9.

Onsdagen den 12 November.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens ledamot, Professorn vid universitetet i Lund Christian Cavallin med döden afgått.

Från Kongl. Societeten i Victoria hade ankommit en skrifvelse, som redogör för de åtgärder, som från Australiens sida blifvit vidtagna för insamling af medel i och för den ifrågasatta antarktiska expeditionen, äfvensom för andra med denna expedition sammanhängande angelägenheter.

Anmäldes, att certifikater till de nya rikslikarne för mått och vigt blifvit genom Akademiens ledamot H:r Thalén från Paris hemförda och till Akademien öfverlemnade.

Till införande i Akademiens Handlingar antogos följande afhandlingar: 1:o) Untersuchungen über das Absorptionsspectrum des Broms von B. Hasselberg; 2:o) Längenbestimmungen zwischen den Sternwarten in Stockholm, Kopenhagen und Christiania, ausgeführt von C. F. Fearnley, F. C. Schjellerup und D. G. Lindhagen, bearbeitet von D. G. Lindhagen.

Den *Wallmarkska belöningen* tillerkändes Professorn vid Stockholms Högskola W. C. BRÖGGER för hans i Groths »Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie» införda afhandling: »Die Mineralien der Syenit-Pegmatitgänge der südnorwegischen Augit- und Nephelin-syenite».

Af *Regnells* för året disponibla *zoologiska gåfvomedel* tilldelades Professorerne S. LOVÉN och AURIVILLIUS hvardera 500 kr. för utförande af arbeten inom deras afdelningar af Riksmuseum, Filos. Licentiaten E. LÖNNBERG 400 kr. för bearbetning af vissa crustaceer i Riksmusei samlingar, samt Professorn vid Stockholms Högskola W. LECHE 500 kr. till arvode åt ett tillfälligt biträde vid hans företagna undersökningar öfver ryggradsdjurens tänder.

Det *Beskowska stipendiet* för året fann Akademien icke anledning att utdela, utan skulle, jemlikt gällande föreskrift för detta stipendium, årsräntan af donationsfonden läggas till kapitalet.

H:r Friherre NORDENSKIÖLD redogjorde för de arbeten, hvilka blifvit verkstälda af den expedition till Spetsbergen, som förliden sommar utförts af Fil. Kandidaten G. NORDENSKIÖLD och Frih. A. KLINCKOWSTRÖM med biträde af studeranden BJÖRLING, samt öfverlemnade ett af Professor W. NYLANDER på bekostnad af Frih. O. DICKSON i Paris utgifvet arbete »Lichenes Japoniæ», utgörande en bearbetning af de lafsamlingar som D:r E. ALMQVIST hopbragt under Vega-expeditionens uppehåll i Japan.

Hr PETTERSSON meddelade resultaten af de arbeten, som utförts af den under förliden vinter företagna hydrografiska expedition i Skagerack och Kattegat.

Hr BRÖGGER dels redogjorde för innehållet af en uppsats af Fil. Kandidaten H. BÄCKSTRÖM: »Ueber angeschwemmte Bimsteine an Norwegischen Küsten (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.), dels meddelade en uppsats af skolläraren G. FLINK: Mineralogische Notizen. 3 (se Bihang etc.).

Hr MITTAG-LEFFLER inlemnade följande uppsatser: 1:o) »Om användande af oändliga determinanter inom teorien för lineära homogena differentialeqvationer» af Fil. Kandidaten H. VON KOCH*;

2:o) »Om ett enkelt fall af permanent rörelse med rotation» af D:r E. PHRAGMÉN*.

Hr HILDEBRANDSSON dels meddelade en uppsats af Fil. Kandidaten T. WIGERT: »Trombe de Wimmerby le 4 Juillet 1890» (se Bihang etc.), dels förevisade den af honom, W. KÖPPEN och G. NEUMAYR utgifna »Wolkenatlas».

Sekreteraren öfverlemnade följande inkomna uppsatser: 1:o) »Om oxidation af fenylmetyltriazolkarbonsyra. II. Fenyltriazolkarbonsyra och α-fenyltriazolkarbonsyrans konstitution» af Docenten J. A. BLADIN*; 2:o) »Om kumenylpropionsyrans konstitution. II» af Prof. O. WIDMAN*; 3:o) »Om omlagringarne från propyl till isopropyl inom kuminserien» af densamme*; 4:o) »Öfversigt af Smålands mossflora» af Hr R. TOLF (se Bihang etc.); 5:o) »Untersuchungen über die weichen Theile der s. g. überzähligen Strahlen an Hand und Fuss» af Fröken A. CARLSSON (se Bihang etc.).

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Upsala. *Meteorologiska Observatorium.*
Bulletin mensuel. Vol. 21 (1889). 4:o.

Kristiania. *K. Norsk meteorologisk Institut.*
Jahrbuch. Jahr 1888. Fol.
Oversigt over Luftens Temperatur og Nedbören i Norge i Aaret 1889. 8:o.

Batavia. *Magnetical and meteorological observatory.*
Observations. Vol. 11 (1888). 4:o.
Rainfall in the East Indian Archipelago. Year 10 (1888). 8:o.

Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1889: H. 1–2. 4:o.
Witterung. 1889: 1–8, 10–12. Fol.

— *Meteorologische Abtheilung des forstlichen Versuchswesens in Preussen.*
Beobachtungs-Ergebnisse der . . . forstlich-meteorologischen Stationen. Jahrg. 15 (1889): N:o 1–12. 8:o.
Jahresbericht üder die Beobachtungs-Ergebnisse . . . Jahrg. 15 (1889). 8:o.

— *Berliner Zweigverein der Deutschen meteorologischen Gesellschaft.*
[Jahresbericht.] 1885. 8:o.

Bern. *Departement des Innern, Abth. Bauwesen. — Département fédéral de l'Intérieur, Section des travaux publics.*
Schweizerische hydrometrische Beobachtungen. Tabellarische Zusammenstellung der Haupt-Ergebnisse. 1886.

Bern. *Departement des Innern, Abth. Bauwesen. — Département fédéral de l'Intérieur, Section des travaux publics.*

Observations hydrométriques Suisses. Table de récapitulation . . . 1886. Fol.

Graphische Darstellung der Schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. 1889: 1a, 1b, 2a, 2b, 2c, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.

Tableau graphique des observations hydrométriques Suisses. 1889: 1a, 1b, 2a, 2b, 2c, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.

Graphische Darstellung der Lufttemperaturen und der Niederschlagshöhen. 1889: 1—3. Fol.

Tableau graphique des températures de l'air et des hauteurs pluviales. 1889: 1—3. Fol.

Bombay. *Government observatory.*

Brief sketch of the meteorology of the Bombay presidency. 1887/88—1889/90. Fol.

Bordeaux. *Commission météorologique de la Gironde.*

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le dép. de la Gironde. 1886/87. 8:o.

Bucuresci. *Institut météorologique de Roumanie.*

Annalele. — Annales. T. 3 (1887). 4:o.

Budapest. *K. Ungarische Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*

Jahrbücher. Bd 17 (1887). 4:o.

Buenos Aires. *Oficina meteorológica Argentina.*

Anales. T. 7. 1889. 4:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Jahrbuch. 1887: Abth. 1—3; 1888: 1—3. 4:o.

Decaden- und Monatsberichte aus den an 11 Stationen 2:r Ordnung angestellten meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1889: N:o 1—12. Fol.

Vorläufige Mittheilung. [1888: 1—2.] 4:o.

Hoppe, H., Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen [1888]. Dresden. 8:o.

Schreiber, P., Die Theilnahme Sachsens an den meteorologischen Forschungen. Dresden 1889. 8:o.

Coimbra. *Observatorio meteorologico e magnetico da universidade.*

Observaçóes meteorologicas. Anno 1889. Fol.

Des Moines, U. S. *Iowa weather service.*

Report. 1878—80; 1882—85; 1887. 8:o.

Hinrichs, G., The Iowa weather service assaulted by the Iowa University and the Signal service, because a few beams of light were thrown upon these dark institutions. 8:o.

Dorpat. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*

Witterungs-Beobachtungen für Luftdruck, Temperatur, Wind, Bewölkung und Niederschlag nebst Tagesmitteln. Jahr 1881—83. 4:o.

Weihrauch, K., Fortsetzung der Neuen Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie. 1890. 4:o.

(Forts. å sid. 480.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

186. Om oxidation af fenylmetyltriazolkarbonsyra. II. Fenyltriazoldikarbonsyra och α-fenyltriazolkarbonsyrans konstitution.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 12 November 1890 genom P. T. Cleve.]

Fenyltriazoldikarbonsyra.

```
        C6H5—N—N
             |  ||
     HOOC—C   C—COOH.
            \ /
             N
```

I mitt förra meddelande[1]) har jag beskrifvit fenyltriazoldikarbonsyrans sura kaliumsalt, hvilket erhölls vid försigtig tillsats af saltsyra till den lösning, som innehöll oxidationsprodukten, som bildats vid oxidation af fenylmetyltriazolkarbonsyran medels kamäleon i utspädd kalilösning. Jag nämde äfven då, att den fria syran är mycket obeständig och lätt afger kolsyra och därvid öfvergår i en fenyltriazolmonokarbonsyra, som jag i nämde uppsats närmare beskrifvit. Detta har jag vid fortsatta försök funnit bekräftadt; man kan ej erhålla den fria dikarbonsyran i rent tillstånd, om den ens öfver hufvud taget kan existera annat än i sina salter och eterarter.

För att framställa den fria syran gjordes följande försök. Några gram af det sura kaliumsaltet pulveriserades och försattes med vatten, hvarpå blandningen fick stå vid vanlig temperatur

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1890 N:o 6, sid. 295.

under ungefär ett dygn. Därvid löstes en del. Det olösta affiltrerades, och filtratet surgjordes med litet saltsyra. Efter en stund började ett fint kristalliniskt pulver afskilja sig, och små gasblåsor bortgingo; utkristalliseringen fortgick i flera timmar. Både det först afskilda och det sist utkristalliserade (detta sist nämda bestod af tydliga nålar, under det att det förra bildade ett fint kristallpulver, som under mikroskop visade sig bestå af tafvelformade kristaller) smälte under stark gasutveckling vid 180—181° C., och bägge visade en kväfvehalt af 22,2 % resp. 22,5 %; fenyltriazolmonokarbonsyran håller 22,2 % N. Bägge öfverfördes i metyleter, och denna smälte vid 116—117° C. Efter omkristallisering ur vatten i profrör bildade bägge fina, spröda nålar af samma smältpunkt 184° C.[1]). Af detta försök framgår dels, att fenyltriazoldikarbonsyran i lösning redan vid vanlig temperatur afger kolsyra och öfvergår i en monokarbonsyra, dels att samma monokarbonsyra bildas, vare sig att dikarbonsyran förlorar kolsyra vid vanlig temperatur eller vid uppvärmning.

För att emellertid bringa dikarbonsyran så fort som möjligt i fast form ur lösningen försattes en koncentrerad lösning af kalium-ammoniumsaltet med saltsyra. Därvid stelnade lösningen af afskilda fina nålar, men betydligt med gas bortgick, hvilket bevisade, att äfven nu dikarbonsyran åtminstone delvis sönderdelats. Äfven ur koncentrerade lösningar af alkalisalterna kan således ej den fria dikarbonsyran, åtminstone ej i rent tillstånd, afskiljas.

Äfven salterna sönderdelas lätt. Det sura kaliumsaltet afger vid kokning lätt kolsyra, ja till och med vid vanlig temperatur i vattenlösning vid längre stående, hvilket ses däraf, att gasblåsor bildas i lösningen. Äfven det neutrala kalium-ammoniumsaltet afger i vattenlösning på vattenbad jämte ammoniak äfven kolsyra. Af en sådan lösning, som fått stå några timmar på vattenbad, skulle det neutrala kopparsaltet framställas, men vid tillsats

[1]) Fenyltriazolkarbonsyran kristalliserar ur kokande vattenlösning än i långa, spröda nålar, än i silfverglänsande blad.

af kopparsulfat till lösningen erhölls i stället fenyltriazolmonokarbonsyrans svårlösliga, otydligt kristalliniska kopparsalt, som vid analys gaf 14,4 % Cu; beräknadt 14,4 %. De neutrala kalcium-, barium- och kopparsalterna kunna ej heller utan delvis skeende sönderdelning omkristalliseras. Det neutrala kaliumsaltet (och antagligen äfven det neutrala natriumsaltet) är emellertid beständigt och sönderdelas ej i lösning vid kokning. Också eterarterna äro beständiga; så smälter dimetyletern utan den ringaste sönderdelning vid 167° C. och kan omkristalliseras ur kokande alkohol.

Neutrala salter af fenyltriazoldikarbonsyran.

Kaliumsaltet är ytterst lättlösligt i vatten.

Kalium-ammoniumsaltet erhålles, om det sura kaliumsaltet löses i ammoniak och lösningen försättes med alkohol. Dubbelsaltet faller då ut i form af en amorf massa. Det är mycket lättlösligt i vatten. Vid kokning med vatten sönderdelas detsamma och öfvergår i fenyltriazolkarbonsyrans kaliumsalt. Äfven vid upphettning vid 100° C. sönderdelas detsamma.

Kalcium- och bariumsalterna äro också lättlösliga.

Silfversaltet, $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2Ag)_2 + {}^1/_2H_2O$(?), erhölls genom tillsats af silfvernitrat till en fullt neutral lösning af noga uttvättadt surt kaliumsalt i ammoniak. Det bildar en hvit, volyminös, amorf, svårlöslig fällning. Saltet sönderdelas vid 100° C. De något för lågt funna analytiska talen torde bero dels därpå, att det sura kaliumsaltet, som användes vid framställningen, höll något litet monokarbonsyra, dels därpå, att saltet vid förbränning häftigt sönderdelas under utbredande af gula, illaluktande ångor. Analyserna visa emellertid otvätydigt, att saltet är neutralt. Saltet tycks hålla $^1/_2$ molekyl kristallvatten.

Analyser:

1. 0,2704 gr. lufttorkadt salt gaf vid förbränning 0,1264 gr. Ag.

2. 0,3387 gr. lufttorkadt salt aftog ej i vigt i exsickator äfven svafvelsyra, men förlorade vid 80° C. 0,0072 gr. och gaf vid förbränning 0,1567 gr. Ag.

	Beräknadt för $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2Ag)_2 + \frac{1}{2}H_2O$.	Funnet 1.	2.
Ag	47,4	46,7	46,3
$^1/_2H_20$	2,0	—	2,1.

Kopparsaltet, $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2)_2Cu + 4H_2O$, kristalliserar bäst af de undersökta salterna och är i vatten tämligen svårlösligt. Det framställdes genom tillsats af kopparsulfat till en utspädd fullt neutral lösning af kalium-ammoniumsaltet. Snart utkristalliserar saltet i små vackert blåa nålar, hvilka hålla 4 molekyler kristallvatten, hvilka visserligen bortgå vid 100° C., men saltet sönderdelas därvid och antar en vackert grön färg. Lufttorkadt salt analyserades.

1. 0,2511 gr. gaf vid förbränning 0,0543 gr. CuO (motsv. 0,04334 gr. Cu).

2. 0,2260 gr. gaf på samma sätt 0,0490 gr. CuO (motsv. 0,03911 gr. Cu).

3. 0,2334 gr. gaf på samma sätt 0,0511 gr. CuO (motsv. 0,04080 gr. Cu).

4. 0,1531 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 15,5 ccm. N-gas, mätt öfver kali vid 747 mm. bar. tr. och 15,6° C.

	Beräknadt för $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2)_2Cu + 4H_2O$.	Funnet 1.	2.	3.	4.
N	11,5	—	—	—	11,8
Cu	17,3	17,3	17,3	17,5	—

Fenyltriazoldikarbonsyrans eterarter.

Dimetyletern, $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2 . CH_3)_2$, framställdes ur det neutrala silfversaltet och CH_3J. Silfversaltet torkades vid 60° C., pulveriserades och kokades en stund med öfverskott af CH_3J, hvarvid AgJ lätt bildades vid vanlig temperatur egde ingen

inverkan rum. Eterarten utdrogs medels kokande alkohol, den svagt gula lösningen koncentrerades, och vid afsvalning afsatte sig hårda, bladiga kristaller. Stundom, då lösningen var mycket koncentrerad, och utkristalliseringen skedde hastigt, afskilde sig föreningen i form af ytterst fina böjliga nålar. Den renades genom några omkristalliseringar ur alkohol.

Analyser:

1. 0,2084 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,4250 gr. CO_2 (motsv. 0,11591 gr. C) och 0,0908 gr. H_2O (motsv. 0,01009 gr. H).

2. 0,2084 gr. gaf på samma sätt 0,4232 CO_2 (motsv. 0,11542 gr. C) och 0,0900 gr. H_2O (motsv. 0,01000 gr. H).

3. 0,1960 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 26,7 ccm. N-gas, mätt öfver kali vid 762 mm. bar. tr. och 16,2° C.

	Beräknadt.		Funnet,		
			1.	2.	3.
C_{12}	144	55,2	55,6	55,4	—
H_{11}	11	4,2	4,8	4,8	—
N_3	42	16.1	—	—	16,2
O_4	64	24,5	—	—	—
	261	100,0			

Föreningen är tämligen löslig i eter och alkohol och kristalliserar ur detta senare lösningsmedel i hvita, hårda, bladiga kristaller, som smälta vid 167° C. utan sönderdelning.

Dietyletern, $C_6H_5 . C_2N_3(CO_2 . C_2H_5)_2$, framstäldes på samma sätt som dimetyletern ur silfversaltet och C_2H_5J. Efter fulländad reaktion utdrogs eterarten med eter. Efter eterns afdunstning kvarblef en nästan färglös olja, som småningom stelnade. Föreningen är svår att rena, ty den afskiljer sig ur lösningsmedlen såsom en olja. Enda sättet att få den samma att afskilja sig kristalliniskt ur lösningen är att lösa föreningen i eter och försätta lösningen med ofvan 100° C. kokande gasolja, tills en svag grumling uppstår, och sedan låta etern vid vanlig temperatur frivilligt afdunsta.

Analys:

0,1710 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 21,6 ccm. N-gas, mätt öfver kali vid 743 mm. bar. tr. och 17,0° C.

	Beräknadt.		Funnet.
C_{14}	168	58,1	—
H_{15}	15	5,2	—
N_3	42	14,5	14,6
O_4	64	22,2	—
	289	100,0	

Föreningen är mycket lättlöslig i eter, alkohol och benzol, svårlöslig i gasolja. Ur eterlösning försatt med gasolja, afskiljer den sig vid lösningsmedlets frivilliga afdunstning i form af ytterst fina, böjliga nålar af smältpunkt 81,5° C. Dimetyleterns smältpunkt ligger således betydligt högre än dietyleterns.

α-Fenyltriazolkarbonsyrans konstitution.

I mitt förra meddelande[1]) uttalade jag den förmodan, att α-fenyltriazolkarbonsyran hade konstitutionen,

```
      C6H5—N—N
           |  ||
   HOOC—C  CH,
          \\ /
           N
```

utan att dock kunna lemna några bevis därför. Visserligen sökte jag för att bevisa syrans konstitution att oxidera fenylmetyltriazol,

```
   C6H5—N—N
        |   |
       HC   C—CH3,
        \\ /
          N
```

men därvid erhölls ej någon enhetlig produkt, utan oxidationen tycktes ha sträckt sig ända till kväfvekärnan, så att denna blifvit

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 6, sid. 295.

sprängd, hvarpå också den vid oxidationen utvecklade ammoniaken häntydde. Jag har emellertid nu lyckats att på ett annat sätt framställa nämda monokarbonsyra, hvilket tillfullo bevisar, att syrans konstitution verkligen är den af mig förmodade.

Jag har för några år sedan[1]) beskrifvit en förening, $C_9H_8N_4O$, som jag erhöll genom kokning af dicyanfenylhydrazin med myrsyra, och hvilken sannolikt är dicyanfenylhydrazins formylderivat,

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-NH\,.\,CHO \\ \qquad\;\;| \\ NC-C=NH. \end{array}$$

Kunde nu denna förening genom förlust af vatten öfverföras i en triazolförening, nämligen fenylcyantriazol,

$$\begin{array}{c} C_6H_5-N-N \\ \quad\;\; | \quad\; \| \\ NC-C \quad CH, \\ \diagdown\;\diagup \\ N \end{array}$$

så vore det lätt att af denna genom saponifiering erhålla en fenyltriazolkarbonsyra, som måste hafva konstitutionen,

$$\begin{array}{c} C_6H_5-N-N \\ \qquad\quad | \quad\; \| \\ HOOC-C \quad CH. \\ \diagdown\;\diagup \\ N \end{array}$$

således samma som den för α-fenyltriazolkarbonsyran förmodade. För att på denna väg komma till en sådan syra, gjordes följande försök.

Några gram dicyanfenylhydrazin kokades en stund med öfverskott af myrsyra, hvarpå myrsyran till stor del afdunstades på vattenbad. Återstoden försattes med alkohol, och blandningen fick vid vanlig temperatur frivilligt afdunsta. Den kvarvarande gulbruna smetiga kristallmassan tvättades med litet alkohol, då den bruna smetiga substansen till största delen aflägsnades. Kristallerna löstes i alkohol, och kalilut tillsattes i något öfverskott. Vid kokning antog lösningen en något i grönt stötande

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 6, sid. 155.

mörk färg, och ammoniak bortgick i mängd. Efter en stunds kokning tillsattes vatten, och alkoholen afdunstades. Efter den numera gulbruna lösningens afsvalning tillsattes saltsyra i ringa öfverskott, hvarvid en brunaktig kristallmassa genast afskilde sig. Denna löstes i utspädd ammoniak, hvarvid ett smutsgult pulver stannade olöst, hvilket affiltrerades. Filtratet surgjordes med litet saltsyra, de därvid afskilda smutsgula kristallerna löstes i kokande vatten, hvari de voro tämligen svårlösliga. Vid afsvalning utkristalliserade gula spröda nålar, som smälte under stark gasutveckling vid 183—184° C. För bortskaffande af den gula färgen löstes föreningen i litet kalilut, och lösningen kokades en stund med litet kamäleonlösning. Öfverskott af permanganat förstördes med litet alkohol, och det färglösa filtratet surgjordes med litet saltsyra, då fullkomligt färglösa nålar afskilde sig, som omkristalliserades ur kokande vatten, hvarvid föreningen afskilde sig i silfverglänsande blad, som under stark gasutveckling smälte vid 184° C.

Analys:

0,1335 gr. förbrändes med kopparoxid och gaf 25,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 750,5 mm. bar. tr. och 17,5° C.

	Beräknadt för $C_6H_5 . C_2N_3H . CO_2H$.	Funnet.
N	22,2	22,2.

En del af substansen öfverfördes i metyleter (ur silfversaltet och CH_3J), hvilken kristalliserade ur alkohol i prismatiska kristaller af smältpunkt 117—117,5° C. Den erhållna syran är således identisk med den ur fenyltriazoldikarbonsyran genom kolsyreafspaltning erhållna s. k. α-fenyltriazolkarbonsyran, hvilken således har formeln,

```
       C6H5—N—N
            |   ||
  HOOC—C   CH.
           \  /
            N
```

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

187. Om kumenylpropionsyrans konstitution. II

Af Oskar Widman.

[Inlemnadt den 12 November 1890 genom P. T. Cleve.]

Den experimentella undersökning, som jag beskrifvit i föregående uppsats med samma titel[1]), ledde till slutsatsen, att den vid 75,5° smältande kumenylpropionsyran:

$$C_3H_7 . C_6H_4 . CH_2 . CH_2 . COOH$$

är ett isopropylderivat. Såsom jag redan då påpekade, står detta dock i bestämd strid med det resultat, till hvilket jag förut kommit vid studiet af o-nitropropylkanelsyrans derivat. För att lösa denna motsägelse har jag nu utfört en förnyad undersökning af denna sistnämnda syra i afsigt att ur densamma steg för steg eliminera nitrogruppen och sålunda framkomma till en »kumenylpropionsyra» med normal propylgrupp, hvarmed man kunde vinna ett afgörande svar på den föreliggande frågan. För denna undersökning och det därvid erhållna, i sjelfva verket afgörande svaret skall jag i det följande redogöra.

De iakttagelser, som talade för att »kumenylpropionsyran» innehölle en normal propylgrupp, voro följande. Vid reduktion af »ortonitropropylkanelsyra» först med ferrohydrat och därpå med natriumamalgam hade jag erhållit en »propylhydrokarbostyril», som således skulle innehålla normal propyl. Alldeles samma förening erhölls äfven, då det isomera isopropylderivatet, ortonitrokumenylakrylsyra, behandlades på analogt sätt. Här

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 7, p. 447.

måste man således antaga, att en omlagring egt rum från isopropyl till normal propyl och på i en föregående uppsats närmare utvecklade grunder vid akrylsyrerestens öfvergång i en propionsyrerest, d. v. s. vid hydreringen. Då nu kumenylakrylsyran sjelf först hydrerades till »kumenylpropionsyra» och denna därpå nitrerades och reducerades, erhölls återigen samma propylhydrokarbostyril, som förut. Äfven här måste således en omlagring inom propylgruppen antagas hafva inträffat och ex analogia äfven nu vid hydreringen, d. v. s. vid kumenylpropionsyrans bildning, hvilken således borde vara ett normalt propylderivat.

Om man nu utginge från ortonitropropylkanelsyra, som ju redan på förhand innehöll normal propyl och ur densamma eliminerade nitro-, resp. amidogruppen, så måste man komma till idel normala propylderivat, då någon omlagring i riktning mot isopropyl därvid ej vore att befara och man kunde på detta sätt erhålla en syra af sammansättningen:

$$C_3H_7 . C_6H_4 . CH_2 . CH_2 . COOH,$$

som säkert innehölle normal propyl.

Jag framstälde därför en större kvantitet af den ytterst svårtillgängliga ortonitropropylkanelsyran och öfverförde denna direkt i amidosyran.

Då den vanliga metoden att genom diazotering direkt eliminera amidogrupper som bekant ofta slår fel, i det istället etoxylderivat bildas, och i hvarje fall är opålitlig, valde jag den vägen att först öfverföra amidosyran under användande af diazoreaktionen i brom- eller klorderivat för att sedan genom behandling med natriumamalgam eliminera halogenen. Jag använde denna metod äfven och först på ortoamidokumenylakrylsyra, för att möjliggöra en jämförelse mellan de båda isomera syrornas derivat.

Hvad först beträffar *ortobromkumenylakrylsyra:*

$$(CH_3)_2\overset{4}{C}H . C_6H_3 . \overset{2}{Br} . \overset{1}{C}H = CH . COOH,$$

så har jag, trots en mängd olika försök, utförda än med den starkaste (sp. v. 1,8), än med svagare (sp. v. 1,45) bromvätesyra,

än med, än utan kopparbromur, aldrig lyckats erhålla densamma fullt ren. Den smälte temligen oskarpt omkring 134° och innehöll att döma af analysen något oxisyra. Bromhalten var t. ex. vid 2 olika beredningar resp. 28,91 och 27,29 %, då formeln fordrar 29,74 %. Kroppen kristalliserar ur utspädd isättika i färglösa, långa, platta nålar.

Ortobromkumenylpropionsyra

$$(CH_3)_2\overset{4}{C}H . C_6H_3 . \overset{2}{B}r . \overset{1}{C}H_2 = CH_2COOH$$

erhålles lätt i fullkomligt rent tillstånd ur nyssnämda syra. 1 del kokas $^3/_4$ timme med 20 del. jodvätesyra (sp. v. 1,28) och 1 del röd fosfor. Efter produktens stelnande affiltreras jodvätesyran och det olösta behandlas efter affärgning med svafvelsyrlighet med ammoniak. Ur lösningen utfaller vid tillsats af klorvätesyra en hvit olja, som långsamt stelnar. Den löses lätt i kokande petroleumeter och kristalliserar därur vid afsvalning i långa fina nålar, som smälta skarpt vid 55,5°, en smältpunkt, som den behåller vid upprepade omkristallisationer.

Analys:

	Beräknadt för $C_{12}H_{15}BrO_2$:	Funnet:
C	53,14	53,48
H	5,53	5,88.

Vid reduktion med natriumamalgam öfvergår denna syra lätt i den bekanta vid 75,5° smältande kumenylpropionsyran.

Ortoklorkumenylakrylsyra

$$(CH_3)_2\overset{4}{C}H . C_6H_3\overset{2}{C}l . \overset{1}{C}H = CH . COOH .$$

Denna syra kan vida lättare erhållas i rent tillstånd än bromderivatet, sannolikt därför, att den är något svårlösligare och därför kristalliserar bättre. Ekvivalenta mängder amidokumenylakrylsyra och natriumnitrit löstes i minsta mängd natronlut och lösningen försattes med en tillräcklig mängd vanlig salt-

syra, utspädd med sin lika volym vatten. Denna lösning nedfördes nu i en kokande lösning af kopparklorur i ganska mycket rykande saltsyra. Den därvid utfallande syran var röd men affärgades vid omkristallisation ur utspädd isättika, hvarvid den kristalliserade i glänsande vid 133—134° skarpt och konstant smältande blad.

Analys:

	Ber. för $C_{12}H_{13}ClO_2$:	Funnet:
Cl	15,81	15,34.

Då nu *amidopropylkanelsyra* genom diazotering och följande sönderdelning med bromvätesyra öfverfördes i bromderivat, erhölls en kropp, som liknade ofvan beskrifna ortobromkumenylakrylsyra och såsom denna smälte oskarpt, dock något lägre (omkring 128°). Vid kokning med jodvätesyra och fosfor gaf den en produkt, som kristalliserade ur petroleumeter i vackra, långa platta nålar, hvilka smälte skarpt vid 55,5° eller precis vid samma temperatur, som ofvan beskrifna ortobromkumenylpropionsyra, hvarmed den tydligen är identisk.

Då detta resultat var alldeles oväntadt, föranleddes jag däraf att genom upprepade kristallisationer af ortoamidopropylkanelsyran, hvilken nu, såsom alla föregående gånger jag framställt densamma, smälte vid 154—155°, undersöka, om den möjligen kunde innehålla något af den vid 165° smältande ortoamidokumenylakrylsyran. Det befanns därvid, att smältpunkten snart steg ända till 165° och att det sålunda erhållna preparatet genom färg, kristallernas utseende m. m. visade en omisskännelig likhet med *ortoamidokumenylakrylsyra.* De första moderluterna gåfvo efter koncentration en kristallisation af smältpunkten 145°. Vid kristallisation af denna fraktion steg smältpunkten efterhand åter till 165°, men detta preparat var i början brunt, ej gult, och affärgades alltmer vid förnyade kristallisationer, tills det blef så godt som färglöst. Ur eter afskiljde sig kroppen i vackra kristaller än med 6-, än med 8-kantig begränsning, fullständigt liknande ett preparat af *metaamidokumenylakrylsyra.* Att sub-

stansen verkligen utgjordes af metasyra, bevisades dessutom däraf, att den vid uppvärmning med ättiksyreanhydrid gaf den förut af mig framstälda, vid 240° smältande metanitroamidokumenylakrylsyran.

Den till ofvanstående undersökning använda och af mig såsom »ortoamidopropylkanelsyra» uppfattade syran, utgjordes således i sjelfva verket af en blandning af orto- och metaamidokumenylakrylsyra, i hvilken den förra ingick till ungefär $^2/_3$, den senare $^1/_3$. På grund häraf var all anledning att misstänka, att »ortonitropropylkanelsyran» i sjelfva verket icke var annat än en blandning af omkring $^2/_3$ orto- och $^1/_3$ metanitrokumenylakrylsyra.

»Ortonitropropylkanelsyran» erhålles som bekant såsom biprodukt vid nitrering af kumenylakrylsyra, hvarvid hufvudsakligen bildas ortonitrokumenylakrylsyra och paranitrokanelsyra. Sedan den sistnämda blifvit aflägsnad genom upprepade utkokningar med benzol, då den stannar olöst, erhölls redan efter ett par omkristallisationer af den i lösningen befintliga substansen, ortonitrokumenylakrylsyran lätt ren. I moderlutarne från denna uppträdde emellertid en annan substans, hvars vidare förarbetning jag har beskrifvit på följande sätt[1]): »Die gesammten Mutterlaugen wurden stark concentrirt und abgekühlt. Dabei schied sich eine die fast ganze Flüssigkeit erfüllende, undeutlich krystallisirte Masse von graubrauner Farbe ab. Sie ist in Benzol sehr leicht löslich. Wird die Substanz mehrmals aus heissem Benzol umkrystallisirt, wird sie nach und nach entfärbt, die Löslichkeit wird vermindert und das Krystallisationsvermögen nimmt zu. Schliesslich schmilzt die Verbindung bei 122—123° und krystallisirt in zu Ballen vereinigten Nadeln.» »Bei drei auf einander folgenden Umkrystallisationen aus Benzol blieb sie ganz unverändert. Zur Controle wurde sie dessen ungeachtet noch einmal aus Alkohol krystallisirt; der Körper zeigte aber dabei denselben Schmelzpunkt.» Om kroppen utlät jag mig vidare på följande sätt: »Dass der Körper wirklich eine selbständige, von

[1]) Studien in der Cumiureihe, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Ser. III, 1885. p. 152.

den anderen beiden isomeren Nitrocumenylacrylsäuren verschiedene Verbindung ist, darf man wohl als unzweifelhaft ansehen. Das Metaderivat krystallisirt in bei 141° schmelzenden Tafeln, das Orthoderivat in bei 154° schmelzenden Nadeln, die sich nie zu Ballen vereinigen. An jenes erinnert die Verbindung gar nicht, besonders da sie eine gelbe Amidosäure ergiebt. Der Orthosäure steht sie zwar näher, da sie gleichzeitig mit dieser gebildet wird und da die Orthoamidosäure auch gelb gefärbt ist, unterscheidet sich aber davon scharf durch den um 31° niedrigeren Schmelzpunkt und einen anderen Habitus der Krystalle. Dass eine in der Orthonitrosäure vorhandene Verunreinigung den Schmelzpunkt herabdrücken und ihre Krystallisirung beeinflüssen würde, kann auch nicht angenommen werden, da die fragliche Verbindung an und für sich jedes Kennzeichen von Reinheit besitzt und es ganz unbegreiflich wäre, warum ein kleiner Theil der Orthonitrocumenylacrylsäure so ausserordentlich schwer sich reinigen lassen würde, während dass der grösste Theil durch nur eine oder höchstens zwei Krystallisationen ganz rein wird.»

På grund af dessa skäl måste jag uppfatta substansen såsom en enhetlig kropp och på vissa anförda grunder såsom ortonitropropylkanelsyra. Jag kan numera tillägga, att jag sedan dess upprepade gånger framställt såväl nitrosyran som amidosyran och alltjämt iakttagit samma smältpunkter och samma egenskaper i öfrigt, som jag angifvit vid deras första beskrifning och jag har aldrig — förrän nu — iakttagit ringaste antydan om, att blandningar i stället för kemiska individ förelågo[1]).

Emellertid är icke dess mindre *den s. k. ortonitropropylkanelsyran en blandning af ungefär två tredjedelar ortonitrokumenylakrylsyra och en tredjedel metanitrokumenylakrylsyra*, hvilket tydligen framgår utom af ofvan omnämda iakttagelse på

[1]) Då utbytet af nitrosyra är mycket dåligt (blott 3 procent af använd kumenylakrylsyra) har jag för undvikande af förlust alltid förut nöjt mig med att kristallisera amidosyran en gång ur benzol, hvilket jag ansåg mig tryggt kunna göra, då jag förut noga renat nitrosyran och då det vid reduktion af ortonitrokumenylakrylsyra med ferrohydrat visat sig, att amidosyran direkt erhålles ren.

amidoderivatet däraf, att om man sammanblandar 2 delar ren ortonitrokumenylakrylsyra med 1 del ren metanitrosyra, man erhåller en kropp, som vid omkristallisation ur benzol företer alldeles samma förhållande, som »ortonitropropylkanelsyran». Sedan den antagit ett homogent utseende har jag omkristalliserat den 3 gånger efter hvarandra utan att se någon förändring i smältpunkten, som i detta fall låg vid 125°.

Att tvenne isomera kroppar, som helt säkert icke äro isomorfa och till och med kristallisera i vidt skilda typer (den ena i nålar, den andra i taflor) således kunna sluta sig tillsammans till kristaller af särskild karaktär, med konstant smältpunkt, särskilda löslighetsförhållanden och åtminstone i stort sedt konstant sammansättning, är ett i hög grad anmärkningsvärdt förhållande, som är väl egnadt att vilseleda forskningen. Lyckligtvis torde sådana fall dock vara ytterligt sällsynta, om ock icke förut obekanta såsom t. ex. vid »a-tiofensulfonsyra» jämte »a-tiofensyra» och »α-diklornaftalin.»

Efter detta bortfaller emellertid hvarje skäl för antagandet, att kumenylpropionsyran skulle innehålla en normal propylgrupp. *Den vid 75,5° smältande kumenylpropionsyran är således otvifvelaktigt ett isopropylderivat.* Af samma anledning är ock den vid 134—135° smältande »propylhydrokarbostyrilen» ett isopropylderivat och kan lämpligen benämnas hydrokumostyril. Slutligen är ock den syra, som jag jämte ortonitrokuminsyra (resp. ortonitrooxiisopropylbenzoësyra) erhöll vid oxidation af »ortonitropropylkanelsyran», och som jag till följd af bildningssättet uppfattade såsom ortonitropropylbenzoësyra, intet annat än metanitrokuminsyra, hvarmed ock den funna smältpunkten 156—157,5° väl öfverensstämmer.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 464.)

Fiume. *K. K. Marine-Akademie.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1889: 1—12. 8:o.

Genève et le Grand Saint-Bernhard. [*Stations.*]
Résumé météorologique par A. KAMMERMANN. 1888. 8:o.

Habana. *R. Colegio de Belen de la compañia de Jesus.*
Observaciones magnéticas y meteorológicas. 1887: Sem. 2; 1888: 1. Fol.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Wetterbericht. Jahrg. 14(1889): N:o 1—365. Fol.
» Korrekturen und Nachträge. 1889: 1—7. Fol.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 11(1888). 4:o.
Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte. Jahrg. 12(1889). 4:o.
Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. H. 3. 1890. 4:o.
Monatsbericht. Jahrg. 14(1889): 1—12 & Beiheft 1—3. 8:o.

Helsingfors. *Finska Vetenskapssocieteten.*
Meteorologiskt Veckoblad. Vol. 1(1889): N:o 8—41; 43—52. Fol.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Jahresbericht. Jahr 1889: Th. 2. 4:o.

Kiel. *Ministerial-Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere.*
Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den Deutschen Küsten. Jahrg. 1888: H. 10—12; 1889: 1—9. Tv. 4:o.

Kjöbenhavn. *Dansk Meteorologisk Institut.*
Maanedsoversigt. Aar 1889: 1—12. Fol.
Bulletin météorologique du nord. Année 1889: 1—12. Tv. 4:o.

Krakau. *K. K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1889: 1—12. 8:o.

— *K. Vetenskaps-Akademiens meteorologiska section.*
Materijały do klimatografii Galicyi. Rok 1889. 8:o.
Stan wody na rzekach Galicyiskich oraz opad atmosferyczny według spostrzezeń. Rok 1887—88. 8:o.

London. *Meteorological office.*
Daily weather report. Year 1889: N:o 1—365; Corrections 1889: 1—3; 5—11. 4:o.
Weekly weather report. 6(1889): 1—52; Appendix 1—4. 4:o.
Summary of the observations made at the stations included in the Daily and Weekly weather reports. 1888: 4—9; 1889: 1—12. 4:o.
Official publications. N:o 50: P. 1—2; 76: Suppl., 83,89. 1889—90. 4:o.
Report of the meteorological council to the Royal Society. 1889 $^{31}/_{3}$. 8:o.
SCOTT, R. H., The variability of the temperature of the British Isles 1869—1883. 1890. 8:o.

— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 15(1889). 8:o.
Meteorological record. Vol. 9(1889): N:o 33—36. 8:o.
List of fellows. 1890 $^{1}/_{3}$. 8:o.

Lyon. *Observatoire.*
Metéorologie Lyonnaise. 1883/84—1886/87. 4:o.
ANDRÉ, CH., Influence de l'altitude sur la temperature. 1887. 8:o.

(Forts. å sid. 492.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

188. Om omlagringarne från propyl till isopropyl inom kuminserien.

Af Oskar Widman.

[Meddeladt den 12 November 1890 genom P. T. Cleve.]

I en föregående uppsats[1]) har jag uppvisat, att om man i de båda analogt sammansatta föreningarne:

$$C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_3 & 1 \end{cases} \qquad C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_2 . CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$$

β-cymolsulfamid och p-dipropylbenzolsulfamid

genom en alldeles analogt utförd oxidationsprocess öfverför de i paraställning till propyl stående grupperna i karboxyl, en omlagring från propyl till isopropyl inträffar, då metyl, men icke, då propyl oxideras. Alldeles detsamma blir för öfrigt förhållandet, då kolvätena sjelfva oxideras. Cymol ger, som bekant, (i alkalisk lösning) alltjämt isopropylderivat, i det alltefter oxidationsmedlets art antingen kuminsyra eller oxiisopropylbenzoësyra bildas. p-Dipropylbenzol och p-propylisopropylbenzol gifva däremot båda (vid oxidation med utspädd salpetersyra) p-propylbenzoësyra, men intet isopropylderivat. Den frågan uppställer sig då af sig sjelf: huru blir förhållandet, om i stället för metyl och propyl en i samma ställning befintlig *etyl*grupp, som ju i sammansättning ligger midt emellan dessa båda grupper, oxideras till karboxyl? Besvarandet

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 7, p. 463.

af denna fråga har varit målet för den undersökning, som i det följande skall beskrifvas.

Paraetylpropylbenzol.

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{ll} CH_2 \, . \, CH_2 \, . \, CH_3 & 4 \\ CH_2 \, . \, CH_3 & 1 \end{array}\right.$$

Utgångsmaterial för undersökningen har varit det förut icke framstälda kolvätet, paraetylpropylbenzol. I och för dess framställning har jag utgått från brombenzol och enligt FITTIGS utmärkta metod genom inverkan af propylbromid och natrium närmast öfverfört denna i propylbenzol. Genom bromering under stark afkylning och vid närvaro af jod framställdes därur parabrompropylbenzol. Kokpunkten på denna kropp fann jag ligga vid 216—217° (okorr.) eller vid 222—223° (korr.) under 758 mm. tryck. R. MEIJER[1]), som förut framstält samma kropp, anger kokpunkten till 220° (korr.).

Då nu 57 gr. brompropylbenzol (utbyte af ursprungligen 100 gr. brombenzol) behandlades med brometyl och natrium, erhölls efter en rad omdestilleringar öfver natrium 16 gr. ren paraetylpropylbenzol. Kolvätet kokade konstant vid 196—199° (okorr.) eller vid 202—205° (korr.) under ett barometertryck af 765 mm. och egde en specifik vigt af 0,867 vid 19° C. Lukten var angenäm och erinrade temligen nära om cymols. Analysen gaf följande resultat:

	Beräknadt:		Funnet:
C_{11}	132	89,19	88,39
H_{16}	16	10,81	10,87
	148	100,00.	

Etylpropylbenzols oxidationsprodukter.

Erfarenheten har gifvit vid handen, att propylbenzoësyra, då den utsättes för inverkan af alkaliska oxidationsmedel såsom t. ex. kaliumpermanganat i alkalisk lösning, jämförelsevis mycket lätt öfvergår i tereftalsyra, under det att däremot kuminsyra

[1]) Journ. f. pr. Chem. [2] Bd. 34, p. 101.

under samma förhållanden är vida mera beständig och hufvudsakligen blott oxideras till oxiisopropylbenzoësyra. Propylbenzoësyra är däremot särdeles beständig vid inverkan af utspädd salpetersyra. Om man således vill afgöra, om ett hithörande kolväte vid oxidation ger isopropylderivat, bör man oxidera i alkalisk lösning, vill man åter konstatera, att ingen omlagring vid oxidationen eger rum eller med andra ord undersöka om detsamma vid oxidation ger propylbenzoësyra, bör man oxidera med utspädd salpetersyra. Jag har underkastat etylpropylbenzol oxidation på båda sätten.

Då densamma behandlades med kameleonlösning i vare sig starkt eller svagt *alkalisk lösning*, visade det sig, att kolvätet icke angripes däraf i köld, men väl, om ock långsamt, vid kokning och att produkten uteslutande utgöres af *tereftalsyra*. Vid produktens destillation med vattenångor gick ingen flyktig syra (kuminsyra eller propylbenzoësyra) öfver och icke häller kunde något spår af den ur hett vatten i långa nålar kristalliserande, ganska lättsmälta (155°) oxiisopropylbenzoësyran upptäckas. Etylpropylbenzol förhåller sig således vid oxidation i alkalisk lösning helt annorlunda än cymol och redan detta försök visar, att någon omlagring inom propylgruppen icke inträffar, då etylgruppen oxideras till karboxyl.

I ett annat försök kokades kolvätet under 10 à 12 timmar *med utspädd salpetersyra* af 1,07 eg. v., hvarefter lösningen destillerades i vattengasström. Härvid öfverdestillerade en syra, som stelnade i platta nålar och smälte direkt vid 117—118°. Efter några omkristallisationer ur utspädd alkohol steg emellertid smältpunkten till 139° och kroppen kristalliserade då i blad samt visade i allo *propylbenzoësyrans* egenskaper och sammansättning. Analysen gaf följande tal:

	Beräknadt:		Funnet:
C_{10}	120	73,17	73,24
H_{12}	12	7,32	7,45
O_2	32	19,51	—
	164	100,00.	

Syran öfverfördes för öfrigt i ett bariumsalt, hvilket kristalliserade i glänsande blad, temligen svårlösliga i vatten. Saltet visade sig vid analys innehålla 2 molekyler kristallvatten och öfverensstämmer således med det af PATERNÒ & SPICA[1]) beskrifna *bariumpropylbenzoatet.* Vid analys erhölls följande tal:

	Ber. för $[C_9H_{11}.COO]_2Ba + 2H_2O$:	Funnet:
Ba	27,45	27,95
H_2O	7,21	7,31.

Att oxidationsprodukten från början visar så låg smältpunkt, beror därpå, att samtidigt äfven en annan syra bildas, hvilken återfinnes i moderlutarne och smälter omkring 113°. Denna har helt säkert blifvit bildad genom *propyl*gruppens oxidation och är tydligen intet annat än paraetylbenzoësyra, hvilken syra ock af ASCHENBRANDT uppgifves smälta vid 112—113°.

Vid oxidation med utspädd salpetersyra förhåller sig således etylpropylbenzol alldeles såsom paradipropylbenzol och parapropylisopropylbenzol, i det propylbenzoësyra bildas. Däremot tager en på liknande sätt utförd oxidation af cymol ett annat förlopp, i det här såsom såväl flere andra forskare, som jag sjelf funnit, propylgruppen i första hand angripes och blott paratoluylsyra (jämte tereftalsyra) uppstår.

Detta försök visar således positivt detsamma, som det förra visade negativt, nämligen att någon omlagring inom propylgruppen icke eger rum, då en i paraställning befintlig etylgrupp oxideras till karboxyl.

Till samma slutsats har jag för öfrigt äfven kommit på ett annat sätt.

Som bekant hafva I. REMSEN och W. C. DAY[2]) framstält β-cymolsulfamid

$$C_6H_3 \begin{cases} CH_2.CH_2.CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_3 & 1 \end{cases}$$

[1]) Ber. der Deutsch. chem. Ges. X, p. 1746.
[2]) » » » » » XVI, p. 2511—2512 (ref.).

oxiderat densamma med kaliumbikromat och svafvelsyra och sålunda erhållit en vid 244° smältande syra af sammansättningen:

$$C_6H_3\begin{cases} C_3H_7 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ COOH & 1 \end{cases}$$

I. REMSEN och H. KEISER [1]) oxiderade på alldeles samma sätt paradipropylbenzolsulfamid:

$$C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_2 . CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$$

och erhöllo så en annan syra, isomer med den förra och smältande vid 212—213°. Jag lyckades sedermera syntetisera de båda syrorna [2]), utgående å ena sidan från kuminsyra, å andra sidan från propylbenzoësyra och visade därigenom, att den vid 244° eller rättare vid 246° (korr.) smältande syran var sulfaminkuminsyra (isopropylderivatet) och den vid 212—213° eller rättare vid 217—218° (korr.) smältande var sulfaminpropylbenzoësyra (normala propylderivatet).

Jag gjorde nu till min uppgift att ur etylpropylbenzol framställa »β-sulfamiden»

$$C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$$

och oxidera denna på alldeles samma sätt som de nämnda båda sulfamiderna, hvarvid man kunde hoppas på att framkomma till endera af de båda nämnda syrorna, hvilkas konstitution är fullt och fast afgjord.

Då cymol sulfoneras, inträder sulfonsyregruppen hufvudsakligen i ortoställning till metylgruppen, så att »α-cymolsulfonsyra» bildas. För framställning af »β-cymolsulfamid» måste därför REMSEN och DAY gå en omväg i det de först bromerade cymol, där-

---

[1]) Ber. der Deutsch. chem. Ges. XVI, p. 2511—2512 (ref.).

[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 7, p. 463.

efter sulfonerade bromcymol och ur den så erhållna bromcymol-β-sulfonsyran eliminerade bromatomen. Samma väg öppnade också vid etylpropylbenzol den bästa utsigten att framkomma till β-sulfonsyrederivat, hvarför jag beträdde densamma, om det ock a priori kunde förutses, att då alkylgrupperna här vida mindre differera från hvarandra än i cymol, α- och β-derivat skulle ingå i produkten i mindre olika kvantiteter.

Då nu etylpropylbenzol bromerades, erhölls en produkt af mycket varierande kokpunkt (mellan 220 och 260°). Den största fraktionen gick öfver mellan 240 och 250°. Redan detta visade, att produkten icke ens tillnärmelsevis var en enhetlig substans. Detta bekräftades ock vid framställning af sulfonsyran och dennas salter. Så kristalliserade t. ex. bariumsaltet i otydliga kristaller, liknande stelnade droppar. Öfver hufvud taget gjorde den flyktiga undersökning, som utfördes på sulfonsyrans salter och amid det intryck, att ett särskiljande af de däri ingående båda isomererna blott med stor svårighet skulle kunna genomföras.

Jag öfvergaf därför mycket snart denna väg och sulfonerade direkt etylpropylbenzol i förhoppning om, att de båda α- och β-sulfamiderna sjelfva skulle kunna särskiljas ur en blandning. Denna väg förde ock till målet.

Sulfonering af paraetylpropylbenzol.

Kolvätet löses temligen lätt i 5 à 6 delar koncentrerad svafvelsyra vid uppvärmning på vattenbad. Det ur lösningen framstälda *bariumsaltet* är ytterst lättlösligt i såväl kallt som varmt vatten, så ock i alkohol. Saltet, som är otydligt kristalliniskt, löses redan af några droppar vatten. Ehuru det tydligen utgör en blandning af α- och β-salt, utfördes dock därå en bariumbestämning för att utröna, om det var fritt från disulfonat. Vid 150° torkadt prof gaf därvid:

	Ber. för $[C_{11}H_{15} . SO_2O]_2Ba$:	Funnet:
Ba	23,18	22,92.

Blysaltet är ock mycket lättlösligt i vatten, isynnerhet i varmt. En het, mycket koncentrerad lösning stelnar vid afsvalning till en gröt af fina nålar. I alkohol är saltet ännu lättlösligare. Om helt litet alkohol sättes till den stelnade massan, erhålles genast en klar lösning.

Då det under sådana förhållanden icke var att tänka på något särskiljande af syrorna genom fraktionering af salterna, öfverfördes allt i *klorid*. Kloridblandningen, som utgjorde en icke stelnande olja, kokades därpå direkt med koncentrerad amoniak, hvarvid en med någon svårighet stelnande produkt erhölls. Lyckligtvis uppträda de båda isomera amiderna i kristaller af så olika habitus, att de äro jämförelsevis temligen lätta att skilja från hvarandra. Vid kristallisation ur utspädd alkohol afskiljas först nålar och sedan ur moderlutarne än kuber än nålar, beroende på hvilka förhärska och hvilka först börja utkristallisera. Praktfulla, stora kuber kunna dock innehålla »nålsubstans», hvilket visar sig vid förnyade kristallisationer, då nålar börja uppträda i moderlutarne. Båda slagen måste därför upprepade gånger omkristalliseras till fullständig renhet. I allra första moderluten erhölls en betydlig mängd olja, som väl afsatte några kuber men för öfrigt ej kunde förarbetas. Att döma af de erhållna, fullt rena kvantiteterna α- och β-sulfamid, synes den förra ingå i reaktionsprodukten till dubbla mängden mot den senare.

Etylpropylbenzol-α-sulfamid: $C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 2 \\ CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$

kristalliserar ur utspädd alkohol eller ligroinbenzol i långa platta nålar, som smälta vid 112—113° och äro ytterst lättlösliga i såväl alkohol som benzol.

	Ber. för $C_{11}H_{17}NSO_2$:	Funnet:
N	6,48	6,36.

Etylpropylbenzol-β-sulfamid: $C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$

kristalliserar i praktfulla, klara, färglösa kristaller, som likna kuber.

På dessa kristaller har Docenten A. E. HÖGBOM utfört mätningar och benäget meddelat följande resultat:

Kristallsystem hexagonalt, romboedriskt–hemiedriskt.

$a : c = 1 : 1,0365.$

Iakttagna former: $\varkappa\{10\bar{1}1\}$, $\varkappa\{01\bar{1}2\}$, $\varkappa\{11\bar{2}0\}$.

De flesta kristallerna hade endast grundromboederns ytor utbildade; hos några uppträdde dock de andra ytorna såsom smala lister. Genomgångar parallelt med grundromboedern mycket tydliga.

Mätningar:

$10\bar{1}1 : \bar{1}101$	83° 12′ — 83° 22′	med.	83° 18′*
$10\bar{1}1 : 01\bar{1}2$	41° 33′ — 42° 8′	»	41° 45′
$11\bar{2}0 : 10\bar{1}1$	48° 17′ — 48° 24′	»	48° 20′
$10\bar{1}1 : 10\bar{1}\bar{2}$	80° 46′	ber.	81° 1′.

Substansen börjar visserligen visa tecken till smältning redan vid 106° men smälter egentligen först vid 108. Lösligheten är ungefär densamma som vid isomeren.

	Ber. för $C_{11}H_{17}NSO_2$:	Funnet:
N	6,48	6,54.

Oxidation af etylpropylbenzol-α-sulfamid.

1 gr. sulfamid kokades 4 à 5 timmar med en blandning af 5,8 gr. kaliumdikromat och 8,8 gr. koncentrerad svafvelsyra, utspädd med 3 volymer vatten. Den härvid bildade syran, som vid lösningens afsvalning afskiljt sig i fast form, affiltrerades och tvättades. För att aflägsna osönderdelad sulfamid löstes den i ljum sodalösning, då sulfamiden till största delen stannar olöst och kan bortskaffas genom filtrering. Därpå omkristalliserades den utfälda syran flere gånger ur kokande vatten och erhölls så i form af långa nålar, som smälte vid 259—260° (korr.). Dels på grund häraf, dels på grund af den procentiska sammansättningen är det otvifvelaktigt, att kroppen är identisk med den af

REMSEN och NOYES [1]) genom oxidation af paradietylsulfamid framstälda *sulfaminetylbenzoësyran:*

$$C_6H_3\begin{cases} COOH & 4 \\ SO_2NH_2 & 2 \\ CH_2 . CH_3 & 1 \end{cases}$$

hvilken af dem uppgifves smälta vid 261—262° (korr.).

Analysen gaf följande tal:

	Ber. för $C_9H_{11}SNO_4$:	Funnet:
C	47,17	47,98
H	4,80	5,33.

Sannolikt innehöll substansen ännu litet osönderdelad amid.

Oxidation af etylpropylbenzol-β-sulfamid.

Den ofvan beskrifna, i »kuber» kristalliserande, och såsom β-sulfamid betecknade föreningen oxiderades på alldeles samma sätt som α-sulfamiden. För aflägsnande af hvarje spår af osönderdelad amid utskakades i detta fall sodalösningen af reaktionsprodukten upprepade gånger med eter. Den bildade syran kristalliserade därefter ur kokhett vatten i vackra, långa nålar, som fast införda i röret, smälte vid 216° (korr.), och efter förutgången smältning och stelning i röret vid 217—218° (korr.) eller vid precis samma temperatur, som den af mig ur propylbenzoësyran erhållna *sulfaminpropylbenzoësyran:*

$$C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ COOH & 1 \end{cases}$$

Sammansättningen är ock, såsom af följande analys framgår, därmed öfverensstämmande:

	Ber. för $C_{10}H_{13}NSO_4$:	Funnet:
C	49,38	49,31
H	5,36	5,39.

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XV, 2911 (ref.).

Att af de båda sulfamiderna den ena vid oxidation ger sulfaminetylbenzoësyra, den andra sulfaminpropylbenzoësyra, förklaras lätt af och bekräftar I. REMSENS bekanta sats om sura gruppers skyddande inverkan på i ortoställning befintliga sidokedjor. Af de båda vid kolvätets sulfonering bildade sulfonsyrorna innehåller tydligen den ena (α) sulfonsyregruppen i ortoställning till etylgruppen, den andra (β) samma grupp i ortoställning till propylgruppen och vid inträdande oxidation, oxideras i förra fallet propylgruppen, i det senare etylgruppen.

Emellertid uppstår således blott sulfaminpropylbenzoësyra vid etylpropylbenzol-β-sulfamids oxidation. Någon omlagring inom propylgruppen har således icke häller i detta fall inträffat vid etylgruppens öfvergång till karboxyl, hvilket är så mycket mer anmärkningsvärdt, som oxidationen är utförd på precis samma sätt, som vid β-cymolsulfamid, där omlagring inträffar, och som reaktionen i båda dessa fall tagit alldeles analogt förlopp för öfrigt.

Försök att oxidera etylpropylbenzol sjelf såväl i alkalisk lösning som i sur lösning, som ock försök att oxidera dess derivat, β-sulfamid, hafva således samstämmigt gifvit vid handen, att *någon omlagring från propyl till isopropyl icke inträffar, då en i paraställning till propylgruppen närvarande etylgrupp oxideras till karboxyl.* Etylgruppen förhåller sig således i detta hänseende alldeles såsom propyl, isopropyl och acetyl eller med andra ord alla de grupper, utom metylgruppen, som i ifrågavarande hänseende varit föremål för undersökning[1]). Då således å ena sidan icke ett enda fall af omlagring från propyl till isopropyl är bekant utan att en i paraställning närvarande metylgrupp oxiderats och å andra sidan sådan omlagring *alltid* inträffar, då metyl oxideras, drifves man till den slutsats, att de nämda omlagringarne äro specifikt förbundna med just *metyl*gruppens oxidation.

[1]) Det fall af omlagring, som förut antagits ega rum vid »ortonitropropylkanelsyrans» oxidation bortfaller numera, sedan det visat sig, att denna syra ingenting annat är än en blandning af orto- och metakumenylakrylsyra (se föreg. uppsats).

På denna punkt står frågan för närvarande. Jag är dock ingalunda blind för osannolikheten af detta resultat. Det tvingar i sjelfva verket till en ny revision af de undersökningar om cymols och kuminsyrans konstitution, på hvilka antagandet af omlagringarne inom propylgruppen ytterst hvilar, såsom jag i en följande uppsats torde få anledning att närmare uppvisa. Jag har ock redan påbörjat en sådan revision, huru föga sannolikt det än a priori må vara, att den skall kunna gifva något nytt resultat, då dessa föreningars konstitution varit föremål för en rad forskares sinsemellan väl stämmande och hvarandra bekräftande undersökningar och ingen lucka i bevisföringen synes förefinnas. Cymols konstitution har ock alltsedan 12 år varit allmänt betraktad såsom slutligt afgjord och detsamma är fallet med kuminsyrans konstitution efter R. MEYERS syntes af kuminsyra och propylbenzoësyra ur parabromkumol, resp. parabrompropylbenzol, kolsyra och natrium.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 480.)

Madrid. *R. Observatorio.*

Resumen de las observaciones meteorológicas efectuadas en la peninsula y algunas de ses islas adyacentes. Año 1888—1889. 8:o.

Magdeburg. *Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.*

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen. Bd. 9 (1889). 4:o.

Manila. *Observatorio meteorológico bajo la direccion de los PP de la Compañia de Jesús.*

Observaciones magnéticas verificadas por M. Juan en la Paragua, Joló y Mindanao. 1890. 4:o.

Curvas meteorográficas en conformidad con las observaciones verificadas. Año 1887—88. Tvfol.

Marseille. *Commission météorologique du département des Bouches-du-Rhône.*

Bulletin annuel. Année 6 (1887)—7 (1888). 4:o.

Mauritius. *R. Alfred Observatory.*

Annual report of the director. 1887. 4:o.

Meteorological results. 1888. Fol.

Melbourne. *Observatory.*

Monthly record of results of observations in meteorology, terrestrial magnetism, &c. &c. Year 1889: 1—12. 8:o.

México. *Observatorio meteorológico-magnético central.*

Boletin mensual. T. 2 (1889): N:o 1—12. 4:o.

Milano. *Observatorio astronomico di Brera.*

Osservazioni meteorologiche. Anno 1889. 4:o.

Moskwa. *Meteorologisches Observatorium der Landwirthschaftlichen Akademie.*

Meteorologische Beobachtungen. (2) T. 3 (1889): H. 1. Tv. 4:o.

— *Observatoire magnétique et météorologique de l'Institut Constantin des arpenteurs.*

Tables des observations. Année 1889: 1—12. 4:o.

München. *K. Meteorologische Centralstation.*

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 11 (1889): H. 1—4. 4:o.

Übersicht der Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. Jahr 1889: 1—12. Fol.

Småskrifter. 4 st. 4:o.

Napoli. *R. Osservatorio di Capodimonte.*

ANGELITTI, F., Variazioni della declinazione magnetica osservate ... nell' anno 1888. Napoli 1890. 4:o.

— Determinazioni assolute della declinazione magnetica eseguite nel anno 1889. Napoli 1890. 4:o.

New York, U. S. *Meteorological observatory of the department of public parks.*

Report. Vol. 44 (1889). 4:o.

(Forts. å sid. 526.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 117.

Om ett enkelt fall af stationär rörelse med rotation.

Af E. Phragmén.

[Anmält af Mittag-Leffler.]

Man synes i allmänhet föreställa sig att det med nu kända analytiska hjelpmedel skulle vara omöjligt att med någon grad af fullständighet diskutera en vätskas rörelse, såsnart som rotation förefinnes annorlunda än i enstaka »rotationstrådar». Måhända skall man derför icke utan intresse läsa följande rader, med hvilka jag velat påpeka, hurusom i ett enkelt fall vätskerörelsen kan fullständigt behandlas med hjelp af Picard's senaste undersökningar öfver vissa klasser af partiella differentialeqvationer,[1]) oberoende af hvarje förutsättning angående rotationens beskaffenhet.

Jag betecknar med x, y, z rätvinkliga Cartesianska koordinater och tänker mig att en osammantryckbar vätska påverkas af yttre krafter, definierade genom en potential V som är oberoende af z, samt föresätter mig att studera sådana stationära rörelser hos denna vätska för hvilka hastigheten i hvarje punkt är parallel med xy-planet och densamma i alla punkter med samma koordinater x och y.

Betecknar jag då med u och v hastighetskomponenterna i punkten (x, y) längs x- och y-axlarna och med p trycket i samma punkt, samt sätter tätheten $= 1$, så äro rörelseeqvationerna som bekant

---

[1]) Journal de mathématiques pures et appliquées, 1890; Comptes rendus, 6 octobre 1890.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(V - p),$$

(1) $$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(V - p),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

af hvilka den sista uttrycker vätskans osammantryckbarhet, d. v. s. att de vätskepartiklar som vid en gifven tidpunkt utfylla en viss volym också vid hvarje annan tidpunkt utfylla en lika stor volym.

Genom att subtrahera den andra af ofvanstående eqvationer, differentierad i afseende på x, från den första differentierad i afseende på y, erhåller man en från p fri eqvation, hvilken, med tagen hänsyn till den tredje eqvationen, kan skrifvas

(2) $$u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

eller, om vi adoptera en ofta använd beteckning,

(2) $$u\Delta v - v\Delta u = 0.$$

Den tredje af rörelseeqvationerna innebär att

$$vdx - udy$$

är en fullständig differential. Vi införa den funktion ψ, som på en konstant när definieras genom likheten

(3) $$d\psi = vdx - udy$$

och hafva således eqvationerna

(4) $$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Införas dessa uttryck på u och v i eqvationen (2), så öfvergår den i

(5) $$\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} = 0,$$

der jag i venstra membrum gjort bruk af den vanliga beteckningen för funktionaldeterminanter.

Med denna eqvation fullkomligt likbetydande är eqvationen

$$\Delta\psi = F(\psi), \tag{6}$$

der F betecknar en godtycklig funktionsform. Åtminstone för vissa stora klasser af funktionsformer F låter denna differentialeqvation fullständigt diskutera sig med hjelp af de ofvan citerade undersökningarna af PICARD. Det följer af dessa undersökningar att funktionen ψ i allmänhet är bestämd genom ofvanstående differentialeqvation, såsnart man känner dess värden längs en kontur, inom hvilken den är kontinuerlig. Dessa värden och denna kontur kunna för öfrigt — med vissa inskränkningar — väljas fullkomligt godtyckligt.

Låt oss beteckna med L den slutna konturen, med s dess båglängd räknad från någon bestämd punkt, och med $f(s)$ de längs L godtyckligt gifna värdena af funktionen ψ. Vi antaga att $f(s)$ har en kontinuerlig derivata, som vi beteckna med $f'(s)$.

Det är då lätt att finna den mekaniska betydelsen af vilkoret att ψ längs L skall antaga värdena $f(s)$. Man ser ju omedelbart att $f'(s)$ betecknar projektionen af hastigheten i punkten s på den inåt riktade normalen till L, ifall vi antaga, att konturen L för växande s genomlöpes i den riktning som vanligen brukar betecknas såsom den positiva, d. v. s. så att det inneslutna området ligger till venster. $f'(s)$ anger således hur stor vätskemängd, som per tids- och bågenhet strömmar in i det af L inneslutna området i omgifningen af punkten s. Hela den vätskemängd som per tidsenhet strömmar in i samma område anges af integralen

$$\int f'(s)ds$$

utsträckt öfver hela konturen L, och den i öfrigt godtyckliga värdeföljden $f'(s)$ bör alltså vara sådan att denna integral har värdet 0 — ett vilkor som är liktydigt med att $f'(s)$ skall kunna betraktas som derivatan af en på konturen L entydig funktion $f(s)$.

Ifall vår kontur L representerar en fast vägg, så har man helt enkelt att antaga

$$f'(s) = 0.$$

Är funktionen $f'(s)$ gifven, så kan man säga, att de olika möjliga rörelseformerna fullständigt karakteriseras genom olika former af funktionen F. Man inser ju nemligen lätt att man har rättighet att bestämma $f(s)$ så, att den antar ett godtyckligt värde i en godtycklig punkt af L, t. ex. värdet 0 i begynnelsepunkten för bågen s. Denna specialisering af integrationskonstanten uppväges nemligen fullständigt deraf, att funktionsformen $F(\psi)$ kan ersättas af formen $F(\psi + C)$. Funktionen ψ är bekant under namnet strömningsfunktion, ett namn, som är valdt med hänsyn dertill att eqvationerna för de kurvor, som de särskilda vätskepartiklarna beskrifva, kunna skrifvas under formen

$$\psi = \text{konst.}$$

$\Delta\psi$ är lika med dubbla rotationen i punkten x, y. De olika rörelseformer, som äro möjliga sedan man fixerat det sätt på hvilket vätskan skall strömma in och ut genom den slutna konturen L, kunna alltså sägas vara karakteriserade genom arten af det funktionssammanhang som består mellan rotationen och strömningsfunktionen.

De från en rent matematisk synpunkt enklaste rörelseformerna äro naturligtvis de som motsvaras af monogena analytiska funktioner $F(\psi)$ utan några singulariteter för de reella värden på ψ som komma ifråga. Men från andra synpunkter kan det nog befinnas önskvärdt att studera rörelser som motsvaras af funktionsformer $F(\psi)$, som icke hafva denna egenskap.

Den i formeln (6) här ofvan angifna transformationen af de hydrodynamiska differentialeqvationerna är endast ett speciclt fall af den äldre af de två transformationer af de nämda differentialeqvationerna, för hvilka man har CLEBSCH att tacka. Är rörelsen hos vår vätska icke underkastad andra inskränkningar

än att vara stationär, så kan enligt CLEBSCH (Crelle, bd. 54) rörelsen bestämmas genom de eqvationer, som uttrycka att första variationen af följande integral försvinner:

$$\int\left[\left(\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(yz)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(zx)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)}\right)^2+2F(\varphi,\psi)\right]d\tau,$$

der

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(yz)} \text{ o. s. v.}$$

beteckna funktionaldeterminanterna af φ och ψ med afseende på y, z o. s. v., $d\tau$ volymelementet och $F(\varphi, \psi)$ är en funktion, som kan väljas godtyckligt. Variationerna af φ och ψ tänkas försvinnande i begränsningsytan.

Äro φ och ψ bestämda genom detta vilkor, så erhållas hastighetskomponenterna ur eqvationerna

$$u=\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(yz)},\quad v=\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(zx)},\quad w=\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)}.$$

Hvarje särskild vätskepartikels rörelse bestämmes genom differentialeqvationerna

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,$$

som låta omedelbart integrera sig och gifva

$$\varphi=\text{konst.},\quad \psi=\text{konst.}$$

samt

$$t=\int\frac{dx}{u},$$

der u med hjelp af de båda näst sista eqvationerna tänkes uttryckt som en funktion af endast x.

Om man sätter

$$A=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

$$B=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$C=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2,$$

så kan ofvanstående integral skrifvas

$$\int (AC - B^2 + 2F)\, d\tau$$

och CLEBSCH' eqvationer bli alltså

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial \varphi}{\partial x} - B\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial \varphi}{\partial y} - B\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial \varphi}{\partial z} - B\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial \psi}{\partial x} - B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{\partial \psi}{\partial y} - B\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial \psi}{\partial z} - B\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial \psi}.$$

Det lider intet tvifvel att den SCHWARZiska metod som PICARD med så mycken framgång har användt för diskussionen af differentialeqvationer af formen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, x, y\right)$$

låter tillämpa sig äfven på dessa CLEBSCH' eqvationer. Jag vill dock icke här inlåta mig på detaljerna af denna tillämpning, hvilken ingalunda är fri från svårigheter.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 116.

Om användningen af oändliga determinanter inom teorin för lineära homogena differentialeqvationer.

II.

Af Helge von Koch.

[Meddeladt den 12 November 1890 genom G. Mittag-Leffler.]

§ 1.

Betrakta fortfarande[1]) en differentialekvation af formen

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0\,,$$

där koefficienterna $P_r(x)$ inom området

$$R < |x| < R' \qquad (R < 1 < R')$$

låta utveckla sig under formen

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r = 2, 3, \ldots n)\,.$$

Vi funno, att om

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\varrho+\lambda}$$

är en integral till (1), måste ϱ och g_λ uppfylla likheterna

$$(2) \qquad G_m(\varrho) = \varphi(\varrho+m)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda} g_\lambda = 0 \qquad (m = -\infty \ldots +\infty)$$

[1]) Afd. I af föreliggande arbete återfinnes i Öfvers. af K. V. A. Förh. 1890, N:o 5.

där

$$(3)\begin{cases}\varphi(\varrho)=\varrho(\varrho-1)..(\varrho-n+1)+\varrho(\varrho-1)..(\varrho-n+3)\alpha_{2,-2}+..+\alpha_{n,-n}\\ A_{m\lambda}=(\varrho+\lambda)..(\varrho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2}+..+\alpha_{n,m-\lambda-n};\end{cases}$$

vi ponerade

$$\psi_{mm}(\varrho)=1;\ \psi_{m\lambda}(\varrho)=\frac{A_{m\lambda}}{\varphi(\varrho+m)}\quad (m \neq \lambda)$$

och bildade den oändliga determinanten

$$(4)\qquad \Omega(\varrho)=[\psi_{m\lambda}]_{m,\lambda=-\infty..+\infty}$$

samt erhöllo under vissa förutsättningar (I, s. 236) ett fundamentalsystem integraler till den gifna differentialekvationen. För att nu kunna generelt behandla problemet vilja vi ersätta determinanten $\Omega(\varrho)$ med en annan determinant, som, betraktad som funktion af ϱ, inom ändligt område saknar singulära ställen.

Låt rötterna till likheten

$$\varphi(\varrho)=0$$

vara

$$\varrho_1, \varrho_2, .. \varrho_n,$$

där hvarje rot är upprepad så ofta, som dess ordningstal angifver. Sätt

$$(5)\qquad h_0(\varrho)=1;\ h_m(\varrho)=m^{-n}e^{-[n\varrho-(\varrho_1+..+\varrho_n)]:m}\quad (m \neq 0)$$

och multiplicera ekvationerna (2) i ordning med storheterna $h_m(\varrho)$; det nya systemet

$$(6)\qquad h_m(\varrho)G_m(\varrho)=0\qquad (m=-\infty..+\infty)$$

är tydligen ekvivalent med det ursprungliga, eftersom ju funktionerna $h_m(\varrho)$ inom ändligt område sakna noll- och oändlighetsställen; om vi skrifva

$$(7)\qquad h_m(\varrho)A_{m\lambda}=\chi_{m\lambda}(\varrho);\ h_m(\varrho)\varphi(\varrho+m)=\chi_{mm}(\varrho),$$

erhåller det formen

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\chi_{m\lambda}(\varrho)g_\lambda=0\qquad (m=-\infty..+\infty)$$

Låt oss bilda determinanten för detta oändliga ekvationssystem:

$$D(\varrho) = [\chi_{m\lambda}(\varrho)]_{(m,\lambda = -\infty\,..\,+\infty)}, \tag{9}$$

och undersöka arten af dess konvergens; betrakta först serien

$$\Sigma_m \Sigma'_\lambda \, | \chi_{m\lambda}(\varrho) | , \tag{10}$$

i hvilken m och λ genomlöpa alla positiva och negativa heltalsvärden förenliga med vilkoret $\lambda \neq m$; om vi sätta

$$h'_m(\varrho) = m^n h_m(\varrho) \qquad (m \neq 0)$$

är

$$\chi_{m\lambda}(\varrho) = \frac{A_{m\lambda}}{m^n} \cdot h'_m(\varrho)\,; \;\; \chi_{0\lambda}(\varrho) = A_{0\lambda}\,.$$

Om variabiliteten hos $\varrho = u + iv$ begränsas till ett godtyckligt ändligt område A i planet, ligga storheterna $h'_m(\varrho)$ $(m = 0, \pm 1 \ldots)$ samtliga till sina absoluta belopp under ett visst positivt tal h; således gäller inom A olikheten

$$\Sigma_m \Sigma'_\lambda \, | \chi_{m\lambda}(\varrho) | < h \Sigma_m \Sigma'_\lambda \left| \frac{A_{m\lambda}}{m^n} \right| ; \tag{11}$$

men om vi tillämpa samma bevismetod, som användes i afd. I (sid. 229), då fråga var om serien

$$\Sigma_m \Sigma'_\lambda \left| \frac{A_{m\lambda}}{\varphi(\varrho + m)} \right| ,$$

finna vi, att serien till höger i olikheten (11) är konvergent och likformigt konvergent inom området A, således måste samma egenskap äfven tillkomma serien (10).

Vi ha vidare

$$\chi_{mm}(\varrho) = \left(1 + \frac{\varrho - \varrho_1}{m}\right) e^{-\frac{\varrho - \varrho_1}{m}} \ldots \left(1 + \frac{\varrho - \varrho_n}{m}\right) e^{-\frac{\varrho - \varrho_n}{m}} ; \tag{12}$$

låt δ vara ett positivt tal mindre än ett och välj ett positivt helt tal m' så stort, att för alla ϱ-värden inom A och för alla m-värden, som uppfylla olikheten $|m| > m'$, olikheterna

$$\left| \frac{\varrho - \varrho_1}{m} \right| < \delta\,; \ldots ; \left| \frac{\varrho - \varrho_n}{m} \right| < \delta$$

äga rum. Man erhåller en utveckling af formen

$$\left(1+\frac{\varrho-\varrho_k}{m}\right)e^{-\frac{\varrho-\varrho_k}{m}} = 1+\left(\frac{\varrho-\varrho_k}{m}\right)^2 \mathfrak{P}_k\left(\frac{\varrho-\varrho_k}{m}\right),$$

där $\mathfrak{P}_k\left(\frac{\varrho-\varrho_k}{m}\right)$ är en potensserie i $\frac{\varrho-\varrho_k}{m}$, som för de nämda ϱ- och m-värdena till sitt absoluta belopp ligger under en viss gräns. Häraf och af konvergensen hos serien

$$\Sigma_m\left\{\left|\frac{\varrho-\varrho_1}{m}\right|^2+\left|\frac{\varrho-\varrho_2}{m}\right|^2+\ldots+\left|\frac{\varrho-\varrho_n}{m}\right|^2\right\}$$

följer lätt, att serien

$$\Sigma_m \left| \chi_{mm}(\varrho)-1 \right|$$

för ϱ-värden inom A är konvergent. Således tillhör — för hvarje dylikt ϱ-värde — $D(\varrho)$ den klass af oändliga determinanter (»determinanter af formen $\varDelta$»), som behandlats i föreg. uppsats[1]). Således är (B, sats 2) determinanten $D(\varrho)$ konvergent inom området A, således beständigt konvergent. Genom att använda samma bevismetod som i I (s. 230) ser man lätt, att $D(\varrho)$ låter utveckla sig i en serie, som jemte det, att den konvergerar absolut, äfven inom hvarje ändligt område är likformigt konvergent; således kan $D(\varrho)$ skrifvas under formen af en beständigt konvergerande potensserie.

För att finna det samband, som existerar mellan determinanterna $D(\varrho)$ och $\Omega(\varrho)$, bilda vi produkten

$$\Omega(\varrho)\cdot\varphi(\varrho)\cdot\prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \chi_{mm}(\varrho) \qquad (m \neq 0);$$

af formel (12) framgår genast, att den tredje faktorn är en absolut konvergerande produkt; multiplikationen kan därför utföras på det sätt att — för hvarje index m — elementen i den m:te raden af $\Omega(\varrho)$ multipliceras med $\chi_{mm}(\varrho)$; då blir

[1]) Bidrag till teorin för oändliga determinanter; Öfvers. af K. V. A. Förh. 1890, N:o 8. Emedan denna uppsats i det följande flerestädes citeras, skall jag för korthetens skull beteckna den med B.

$$\Omega(\varrho)\varphi(\varrho)\prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \chi_{mm}(\varrho) = [\chi_{m\lambda}]_{m,\lambda=-\infty..+\infty} = D(\varrho) ;$$

och, om vi beakta att

$$\varphi(\varrho)\prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \chi_{mm}(\varrho) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left\{\sin(\varrho - \varrho_k)\pi\right\},$$

erhålles slutligen relationen

$$D(\varrho) = \Omega(\varrho)\left(\frac{1}{\pi}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left\{\sin(\varrho - \varrho_k)\pi\right\} ; \tag{13}$$

ur densamma härledes omedelbart:

$$\begin{cases} D(\varrho+1) = (-1)^n D(\varrho) \\ D(\varrho+2) = D(\varrho) , \end{cases} \tag{14}$$

således är $D(\varrho)$ en periodisk funktion af ϱ med perioden 1, om n är ett jemt tal, och med perioden 2, om n är udda.

Låt $\varrho_1, \varrho_2, .. \varrho_r$ vara de af nollställena till funktionen $\varphi(\varrho)$, som ej skilja sig från hvarandra med hela tal eller noll. Låt s_λ vara antalet nollställen till samma funktion, hvilka skilja sig från ϱ_λ med hela tal eller noll. Då är

$$s_1 + s_2 + .. + s_r = n$$

och funktionen $\Omega(\varrho)$ kan för $\varrho = \varrho_\lambda$ ej bli oändlig af högre ordning än s_λ. I omgifningen af $\varrho = \varrho_\lambda$ kan man därför utveckla $\Omega(\varrho)$ under formen

$$\Omega(\varrho) = \mathfrak{P}_\lambda(\varrho - \varrho_\lambda) + \sum_{k=0}^{s^\lambda - 1} M_\lambda^{(k)} \cdot \frac{d^k}{d\varrho^k}\left(\frac{1}{\varrho - \varrho_\lambda}\right),$$

där $M_\lambda^{(k)}$ äro konstanter, som i speciella fall kunna vara nollor; häraf erhålles (jfr I, (10))

$$\Omega(\varrho) = 1 + \pi \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{k=0}^{s_\lambda - 1} M_\lambda^{(k)} \frac{d^k}{d\varrho^k}\left[\cot(\varrho - \varrho_\lambda)\pi\right] . \tag{15}$$

Eftersom funktionen $\Omega(\varrho)$ uppfyller vilkoret

$$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\varrho) = 1 , \tag{16}$$

kan summan af dess inkongruenta oändlighetsställens ordningstal hvarken öfverstiga eller understiga summan af dess inkongruenta nollställens ordningstal; *således kan summan af ordningstalen för funktionens $D(\varrho)$ inkongruenta nollställen hvarken öfver- eller understiga n.* Om dessa nollställen äro:

$$\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(q)}$$

med ordningstalen

$$s', s'', \ldots s^{(q)},$$

$$s' + s'' + \ldots + s^{(q)} = n$$

kan $D(\varrho)$ framställas under formen

$$D(\varrho) = C \cdot \prod_{k=1}^{q} \left\{\sin(\varrho - \varrho^{(k)})\right\}^{s^{(k)}}, \tag{17}$$

där C är en konstant. Med användning af egenskapen

$$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\varrho) = 1$$

och likheten (13) finner man

$$\pi^n C e^{\pm \pi i [\Sigma s^{(k)} \varrho^{(k)} - \Sigma \varrho_k]} = 1 ;$$

således måste skilnaden

$$\sum_{k=1}^{q} s^{(k)} \varrho^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} \varrho_k$$

vara ett helt tal. Vi tänka oss rötterna $\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(q)}$ valda så, att denna differens är lika med noll. Då är

$$C = \frac{1}{\pi^n}. \tag{17'}$$

Koefficienten för ϱ^{n-1} i $\varphi(\varrho)$ är $-\frac{n(n-1)}{2}$. Således är $\Sigma\varrho_k$, således också $\Sigma s^{(k)} \varrho^{(k)}$, ett helt tal:

$$\sum_{k=1}^{q} s^{(k)} \varrho^{(k)} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{18}$$

Determinanten $D(\varrho)$ kan (B, 5) utvecklas efter elementen i en hvilken som helst af dess rader eller kolonner; beteckna med

$$X_{m\lambda}(\varrho) = \frac{\partial D}{\partial \chi_{m\lambda}} = \begin{pmatrix} m \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

koefficienten för $\chi_{m\lambda}$ i en dylik utveckling — eller, för att använda en i föreg. uppsats (B: 5, c) införd benämning, den till elementet $\chi_{m\lambda}$ adjungerade underdeterminanten af första ordningen. Serien

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda}(\varrho)\, X_{m\lambda}(\varrho) \tag{19}$$

är då beständigt absolut konvergent (B, 6); den är äfven likformigt konvergent inom hvarje ändligt område A; ty om vi för ett ögonblick ponera

$$\chi_{m\lambda} = \xi_{m\lambda} (m \neq \lambda)\,; \; \chi_{mm} = 1 + \xi_{mm}\,,$$

består olikheten (jfr B, 6)

$$|X_{m\lambda}(\varrho)| \leqq \overline{P} \cdot \sum_{k \neq \lambda} |\xi_{\lambda k}|\,,$$

då med $\overline{P}$ förstås produkten

$$\overline{P} = \Pi_i \left(1 + \Sigma_k |\xi_{ik}|\right).$$

Om vi sätta

$$S_\lambda = \sum_{k \neq \lambda} |\chi_{\lambda k}(\varrho)|\,,$$

är serien $\Sigma_\lambda S_\lambda$ likformigt konvergent inom A, och storheterna $\chi_{m\lambda}(\varrho)$ $(\lambda = 0, \pm 1, \ldots)$ äro inom samma område absolut tagna mindre än en positiv storhet; häraf följer, att serien

$$\Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda}(\varrho)|\, |X_{m\lambda}(\varrho)|$$

och således äfven serien (19) inom området A är likformigt konvergent; häraf följer äfven, att om elementen i determinantens $D(\varrho)$ m:te rad ersättas med en ny rad godtyckliga element, som absolut tagna ligga under en viss gräns, så låter den nya determinanten utveckla sig i en serie, som fortskrider efter dessa nya

element, och som inom hvarje ändligt område är likformigt konvergent.

Låt nu x betyda en godtycklig punkt inom cirkelringen (RR'), ponera

$$\bar{\chi}_{m\lambda} = \chi_{m\lambda} x^{m-\lambda}$$

och bilda determinanten

$$\bar{D} = [\bar{\chi}_{m\lambda}]_{m,\lambda=-\infty..+\infty} .$$

Serien $\Sigma_m \Sigma'_\lambda |\bar{\chi}_{m\lambda}|$ är (Jfr I, sid. 234) beständigt konvergent med afseende på ϱ, och $\bar{\chi}_{mm} = \chi_{mm}$; således är $\bar{D}$ beständigt konvergent med afseende på ϱ; ersätt hvart och ett af elementen i dess m:te rad med $x^{\varrho+m}$ och utveckla sedan efter elementen i denna m:te rad; den så erhållna serien

$$x^{\varrho+m} \Sigma_\lambda \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{\chi}_{m\lambda}}$$

är likformigt konvergent inom A, eftersom detta är fallet med serien

$$\Sigma_\lambda (\Sigma_{k \neq \lambda} |\bar{\chi}_{\lambda k}|) ;$$

ersättes $\bar{\chi}_{m\lambda}$ med 1 och öfriga element i den m:te raden med 0, öfvergår $\bar{D}$ till $\dfrac{\partial \bar{D}}{\partial \chi_{m\lambda}}$; denna senare determinant undergår ingen förändring, om till hvarje element $\bar{\chi}_{ik}$ bifogas faktorn x^{k-i} (Jfr I s. 233); således är

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{\chi}_{m\lambda}} = x^{\lambda-m} \frac{\partial D}{\partial \chi_{m\lambda}} ;$$

följaktligen är serien

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial D}{\partial \chi_{m\lambda}} x^{\varrho+\lambda}$$

likformigt konvergent inom A. Samma bevismetod kan användas för det fall, att man i stället för determinanten $D(\varrho)$ transfor-

merar en af dess underdeterminanter, och man kan således allmänt uttala den satsen, att

om i determinanten $D(\varrho)$ eller i någon af dess underdeterminanter de element, som tillhöra en godtycklig rad:

$$\chi_{m\lambda} \qquad (\lambda = -\infty \,..+\infty)$$

ersättas med potenser af x:

$$x^{\lambda} \qquad (\lambda = -\infty \,..+\infty)\ ,$$

erhålles i hvarje fall en determinant, som kan skrifvas såsom en potensserie i x; och denna potensserie konvergerar med afseende på x inom cirkelringen (RR'), under det att den med afseende på ϱ är beständigt, absolut och inom hvarje ändligt område likformigt konvergent.

§ 2.

Beteckna med

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix},\ ..$$

determinantens $D(\varrho)$ underdeterminanter af ordningarna 1, 2, .., så att, generelt, med

$$\begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_r \end{pmatrix}$$

förstås den underdeterminant af r:te ordningen, som erhålles, om i $D(\varrho)$ elementen $\chi_{i_1 k_1} \,..\, \chi_{i_r k_r}$ ersättas med ettor, men öfriga element i den i_1:te .. i_r:te raden eller i den k_1:te .. k_r:te kolonnen med nollor. Låt ϱ' vara ett nollställe till $D(\varrho)$; enligt hvad i föreg. uppsats (B, s. 427 o. f.) visats, fins alltid ett medel, att efter ett visst ändligt antal undersökningar påträffa en underdeterminant, som för detta ϱ-värde är från noll skild. Antag att vi på detta eller på något annat sätt funnit, att underdeterminanten

$$\begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_p \\ k_1 & .\,. & k_p \end{pmatrix}$$

för $\varrho = \varrho'$ ej försvinner. Är denna determinant af första ordningen, d. v. s. $p = 1$, så ha vi, såsom af nästa § kommer att framgå, redan kommit till hvad vi behöfva veta; men betrakta det allmänna fallet, då $p > 1$. Antag att ϱ' är ett μ-faldigt nollställe till $D(\varrho)$ och ett åtminstone μ_1-faldigt nollställe till underdeterminanterna

$$(20) \qquad \binom{i}{k} \quad \begin{bmatrix} i = i_1 \,..\, i_p \\ k = k_1 \,..\, k_p \end{bmatrix};$$

då består olikheten $\mu > \mu_1$; ty vore $\mu \leqq \mu_1$ skulle af identiteten [B, 11, (β)]:

$$\binom{i}{k}\binom{i_1 \,..\, i_p}{k_1 \,..\, k_p} = \binom{i_1}{k}\binom{i \;\; i_2 \,..\, i_p}{k_1 \, k_2 \,..\, k_p} + \,..\, + \binom{i_p}{k}\binom{i_1 \,..\, i_{p-1} \, i}{k_1 \,..\, k_{p-1} \, k_p}$$
$$+ D \cdot \binom{i \; i_1 \,..\, i_p}{k \; k_1 \,..\, k_p}$$

följa, att underdeterminanterna

$$(21) \qquad \binom{i}{k} \quad \begin{bmatrix} i = -\infty \,..\, +\infty \\ k = k_1 \,..\, k_p \end{bmatrix}$$

och således, på grund af identiteten [B, 11, (α)]:

$$\binom{i}{k}\binom{i_1 \,..\, i_p}{k_1 \,..\, k_p} = \binom{i}{k_1}\binom{i_1 \, i_2 \,..\, i_p}{k \;\; k_2 \,..\, k_p} + \,..\, + \binom{i}{k_p}\binom{i_1 \,..\, i_{p-1} \, i_p}{k_1 \,..\, k_{p-1} \, k}$$
$$+ D \cdot \binom{i \; i_1 \,..\, i_p}{k \; k_1 \,..\, k_p},$$

att *alla* underdeterminanter af första ordningen försvunne åtminstone af ordningen μ; men att något sådant ej kan inträffa, framgår af likheten

$$\frac{dD}{d\varrho} = \Sigma_i \, \Sigma_k \binom{i}{k} \chi'_{ik},$$

hvilken härledes på samma sätt som den motsvarande likheten för determinanten Ω (I, s. 235). Således är $\mu > \mu_1$; dessutom följer af de anförda identiteterna, att *alla* determinantens $D(\varrho)$ underdeterminanter af första ordningen försvinna åtminstone med ordningstalet μ_1.

Låt bland underdeterminanterna (20) $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ vara den, som ej är, eller en bland dem, som ej äro noll af högre ordning än μ_1; antag att underdeterminanterna af andra ordningen:

$$(22) \qquad \begin{pmatrix} i & i' \\ k & k' \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} i, i' = i_1 \,..\, i_p \\ k, k' = k_1 \,..\, k_p \end{bmatrix}$$

försvinna med ordningstalet μ_2, men att åtminstone en bland dem ej är noll af högre ordning. Då är $\mu_1 > \mu_2$; ty om man på determinanten $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ och dess underdeterminanter tillämpar samma relationer, som nyss användts på $D(\varrho)$ och dess underdeterminanter, finner man, att vore $\mu_1 \leqq \mu_2$, skulle samtliga determinanterna

$$(23) \qquad \begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix} \quad (i, k = -\infty \,..\, +\infty),$$

d. v. s. alla determinantens $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ underdeterminanter af första ordningen, försvinna åtminstone med ordningstalet μ_1, hvilket åter skulle leda till att — i strid mot förutsättningen — $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ åtminstone vore noll af ordningen $\mu_1 + 1$.

Dessutom äger det rum, att *alla* determinantens $D(\varrho)$ underdeterminanter af andra ordningen äro noll åtminstone af ordningen μ_2, men att åtminstone en bland underdeterminanterna

$$(24) \qquad \begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} i = i_1 \,..\, i_p \\ k = k_1 \,..\, k_p \end{bmatrix}$$

ej är noll af högre ordning. Ty antag att *alla* underdeterminanterna af andra ordningen äro noll åtminstone af ordningen $\overline{\mu}_2$, men determinanten $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ej af högre ordning; antag vidare, att determinanterna $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ äro noll af de resp. ordningarna μ_2' och μ_2'' och låt först $\mu_2' \leqq \mu_2''$. I identiteterna [B, 11, (α')]:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

äro $\begin{pmatrix} m_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ noll åtminstone af ordningen μ_1 och $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix}$ åtminstone af ordningen μ_2', men $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ej af högre ordning än $\overline{\mu}_2$; således äro $\begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_2 \\ k_1 \end{pmatrix}$ noll åtminstone af ordningen $\mu_1 + \mu_2' - \overline{\mu}_2$. Men venstra membrum af identiteten [B, 11, (β')]:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & i_1 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

är ej noll af högre ordning än $\mu_1 + \mu_2'$, således kunna ej samtidigt determinanterna

$$\begin{pmatrix} i_1 & m_2 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} m_1 & i_1 \\ \lambda_1 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & m_1 \\ k_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

försvinna af högre ordning än $\overline{\mu}_2$. Hade vi åter antagit $\mu_2' \geqq \mu_2''$, skulle vi på analogt sätt ha funnit, att åtminstone en af determinanterna

$$\begin{pmatrix} i_1 & m_2 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & m_1 \\ k_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ej vore noll af högre ordning än $\overline{\mu}_2$. Således fins i hvarje fall bland determinanterna (23) åtminstone en, som ej är noll högre än af nämda ordning; men häraf följer, att bland determinanterna (24) nödvändigt måste finnas en, som ej heller är noll högre än just af denna ordning $\overline{\mu}_2$ — i motsatt fall skulle ju, såsom nyss nämts, *alla* determinanterna (23) vara noll af högre ordning än $\overline{\mu}_2$. Således är $\mu_2 = \overline{\mu}_2$, och det uttalade påståendet är bevisadt.

Låt oss antaga — och det kunna vi ju utan att inskränka problemets allmänhet — att $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ är den bland determinanterna (24), som ej är noll af högre ordning än μ_2; då kan man på ett med det föregående fullkomligt analogt sätt bevisa, att om det öfverhufvud taget fins någon underdeterminant af tredje ordningen, som ej är noll af högre ordning än μ_2, under det att alla öfriga äro noll af samma eller högre ordning, måste $\mu_2 > \mu_3$, och vidare, att den i fråga varande underdeterminanten är att söka bland

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i \\ k_1 & k_2 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i = i_1 \,..\, i_p \\ k = k_1 \,..\, k_p \end{bmatrix}; \tag{25}$$

antag att det är $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_1 & k_3 \end{pmatrix}$ och fortfar på detta sätt med att undersöka underdeterminanterna af ordningarna 4, 5, o. s. v.

Vi kunna alltid tänka oss determinanten $\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_p \\ k_1 \,..\, k_p \end{pmatrix}$ vald på ett sådant sätt, att alla underdeterminanter f. o. m. de af första t. o. m. de af $p-1$:a ordningen, som definieras genom vissa indices i i raden $i_1 \,..\, i_p$ och vissa indices k i raden $k_1 \,..\, k_p$ äro noll för $\varrho = \varrho'$; om så är fallet, måste man ha $\mu \geqq p$; ty alla underdeterminanter af $p-1$:a ordningen äro noll, således alla underdeterminanter af $p-2$:a ordningen noll åtminstone af ordningen 2, o. s. v., slutligen alla underdeterminanter af första ordningen noll åtminstone af $p-1$:a ordningen; således är $D(\varrho)$ säkert noll åtminstone af ordningen p, hvilket bevisar vårt påstående.

Men det är lätt att härleda ännu ett vilkor, som talen μ, μ_1, μ_2 .. måste uppfylla. Högra sidan af identiteten (B, 11):

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} D(\varrho)$$

är ej noll af högre ordning än $\mu + \mu_2$, under det att den venstra sidan försvinner åtminstone af ordningen $2\mu_1$; således är $2\mu_1 \leqq \mu + \mu_2$, eller, som är detsamma.

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \,.$$

Högra sidan af identiteten

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

är ej noll af högre ordning än $\mu_1 + \mu_3$, då däremot den venstra sidan åtminstone är noll af ordningen $2\mu_2$, hvaraf följer:

$$\mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3$$

o. s. v.

Om vi, för vinnande af större korthet i uttryckssättet, med »rad-indices» för en viss underdeterminant $\begin{pmatrix} m_1 & .. & m_r \\ \lambda_1 & .. & \lambda_r \end{pmatrix}$ förstå talen $m_1 \,..\, m_r$ och med »kolonn-indices» talen $\lambda_1 \,..\, \lambda_r$, kunna de i denna § funna resultaten sammanfattas på följande sätt:

Om $\varrho = \varrho'$ *är ett* μ*-faldigt nollställe till determinanten* $D(\varrho)$, *är åtminstone en bland underdeterminanterna af* μ*:te ordningen från noll skild; och om för* $\varrho = \varrho'$ *underdeterminanten*

$$\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_p \\ k_1 & . & . & k_p \end{pmatrix} \quad (p \leqq \mu)$$

ej är noll, men alla de underdeterminanter af ordningarna 1, 2, . . $p - 1$, *hvilkas rad-indices äro valda bland talen*

$$i_1\,,\; i_2\,,\; .\; .\; i_p$$

och kolonn-indices bland

$$k_1\,,\; k_2\,,\; .\; .\; k_p\,,$$

försvinna åtminstone af de resp. ordningarna $\mu_1, \mu_2, \,..\, \mu_{p-1}$, *hvarvid talen* $\mu_1, \mu_2, \,.\,.\, \mu_{p-1}$ *äro bestämda så, att icke samtliga dessa underdeterminanter äro noll af högre än dessa resp. ordningar; då kunna alltid indices* $i_1 \,..\, i_p$; $k_1 \,..\, k_p$ *tänkas ordnade på ett sådant sätt, att determinanterna*

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \;.\;.\; \begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_{p-1} \\ k_1 & . & . & k_{p-1} \end{pmatrix}$$

ej äro noll högre än af de resp. ordningarna $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{p-1}$; *och mellan dessa tal* μ_λ *bestå relationerna*

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_{p-1}$$

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_{p-1}$$

$$\mu \geqq p .$$

De på detta sätt definierade determinanterna

(26) $$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

skola vi i det följande benämna »ett till roten $\varrho = \varrho'$ hörande system af karakteristiska determinanter», och talen $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{p-1}$ de till samma rot hörande »karakteristiska talen».

Af denna definition och de i det föregående bevisade satserna framgår genast, att äfven om det fins *flera* system af karakteristiska determinanter, så äro dock de karakteristiska talen alltid desamma; och eftersom p är antalet af karakteristiska determinanter, kan detta antal aldrig vara större än ordningstalet för roten $\varrho = \varrho'$.

§ 3.

De i det föregående härledda satserna gifva oss medlet att i det allmänna fallet framställa integralerna till differentialekvationen (1).

Är serien

$$y = \Sigma_\lambda g_\lambda x^{\varrho' + \lambda}$$

en integral till (1), som existerar inom cirkelringen (RR'), måste den enligt förutsättningen $(R < 1 < R')$ konvergera för värdet $x = 1$; jemte likheterna

(27. a) $$\Sigma_\lambda \chi_{m\lambda}(\varrho') g_\lambda = 0 \qquad (m = -\infty \ldots +\infty)$$

måste således koefficienterna g_λ satisfiera olikheten

(27. b) $$|g_\lambda| < G \qquad (\lambda = -\infty \ldots +\infty)$$

där G är ett ändligt positivt tal.

För att systemet (27) skall ha en lösning, är det (B, 12) nödvändigt, att determinanten

$$[\chi_{ik}(\varrho')]_{i,k=-\infty..+\infty} = D(\varrho)$$

är noll.

Första fallet: ϱ' är ett *enkelt* nollställe till $D(\varrho)$.

Åtminstone en bland underdeterminanterna af första ordningen — låt vara $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ — är för $\varrho = \varrho'$ skild från noll; således, om vi sätta

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} g_\lambda(\varrho) = \begin{pmatrix} i_1 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda = -\infty..+\infty),$$

framställa (B, s. 430) storheterna $g_\lambda(\varrho')$ lösningen till systemet (27), och $g_{k_1}(\varrho')$ kan väljas godtyckligt; den härigenom bestämda serien $\Sigma_\lambda g_\lambda(\varrho) x^{\varrho'+\lambda}$ konvergerar (Jfr s. 507) inom (RR') och är ej identiskt noll; således är den en integral till (1).

Andra fallet: ϱ' är ett μ-faldigt ($\mu > 1$) nollställe till $D(\varrho)$. Låt

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_p \\ k_1 & .. & k_p \end{pmatrix}$$

vara de till $\varrho = \varrho'$ hörande karakteristiska determinanterna och

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{p-1}$$

de karakteristiska talen. Om vi införa beteckningarna

$$\mu - \mu_1 = \nu_1;\ \mu_1 - \mu_2 = \nu_2;\ \ldots \mu_{p-1} = \nu_p,$$

har man relationerna

$$\mu > \mu_1 > \ldots > \mu_{p-1}$$
$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_p$$
$$\mu \geqq p.$$

Lösningen till systemet (27) är (B, 12) gifven genom relationerna

$$(28)\quad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_p \\ k_1 & .. & k_p \end{pmatrix}_1 g_\lambda = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & .. & i_p \\ \lambda & k_2 & .. & k_p \end{pmatrix}_1 g_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{p-1} & i_p \\ k_1 & .. & k_{p-1} & \lambda \end{pmatrix}_1 g_{k_p}$$

$$(\lambda = -\infty..+\infty)$$

då med tecknet [1] vid parenteserna angifvas de värden, som determinanterna antaga för $\varrho = \varrho'$, och $g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots g_{k_p}$ äro godtyckliga konstanter. Den härigenom bestämda serien

$$\Sigma_\lambda\, g_\lambda\, x^{\varrho'+\lambda}$$

konvergerar inom (RR'); ty den är ett aggregat af oändliga determinanter, hvilka kunna tänkas bildade därigenom, att i vissa af determinantens $D(\varrho')$ underdeterminanter de element, som tillhöra en viss rad, ersatts med potenser af x.

Således är denna serie en integral till (1); och, eftersom den innehåller p lineärt ingående arbiträra konstanter, fins det följaktligen p och endast p af hvarandra lineärt oberoende integraler till (1) af formen

$$x^{\varrho'} L(x),$$

där $L(x)$ är en potensserie, som fortskrider efter positiva och negativa potenser af x och konvergerar inom (RR'). Är $p = \mu$, ha vi således på detta sätt erhållit så många integraler, som angifves af rotens ϱ' ordningstal.

Men betrakta det allmänna fallet: $p \leqq \mu$. Sätt

$$g_{1\lambda}(\varrho) = c_{11} \binom{i_1}{\lambda}$$

$$y_1(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}(\varrho)\, x^{\varrho+\lambda},$$

där c_{11} betecknar en arbiträr konstant[1]); man finner (I, (4)):

$$P(y_1(x, \varrho)) = \Sigma_m\, G_m(\varrho)\, x^{\varrho+m-n},$$

där

$$G_m(\varrho) = \varphi(\varrho + m)\, g_{1m} + \Sigma'_\lambda\, A_{m\lambda}\, g_{1\lambda}$$
$$= \frac{1}{h_m(\varrho)} \Sigma_\lambda\, \chi_{m\lambda}(\varrho)\, g_{1\lambda};$$

nu är identiskt (B, 5, c):

$$\Sigma_\lambda \binom{i_1}{\lambda} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} 0 \text{ om } m \neq i_1 \\ D(\varrho) \text{ om } m = i_1 \end{cases}$$

[1]) eller, om man så vill, en arbiträr funktion af ϱ, som dock ej försvinner för $\varrho = \varrho'$

hvaraf följer

$$P(y_1(x,\varrho)) = \frac{D(\varrho)}{h_{i_1}(\varrho)} x^{\varrho + i_1 - n}.$$

Alldenstund funktionerna $h_m(\varrho)$ inom ändligt område sakna noll- och oändlighetsställen, är högra membrum i denna likhet för $\varrho = \varrho'$ noll af ordningen μ; således äro funktionerna

$$P(y_1(x,\varrho)),\ \frac{\partial}{\partial\varrho} P(y_1(x,\varrho)),\ldots,\ \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\varrho^{\mu-1}} P(y_1(x,\varrho))$$

eller, som är detsamma, funktionerna

$$P(y_1),\ P\left(\frac{\partial y_1}{\partial\varrho}\right),\ldots,\ P\left(\frac{\partial^{\mu-1} y_1}{\partial\varrho^{\mu-1}}\right)$$

noll för $\varrho = \varrho'$; med andra ord: om vi sätta

$$\frac{\partial^r y_1(x,\varrho)}{\partial\varrho^r} = y_1^{(r)}(x,\varrho),$$

äro funktionerna $y_1^{(r)}(x,\varrho')$ $(r = 0, 1, \ldots \mu - 1)$ integraler till (1); är $\mu_1 = 0$ d. v. s. $g_{1k_1}(\varrho') \neq 0$, ha vi härmed erhållit μ integraler, som ej äro identiska nollor. Men betrakta det allmänna fallet: $\mu_1 > 0$; då äro funktionerna $y_1(x,\varrho'), y'(x,\varrho'),\ldots, y_1^{(\mu_1-1)}(x,\varrho')$ identiska nollor, men $y_1^{(\mu_1)}(x,\varrho')$ ej identiskt noll.

Serien $y_1(x,\varrho)$ är med afseende på ϱ inom hvarje ändligt område likformigt konvergent; således erhålles $y_1'(x,\varrho)$ genom att derivera den förstnämda serien term för term; och då, såsom man lätt finner, den nya serien $y_1'(x,\varrho)$ äfven konvergerar likformigt, erhåller man $y_1''(x,\varrho)$ genom att derivera $y_1'(x,\varrho)$ term för term o. s. v. Man finner på detta sätt, att funktionerna

$$(29^{(1)})\quad \begin{cases} y_{11} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\varrho')\, x^{\varrho'+\lambda} \\ y_{12} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu_1+1)}(\varrho') + \frac{\mu_1+1}{\lfloor 1} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\varrho') \log x \right] x^{\varrho'+\lambda} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1\nu_1} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu-1)}(\varrho') + \frac{\mu-1}{\lfloor 1} g_{1\lambda}^{(\mu-2)}(\varrho') \log x + \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots + \frac{(\mu-1)\ldots(\mu_1+1)}{\lfloor \nu_1 - 1} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\varrho')(\log x)^{\nu_1-1} \right] x^{\varrho'+\lambda} \end{cases}$$

äro integraler till (1); y_{11} är ej identiskt noll; i hvar och en integral y_{1r} $(1 < r \leqq \nu_1)$ förekommer $(\log x)^{r-1}$ multiplicerad med y_{11} och med en talfaktor, således innehålla integralerna $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1\nu_1}$ olika högsta potenser af $\log x$; således[1]) äro de af hvarandra lineärt oberoende.

Låt nu c_{21}, c_{22} vara tvänne godtyckliga konstanter och sätt

$$g_{2\lambda}(\varrho) = c_{21}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ \lambda & k_2 \end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$y_2(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}(\varrho)\, x^{\varrho+\lambda};$$

man har identiskt

$$\Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ \lambda & k_2 \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} +\begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} & \text{om } m = i_1 \\ -\begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} & \text{om } m = i_2 \\ 0 & \text{om } m \neq i_1, i_2 \end{cases}$$

$$\Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} -\begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix} & \text{om } m = i_1 \\ +\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} & \text{om } m = i_2 \\ 0 & \text{om } m \neq i_1, i_2 \end{cases}$$

Således är, om vi införa beteckningarna

$$G_{i_1}(\varrho) = c_{21}\begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} - c_{22}\begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$G_{i_2}(\varrho) = -\,c_{21}\begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix},$$

denna likhet en identitet:

$$P(y_2(x, \varrho)) = \frac{G_{i_1}(\varrho)}{h_{i_1}(\varrho)}\, x^{\varrho+i_1-n} + \frac{G_{i_2}(\varrho)}{h_{i_2}(\varrho)}\, x^{\varrho+i_2-n};$$

dess högra sida är för $\varrho = \varrho'$ noll af ordningen μ_1, men $y_2(x,\varrho)$ ej af högre ordning än μ_2; häraf sluter man på samma sätt som nyss, att funktionerna

[1]) Se THOMÉ, Borchardts J. Bd. 74, p. 195.

$$(29^{(2)})\begin{cases} y_{21} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\varrho')\, x^{\varrho'+\lambda} \\ y_{22} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_2+1)}(\varrho') + \frac{\mu_2+1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\varrho') \log x \right] x^{\varrho'+\lambda} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2\nu_2} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_1-1)}(\varrho') + \frac{\mu_1-1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_1-2)}(\varrho') \log x + \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots + \frac{(\mu_1-1)\ldots(\mu_2+1)}{\underline{|\nu_2-1}} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\varrho') (\log x)^{\nu_2-1} \right] x^{\varrho'+\lambda} \end{cases}$$

äro af hvarandra lineärt oberoende integraler.

Vi ha hittills erhållit ν_1 integraler: $y_{11}, \ldots y_{1\nu_1}$ och ν_2 integraler $y_{21}, \ldots y_{2\nu_2}$; på samma sätt kunna vi fortsätta och erhålla successivt grupper af ν_3, ν_4, o. s. v. integraler; låt till sist $c_{p1}, c_{p2}, \ldots c_{pp}$ vara tills vidare obestämda konstanter och sätt

$$g_{p\lambda}(\varrho) = c_{p1} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ \lambda & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} + \ldots + c_{pp} \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{p-1} & i_p \\ k_1 & \ldots & k_{p-1} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$y_p(x, \varrho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{p\lambda}(\varrho)\, x^{\varrho+\lambda};$$

om man beaktar, att hvarje serie af formen

$$\Sigma_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s & i_{s+1} & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & \lambda & k_{s+1} & \ldots & k_p \end{pmatrix} \chi_{r\lambda} \qquad (s = 1 \ldots p)$$

för $r \neq i_1 \ldots i_p$ är en identisk nolla, men för $r = i_1 \ldots i_p$ är lika en viss underdeterminant af ordningen $p-1$, erhålles

$$P(y_p(x, \varrho)) = \frac{G_{i_1}(\varrho)}{h_{i_1}(\varrho)} x^{\varrho+i_1-n} + \ldots + \frac{G_{i_p}(\varrho)}{h_{i_p}(\varrho)} x^{\varrho+i_p-n},$$

då med $G_{i_1}(\varrho), \ldots, G_{i_p}(\varrho)$ förstås aggregat af vissa bland de underdeterminanter af $p-1$:a ordningen, hvilkas rad-indices äro valda bland talen $i_1 \ldots i_p$ och kolonn-indices bland $k_1 \ldots k_p$; om man ihågkommer, att för $\varrho = \varrho'$ alla dylika determinanter äro noll åtminstone af ordningen μ_{p-1}, men underdeterminanten $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$ är från noll skild, kommer man på samma sätt som nyss till det resultat, att funktionerna

$$
29^{(p)} \begin{cases} y_{p1} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{p\lambda}(\varrho')\, x^{\varrho'+\lambda} \\ y_{p2} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big[g'_{p\lambda}(\varrho') + g_{p\lambda}(\varrho') \log x \Big] x^{\varrho'+\lambda} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{p\nu_p} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big[g_{p\lambda}^{(\mu_{p-1}-1)}(\varrho') + \frac{\mu_{p-1}-1}{\underline{|1}} g_{p\lambda}^{(\mu_{p-1}-2)}(\varrho') \log x + \ldots \\ \qquad \ldots + g_{p\lambda}(\varrho') (\log x)^{\mu_{p-1}-1} \Big] x^{\varrho'+\lambda} \end{cases}
$$

äro integraler till den gifna differentialekvationen; och eftersom man har

$$
g_{p\,k_p}(\varrho) = c_{pp} \begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_p \\ k_1 & . & . & k_p \end{pmatrix}
$$

är — under antagandet $c_{pp} \neq 0$ — åtminstone koefficienten $g_{p\,k_p}(\varrho')$ i serien y_{p1} skild från noll, hvaraf följer att y_{p1} ej är identiskt noll och att således dessa integraler $y_{p1}, y_{p2}, \ldots y_{p\nu_p}$ äro af hvarandra lineärt oberoende.

Vi ha sålunda erhållit $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p = \mu$ integraler:

$$
y_{11},\ y_{12}, \ldots y_{1\nu_1};\ y_{21},\ y_{22}, \ldots y_{2\nu_2}; \ldots ;\ y_{p1},\ y_{p2}, \ldots y_{p\nu_p};
$$

det är lätt att välja de ingående arbiträra kontanterna c_{rs} så, att dessa integraler *alla* bli af hvarandra lineärt oberoende; det är tillräckligt att sätta

$$
(30) \qquad \left. \begin{matrix} c_{rs} = 0 & \text{för } r \neq s \\ c_{rr} \neq 0 & \end{matrix} \right\} (r,\ s = 1 \ldots p)
$$

Om nemligen konstanterna äro valda på detta sätt, är det först och främst lätt att se, att integralerna

$$
y_{11},\ y_{21}, \ldots y_{p1}
$$

äro af hvarandra lineärt oberoende; ty bestode mellan dem en lineär homogen relation med konstanta koefficienter:

$$
K_1 y_{11} + K_2 y_{21} + \ldots + K_p y_{p1} = 0\,,
$$

måste bland andra äfven följande likheter vara uppfylda:

$$(31) \quad \begin{cases} K_1 [y_{11}]_{k_1} + K_2 [y_{21}]_{k_1} + \ldots + K_p [y_{p1}]_{k_1} = 0 \\ K_1 [y_{11}]_{k_2} + K_2 [y_{21}]_{k_2} + \ldots + K_p [y_{p1}]_{k_2} = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ K_1 [y_{11}]_{k_p} + K_2 [y_{21}]_{k_p} + \ldots + K_p [y_{p1}]_{k_p} = 0 \end{cases}$$

då med $[y_{r1}]_{k_s}$ förstås koefficienten för $x^{\varrho'+k_s}$ i serien y_{r1}; man har

$$[y_{r1}]_{k_s} = 0 \text{ för } s < r$$
$$\neq 0 \quad » \quad s = r ,$$

hvaraf följer, att determinanten för det med afseende på K_1, $K_2, \ldots K_p$ lineära ekvationssystemet (31) är skild från noll, således måste

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_p = 0 ,$$

hvilket visar, att $y_{11}, y_{21}, \ldots y_{p1}$ verkligen äro lineärt oberoende. Häraf åter är det lätt att se, att alla de μ integraler, som vi erhållit, äro af hvarandra lineärt oberoende; ty i hvar och en af dem är koefficienten för den högsta potensen af $\log x$ lika med en bland integralerna $y_{11}, y_{21}, \ldots y_{p1}$ multiplicerad med någon viss talfaktor; hvarje lineär homogen funktion af våra integraler:

$$u = \Sigma_{r,s} K_{rs}\, y_{rs} \qquad (s = 1 \ldots \nu_r;\ r = 1 \ldots p)$$

låter således skrifva sig som en hel rationel funktion af $\log x$, där koefficienten för den högsta potensen af $\log x$ är lineär och homogen i funktionerna $y_{11}, y_{21}, \ldots y_{p1}$; men då en funktion u af detta slag ej kan vara identiskt noll med mindre än att i densamma koefficienterna för de olika potenserna af $\log x$ äro identiska nollor, skulle vi ledas till en lineär homogen relation mellan y_{11}, y_{21}, y_{p1}; detta nödgar oss att sätta vissa bland konstanterna $K_{rs} = 0$; härigenom öfvergår, såsom man lätt finner, koefficienten för den därnäst högsta potensen af $\log x$ i funktionen u till att bli lineär och homogen i funktionerna $y_{11}, y_{21}, \ldots$ $\ldots y_{p1}$, hvaraf blir en följd, att ytterligare några af konstanterna K_{rs} måste sättas $= 0$; o. s. v.

Emot den μ-faldiga roten $\varrho = \varrho'$ svara således μ af hvarandra lineärt oberoende integraler $y_{11} \ldots y_{p\nu_p}$; då sak samma gäller

för öfriga nollställen till $D(\varrho)$, och då summan af ordningstalen för ett system inkongruenta nollställen är lika med n, inse vi lätt, att på detta sätt erhållas inalles n af hvarandra lineärt oberoende integraler, eller m. a. o. *ett fundamentalsystem integraler till den gifna differentialekvationen.*

Som vi sett, sönderfaller den till $\varrho = \varrho'$ hörande gruppen af μ integraler i p stycken partialgrupper:

$$\begin{array}{l} y_{11} \; . \; . \; y_{1\nu_1} \\ y_{21} \; . \; . \; y_{2\nu_2} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ y_{p1} \; . \; . \; y_{p\nu_p} \, ; \end{array}$$

om vi betrakta en sådan partialgrupp af ν integraler, synes omedelbart af dessas form, att antalet potenser af $\log x$, som öfver hufvud taget förekomma inom partialgruppen (inclusive potenser af formen $(\log x)^0$) eller, som är detsamma, antalet af uppträdande entydiga funktioner är $1 + 2 + \,.\,.\, + \nu$; men mellan dessa funktioner bestå $1 + 2 + \,.\,.\, + \nu - 1$ lineära, homogena, heltaliga relationer, och således är antalet af hvarandra lineärt oberoende entydiga funktioner inom partialgruppen ej större än ν; i uttrycken för våra μ integraler förekommer det således ej mer än $\nu_1 + \nu_2 + \,.\,.\, + \nu_p = \mu$, och således, öfver hufvud taget, i alla våra n integraler, ej mer än n dylika oberoende funktioner, d. v. s. det nödvändiga och tillräckliga antalet. Lineära homogena relationer mellan koefficienter för $\log x$ i integraler tillhörande *skilda* partialgrupper äro således ej möjliga.

Låt $\eta_1, \eta_2, \,.\,.\, \eta_r$ vara godtyckliga funktionselement till integralerna i en af de till $\varrho = \varrho'$ hörande partialgrupperna; beteckna med $\bar{y}$ det värde, som en funktion y af x antager, efter det att variabeln x beskrifvit en gång och i positiv led en sluten kontur, som helt och hållet ligger inom cirkelringen (RR'), och som icke skär sig själf; en blick på formen af våra integraler visar, att

$$(32) \qquad \begin{cases} \bar{\eta}_1 = \omega' \, \eta_1 \\ \bar{\eta}_2 = \omega' \, (\gamma_{21} \, \eta_1 + \eta_2) \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \bar{\eta}_r = \omega' \, (\gamma_{r1} \, \eta_1 + \,.\,.\, + \gamma_{r,r-1} \, \eta_{r-1} + \eta_r) \, , \end{cases}$$

där $\omega' = e^{2\pi i \varrho'}$ och koefficienterna $\gamma_{\alpha\beta}$ äro vissa positiva heltalsmultiplar af $2\pi i$ eller af dess potenser.

Vi kunna således uttala denna sats:

Låt $\varrho = \varrho'$ vara ett μ-faldigt nollställe till $D(\varrho)$; låt

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

vara de mot ϱ' svarande karakteristiska determinanterna och $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{p-1}$ de karakteristiska talen; emot $\varrho = \varrho'$ svarar då en grupp af μ integraler, hvilken sönderfaller i p partialgrupper, af hvilka den första innehåller $\mu - \mu_1$, den andra $\mu_1 - \mu_2, \ldots$, den sista μ_{p-1} integraler; hvarje partialgrupp karakteriseras däraf, att lineära, homogena, heltaliga relationer äga rum mellan de entydiga funktioner, som uppträda inom densamma, men ej mellan funktioner ur skilda partialgrupper, hvarvid antalet af oberoende entydiga funktioner inom hvarje partialgrupp är lika stort som antalet integraler; den analytiska framställningen af integralerna inom (RR') lemnas genom formlerna ($29^{(1)}$, $29^{(2)}, \ldots$ $29^{(p)}$), *och den analytiska fortsättningen inom (RR') af ett system af funktionselement $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ till de r integralerna i en viss partialgrupp är gifven under formen* (32).

Är $\mu_1 = 0$ måste äfven $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{p-1} = 0$, således $\nu_1 = \mu$, $\nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_p = 0$. I detta fall bilda våra μ integraler en enda partialgrupp, i hvilken $\log x$ uppträder ända till $\mu - 1$:a potensen; i hvarje annat fall sönderfalla de i flera partialgrupper; således:

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att de till den μ-faldiga roten $\varrho = \varrho'$ hörande integralerna alla skola tillhöra samma partialgrupp är, att $D(\varrho)$ har en underdeterminant af första ordningen, som för $\varrho = \varrho'$ är skild från noll; med andra ord: att antalet af de karakteristiska talen för $\varrho = \varrho'$ är ett.

Af alla de till ϱ' hörande integralerna:

$$y_{11} \ldots y_{1\nu_1};\; y_{21} \ldots y_{2\nu_2};\; \ldots;\; y_{p1} \ldots y_{p\nu_p}$$

äro endast $y_{11}, y_{21}, \ldots y_{p1}$ fria från $\log x$; för att till ϱ' skola

höra μ integraler fria från $\log x$, är följaktligen nödvändigt och tillräckligt att $p = \mu$; men eftersom

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_p ; \quad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p = \mu ,$$

har detta till följd, att $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_p = 1$, d. v. s.

$$\mu_1 = \mu - 1, \ \mu_2 = \mu - 2, \ \ldots \ \mu_{p-1} = \mu - p + 1 = 1 .$$

Således:

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att alla till $\varrho = \varrho'$ hörande integraler skola vara fria från $\log x$; eller, hvilket är detsamma, det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att mot $\varrho = \varrho'$ skall svara en integral af formen

$$y = x^{\varrho'} \left[\mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

innehållande μ arbiträra konstanter är, att antalet af de karakteristiska talen för $\varrho = \varrho'$ är μ; med andra ord: att de karakteristiska talen äro

$$\mu , \ \mu - 1 , \ \ldots \ 1$$

§ 4.

Det är ej utan intresse att undersöka, hvilket samband äger rum mellan de i det föregående härledda satserna och några af de resultat man förut känner.

Först möter oss frågan: hvilken relation existerar mellan den fuchsiska fundamentallikheten och likheten $D(\varrho) = 0$?

Låt $y_1, y_2, \ldots y_n$ vara ett fundamentalsystem integraler; låt

$$\overline{y}_r = \beta_{r1} y_1 + \ldots + \beta_{rn} y_n \qquad (r = 1 \ldots n)$$

och sätt

$$F(\omega) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega & \ldots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} ;$$

då är som bekant

$$F(\omega) = 0$$

den till cirkelringen (RR') hörande fuchsiska fundamentallikheten. Låt $\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(n)}$ vara de inkongruenta nollställena — hvart och ett upprepadt så ofta, som dess ordningstal angifver — till determinanten $D(\varrho)$, och sätt

$$e^{2\pi i\varrho} = \omega\,; \quad e^{2\pi i\varrho^{(\lambda)}} = \omega^{(\lambda)} \qquad {\scriptstyle(\lambda = 1\,..\,n)}\,;$$

då öfvergår likh. (17) med beaktande af (18) till

$$D(\varrho)\cdot K \cdot e^{n\pi i\varrho} = (e^{2\pi i\varrho} - e^{2\pi i\varrho'})\,.\,.\,(e^{2\pi i\varrho} - e^{2\pi i\varrho^{(n)}})$$

$$K = (2\pi i)^n\, e^{\frac{n(n-1)}{2}\pi i}\,;$$

men om vi för $y_1, y_2, \ldots y_n$ välja det i föreg. § framstälda fundamentalsystemet och ihågkomma relationerna (32), är det lätt att se, att $F(\omega)$ erhåller formen

$$F(\omega) = (\omega' - \omega)\ .\ .\ (\omega^{(n)} - \omega)\,;$$

således är

$$F(\omega) = K'\, e^{n\pi i\varrho}\, D(\varrho); \ \ K' = (-1)^n K$$

det sökta sambandet mellan funktionerna $F(\omega)$ och $D(\varrho)$; det visar, att likheten

$$F(e^{2\pi i\varrho}) = 0$$

har samma rötter som $D(\varrho) = 0$ — hvilket man ju för öfrigt a priori hade kunnat vänta.

Det är ej heller svårt att visa, att om vi låta $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ behålla samma betydelse som i föreg. §, storheterna

$$(\omega - \omega')^{\nu_1},\ (\omega - \omega')^{\nu_2},\ .\ .\ (\omega - \omega')^{\nu_p}$$

äro de till roten $\omega = \omega'$ hörande elementära divisorerna[1]) till determinanten för den bilineära formen

$$\Sigma_{i,k}\, \beta_{ki}\, \xi_i\, \eta_k - \omega\, \Sigma_i\, \xi_i\, \eta_i\,,$$

---

[1]) »Elementar-Theiler»; se WEIERSTRASS, Berl. Monatsberichte 1868, Mai.

d. v. s. till determinanten $F(\omega)$; men då det i själfva verket just äro dessa elementära divisorer, som ligga till grund för HAMBURGERS metod att indela integralerna i grupper och partialgrupper[1]), framgår otvunget öfverensstämmelsen mellan gruppindelningen i § 3 och den af HAMBURGER genomförda.

---

[1]) HAMBURGER, BORCHARDTS J. Bd 76, p. 113.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 492.)

Paris. *Bureau central météorologique.*
Bulletin international. Année 38 (1889): N:o 1—365. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1889: N:o 1—12. 4:o.
— *Observatoire municipal de Montsouris.*
Annuaire. 1889—90. 16:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 37 (1889). 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*
Meteorologische und magnetische Beobachtungen. Jahr 1888: 1—7; 9—12 & Jahresübersicht. Tvfol.
Prag. *K. K. Sternwarte.*
Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 50 (1889). 4:o.
Puebla. *Observatorio meteorologico del estado.*
Résumen de observaciones. 1889: 5—6, 8, 10. Fol.
Rio de Janeiro. *Observatorio meteorologico.*
Boletins mensaes. Vol. 1 (1886)—3 (1888). 8:o.
Riposto. *Osservatorio meteorologico del R. instituto nautico.*
Bolettino mensile. Anno 15 (1889): N:o 1—12. 8:o.
Roma. *Ufficio centrale di meteorologia e di geodynamica.*
Bollettino meteorico giornaliero. Anno 11 (1889): 1—365. 4:o.
Annali. (2) V. 8 (1886): P. 2—3. 4:o.
Rousdon. *Observatory.*
Meteorological observations. Vol. 6 (1889). 4:o.
San Fernando. *Instituto y observatorio di marina.*
Anales. Seccion 2. Observaciones meteorológicas. Año 1888—1889. 4:o.
San Salvador. *Instituto Nacional.*
Observaciones meteorológicas. 1889: 1—12. Fol.
S:t Petersburg. *Physikalisches Centralobservatorium.*
Meteorologisches Bulletin. Jahr 1888: N:o 3—365; 1889: 1—210; 212—365. Fol.
» » Nachträge. Jahr 1888: 12; 1889: 1—12. Fol.
Annalen. Jahrg. 1888: Th. 1—2; 1889: 1. 4:o.
Repertorium für Meteorologie, redigirt von H. Wild. Bd. 12. 1889. 4:o.
— *Séction statistique du Département des contributions directes.*
[Carte de l']épaisseur de la couche de neige [en] Russie d'Europe au commencement de Février 1890. Fol.
Siracusa. *Osservatorio centrale.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 13 (1889): N:o 1—12. 8:o.
Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. 1885; 1887—1888. 8:o.
Torino. *Società meteorologica Italiana.*
Bollettino mensuale. (2) V. 9 (1889): N:o 1—12. 4:o.
Annuario meteorologico Italiano. Anno 5 (1890). 16:o.
Toronto. *Meteorological service of the Dominion of Canada.*
Monthly weather rewiew. Year 1889: N:o 1—12. 4:o.
Report. Year 1886. 8:o.

Trieste. *Osservatorio marittimo della I. R. Accademia di nautica.*
Rapporto annuale. Vol. 4 (1889). 4:o.

Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Nederlandsch meteorologisch Jaarboek. Jaarg. 41 (1889). Tv. 4:o.

Venezia. *Osservatorio Patriarcale.*
Annuario astro-meteorologico con effemeridi nautice. Anno 7 (1889). 8:o.

Washington. *Signal office of U. S. Army.*
Summary and review of international meteorological observations. Year 1886: 8–10; 1887: 9–10. 4:o.
Daily international chart. Year 1887: $^1/_9$—$^{31}/_{10}$. Tvfol.
Tridaily [American] meteorological record. Year 1878: 5–12. Tvfol.
Twodaily [American] weather maps. 8 A. M. 8 P. m. Year 1889: $^1/_1$—$^{31}/_{12}$. Fol.
Charts showing the rainfall in the United States for each month $1870/_1$—$1873/_{12}$. 1888. 4:o.
Monthly [American] weather review. Year 1889: 1–12. 4:o.
Report. Year 1889. P. 1—2. 8:o.
Fassig, O. L., Bibliography of meteorology. A classed catalogue of the printed literature of meteorology from the origin of printing to the close of 1881; with a supplement to the close of 1887, and an author index. P. 2. Washingt. 1889. 4:o.

— *Hydrographic office. U. S. Navy.*
Pilot chart of the North Atlantic ocean. 1889: 1–2; Suppl.: 3–5. Fol.

Wien. *K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus,*
Jahrbücher. Bd. 33 (1888). 4:o.
Beobachtungen an der K. K. Centralanstalt . . . Hohe Warte bei Wien. 1889: 1. 8:o.
Tägliche Beobachtungen an 18 Stationen in Österreich und 3 Stationen im Auslande. Jahr 1888: s. 1–48; 65–120. 1889; 1–40; 57–88. 4:o.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*
Meteorologische Beobachtungen an 15 Stationen der Schweiz. Jahr 1889: 1–12. 4:o.

Utgifvarne.
Månadsöfversigt af väderleken i Sverige . . . utg. af H. E. Hamberg. Årg. 9 (1889): 1–12. Fol.
Symons's Meteorological magazine. Vol. 24 (1889). London. 8:o.

Författarne.
Ekholm, N., Über die Einwirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Luftbewegung. Sthm 1890. 8:o.
Hildebrandsson, H., Rapport [au Congrès International de météorologie à Paris 1889] sur la classification des nuages. Paris 1889. 8:o.
—, Köppen, W., Neumayer, G., Wolken-Atlas. — Atlas des nuages. — Cloud atlas. — Moln-Atlas. Hamburg 1890. 4:o.
Juhlin, J., Sur la température nocturne de l'air à différentes hauteurs. Upsal 1890. 4:o.
Wigert, Th., Orage accompagné de trombes près Upsala [$1887^1/_{12}$]. Sthm 1888. 8:o.

ASSMANN, R., Klimatologische Beobachtungen über die jetzt herrschende Influenza-Epidemie. Braunschw. 1890. 8:o.

BUYS BALLOT, C. H. D., Verdeeling der Warmte over de Aarde. Amsterdam 1888. 4:o.

DENZA, F., L'anticiclone del Novembre 1889. Roma 1890. 4:o.

— Le alte pressioni del Decembre 1889 e Gennaio 1890. Roma 1890. 4:o.

FRITZ, S., Remarks on winds, clouds and auroras on the Southwest-coast of Greenland after 13 years observations at Ivigtut. Copenhagen 1883. Fol.

HANN, J., Beiträge zur arktischen Meteorologie. Berlin 1889. 8:o.

— Ergebnisse der Dänischen Internationalen Polar-Expeditionen 1882/1883: Angezeigt von J. H. Berlin 1890. 8:o.

— Die meteorologischen Ergebnisse der Lady Franklin Bay-Expedition 1881/83. Angezeigt und theilweise bearbeitet von J. H. Berlin 1890. 8:o.

— Resultate der meteorologischen Beobachtungen der Französischen Polar-Expedition 1882/83 am Cap Horn. Angezeigt von J. H. Berlin 1889. 8:o.

— Resultate der meteorologischen Beobachtungen an der Finnländischen Internationalen Polarstation in Sodankylä. Angezeigt von J. H. Berlin 1890. 8:o.

HOFFMEYER, N., Weitere Bemerkungen über die Luftdruckvertheilung im Winter. Wien 1879. 8:o.

— Étude sur les tempêtes de l'Atlantique septentrional et projet d'un service télégraphique international relatif à cet ocean. Copenh. 1880. 4:o.

— Havets Strömninger ved Island. Et Foredrag. Kjöb. 1878. 4:o.

KLOSSOVSKY, A., Différentes formes des grêlons observés au Sud-Ouest de la Russie. Notice. Odessa 1890. 8:o.

MEYER, H., Über die Häufigkeit des Vorkommens gegebener Temperaturgruppen in Norddeutschland. Berlin 1887. 8:o.

MOHN, H., Studier over Nedbörens Varighed og Tæthed i Norge. Chra 1888. 8:o.

MÜTTRICH, A., Über den Einfluss des Waldes auf die periodischen Veränderungen der Lufttemperatur. Berlin 1890. 8:o.

PLATZER, P., Sulla straordinaria quantità di neve negli anni 1836 e 1888. Udine 1890. 8:o.

SCHREIBER, P., Neuerungen und Erfahrungen an Apparaten zur Prüfung von Thermometern und Aneroidbarometern, Windfahne und Windstärkemesser, Registrirapparaten von Richard frères und dem Barometer Wild-Fuess. Berlin 1889. 8:o.

WILD, H., Neuer Anemograph und Anemoscop. S:t Petersb. 1890. 8:o.

— Ombrograph und Atmograph. S:t Petersb. 1890. 4:o.

— Über Assmann's neue Methode zur Ermittelung der wahren Lufttemperatur. S:t Petersb. 1889. 4:o.

ZENGER, CH. V., Le fœhn et son origine cosmique. Paris 1886. 4:o.

Stockholm 1890. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 47. 1890. № 10.

Onsdagen den 10 December.

INNEHÅLL:

Hr WITTROCK dels anmälde, att Riksmusei botaniska afdelning såsom gåfva fått mottaga från Professor L. F. EKMANS arfvingar hans efterlemnade samling af alger, och från Lektor S. ALMQVIST en mycket rikhaltig samling af Hieracier; dels förevisade och förklarade de af honom under året utgifna tredje och fjerde delarne af exsiccatverket: »Erythrææ exsiccatæ»; dels redogjorde för innehållet af en af Lektor C. A. M. LINDMAN författad uppsats: »Ueber die Bromeliaceen-Gattungen Karatas, Nidularium und Regelia»*.

Hr RETZIUS lemnade en utförlig framställning af undersökningar, som han i senare tid anställt öfver det centrala nervsystemets byggnad hos ryggradslösa djur, särskildt kräftdjuren, samt i allmänhet öfver sammanhanget mellan nervcellerna och nervtrådarne i de nervösa centralorganen.

Hr GYLDÉN dels meddelade en uppsats af Amanuensen D:r K. BOHLIN: »Till frågan om sekulära störingar» (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.), och dels förevisade några på Akademiens observatorium tagna stjernfotografier.

Sekreteraren öfverlemnade följande för intagande i Akademiens skrifter insända uppsatser: 1:o) »Temperaturens inflytande på några vätskors kapillaritets-konstanter» af Fil. Kandidaten G. TIMBERG (se Bihang etc.); 2:o) »Om jodvätesyras inverkan på 1-6-nitronaftalinsulfonsyreamid» af Fil. Kandidaten A. EKBOM*; 3:o) »Sur la notion de l'énergie libre» af Fil. Doktor A. ROSÉN*.

Till ledamot af Stockholms Högskolas styrelse efter Hr L. F. NILSSON, som haft detta uppdrag under åren 1887—1890 men undanbedt sig återval, utsågs för åren 1891—1894 Hr O. C. LOVÉN.

Genom anställda val kallades vice Direktorn för Kejserl. Ryska Nicolai Observatorium i Pulkowa Fil. Doktorn MAGNUS NYRÉN, H. M. Konungens läkare, Professorn i Medicin vid Karolinska mediko-kirurgiska Institutet och Öfverläkaren vid Serafimerlasarettet RAGNAR MAGNUS BRUZELIUS, samt Professorn i Fysiologi vid Karolinska Institutet ROBERT ADOLF ARMAND TIGERSTEDT till svenska ledamöter af Akademien.

Årsräntan å Edlundska donationsfonden beslöt Akademien att i lika lotter fördela mellan sin Fysiker Hr HASSELBERG till anskaffande af apparater för de spektroskopiska precisionsundersökningar, hvarmed han för närvarande är sysselsatt, och Amanuensen D:r N. EKHOLM för utförande af undersökningar öfver Sveriges väderleks- och särskildt nederbördsförhållanden i ändamål att vinna ökad säkerhet i väderleksförutsägelser.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Svenska akademien.*
Handlingar från år 1886. D. 4. 1890. 8:o.
— *K. Vitterhets- historie- och antiqvitets-akademien.*
Antiqvarisk tidskrift för Sverige. D. 11: H. 1—2. 1890. 8:o.
Månadsblad. Årg. 17(1888)—18(1889). 8:o.
Kristiania. *K. Norska Frederiks Universitetet.*
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 14: H. 1—2. 1890. 8:o.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 31: H. 4. 1890. 8:o.

(Forts. å sid. 544.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890. N:o 10.
Stockholm.

Ueber die Bromeliaceen-Gattungen Karatas, Nidularium und Regelia.

Von C. A. M. LINDMAN.

[Mitgetheilt den 10 December 1890 durch V. B. WITTROCK.]

Die Gattung *Karatas* wurde 1703 von PLUMIER aufgestellt (Nova plantar. americanar. genera, 1703, pag. 10, tab. 33. PLUMIER kannte nur eine einzige Art, die von LINNÉ (Spec. pl., ed. 2, 1762—3, pag. 408; Syst., T. II, 1767, pag. 232) und JACQUIN (Selectar. stirpium american. historia, 1763, pag. 90, tab. 178, fig. 26; Hort. bot. Vindobonensis, 1770, tab. 31, 32) zu der Gattung *Bromelia* geführt wurde. Sie bekam den Namen *Bromelia Karatas*, obgleich PLUMIER seine *Karatas* von seinem zweiten Genus *Bromelia* durch diese Worte getrennt hatte: »Karatas est plantæ genus flore monopetalo infundibuliforme, trifido . . . . .»

1854 stellte LEMAIRE die Gattung *Nidularium* auf (Le Jardin Fleuriste, IV, Misc. 60, tab. 411). Die wichtigsten Merkmale derselben waren: 1) der köpfchenähnliche, zwischen den inneren Blättern der Blattrosette nistende Blütenstand, 2) calyx monosepalus, 3) corolla monopetala. Zu dieser Gattung führte LEMAIRE damals nur 2 Species: *Nidularium Karatas* (die alte Bromelia Karatas L.) und *N. fulgens* LEM. n. sp.

Mehrere Arten, die später zu *Nidularium* oder *Karatas* gerechnet worden sind, blieben unter der Gattung »*Bromelia*», wie diese von BEER aufgefasst worden war (= *Karatas* PLUM., also ein Genus mit nistendem, köpfchenähnlichem Blütenstande); so z. B. zählt C. KOCH noch im Jahre 1860 folgende Arten

auf: *Bromelia Karatas* L., *humilis* JACQ., *cruenta* GRAH., *Carolinæ* BEER, *tristis*, BEER, *denticulata* C. KOCH.

Die Grenzen des *Nidularium* LEM. waren noch ziemlich schwebend und der Typus *Nid. fulgens* LEM. scheint ganz und gar eine Abstraktion geworden zu sein, denn als LEMAIRE die oben erwähnte »Bromelia Carolinæ» in sein neues Genus einziehen wollte, kam man ihm mit Spott entgegen, und ein Streit entspann sich (vgl. La Belgique Horticole und L'Illustration Horticole, 1860) wo z. B. unter Anderem auch die Frage mit grosser Hitze behandelt wurde, ob nicht etwa »*Bromelia*» (BEER!) und »*Nidularium*» durch den Blütenstand unterschieden werden könnten, den man bei jener centripetal, bei diesem centrifugal sich zu entwickeln vermutete!

Ein Lichtstrahl in diesem Dunkel hatte sich indessen schon 1859 sehen lassen. REGEL entdeckte innerhalb des *Nidularium* 2 verschiedene Typen (Gartenflora, 1859, S. 264). LEMAIRE hatte nämlich vermutet, die neue Art *Nidular. Meyendorffii* REG. sollte mit *Nid. fulgens* LEM. vereinigt werden. Dies gab REGEL Anlass zu einer sorgfältigeren Untersuchung der Blüten der zwei Arten, und es stellte sich heraus, dass sie als Repräsentanten für je eine besondere Abteilung der Gattung *Nidularium* angesehen werden konnten. *Nidularium* wurde deshalb in folgender Weise zergliedert:

A. Laciniæ perianthii interiores basi tantum cum staminibus exterioribus in tubum connatæ. Bracteæ unifloræ.

Nidularium Meyendorffii REG.
» *cruentum* REG.

B. Laciniæ perianthii interiores in tubum connatæ et apice tantum liberæ. Bracteæ plurifloræ, flores singuli bracteolis suffulti.

N. fulgens LEM.
» *Scheremetiewii* REG.
» *purpureum* BEER.
» *discolor* BEER.

Nidularium schloss also schon 6 (5) Arten ein. REGEL hatte nun gezeigt, wie heterogen es geworden war. Nichts destoweniger findet man fast zu derselben Zeit, dass C. KOCH die von REGEL dargestellten Unterschiede ganz ignorirt und zwar die Merkmale

»bracteæ unifloræ, bracteæ pluriflorae». Er schildert LEMAIRE's *Nidularium* und zeigt darauf hin, dass *Bromelia* BEER (*Karatas* PLUM.) wie andere Bromeliaceen alle Blüten in einer einzigen (endständigen) Infloresceuz hat, die Inflorescenz des *Nidularium* dagegen ist in verschiedene Partien geteilt, die sich in den Axillen der inneren metamorphosirten Blätter finden. Dies Verhältnis ist zwar für LEMAIRE's 2 ursprüngliche Arten (*N. Karatas* und *N. fulgens*) ganz zutreffend, denn sie haben »bracteæ plurifloræ»; REGEL's »bracteæ uniflorae» hatten doch gezeigt, dass in dieselbe Gattung auch andere Arten hineingekommen waren, die eine einzige, terminale, einfach racemöse Inflorescenz hatten. — KOCH glaubt auch behaupten zu können, die Entwickelung des Blütenstandes sei bei *Nidularium* »centrifugal». Wenn er mit diesem Ausdrucke auf *Nid. fulgens* anspielt, so ist seine Meinung schwer zu verstehen; hat er aber an den zweiten Typus, *Nid. Meyendorffii*, gedacht, so ist gar kein Sinn dahin einzubringen.

Im folgenden Jahre (1860, L'Ill. Horticole, sub tab. 245) hat LEMAIRE einen neuen Beitrag zur Erörterung dieser Gattungen gegeben. Er nimmt die zwei Sectionen REGEL's an (sieh oben!). Die erstere von diesen nennt er *Regelia* und hält hervor, dass sie sich von *Nidularium* (im engeren Sinne) durch den Blütenstand unterscheidet. Seine Eintheilung wird folgende:

Nidularium LEM.

§ 1. Floribus ombelloideo-capitulatis centralibus. *Regelia* LEM.

1. *Nidular. Meyendorffii* REG.
2. » *cruentum* REG.
3. *N. Innocentii* LEM.
4. » *cæruleum* LEM.[1])

§ 2. Floribus axillaribus, versus centrum fasciculatis. *Nidularium* LEM. s. str.

5. *N. fulgens* LEM.
6. » *Scheremetiewii* REG.
7. *N. purpureum* BEER. }
8. » *discolor* BEER. }

REGEL selbst schient später den Versuch aufgegeben zu haben, die Gruppirung innerhalb der Gattung *Nidularium* festzuhalten. 1868 (Gartenflora, S. 65 ff.) gibt er eine Uebersicht über *Bromelieæ*; unter den »*Acaules*» finden wir *Nidularium* LEM. nur mit diesen Worten beschrieben: »Calyx monophyllus, trifidus,

[1]) Quid?

foliolis erectis». Hier werden wiederum 8 Arten aufgezählt, jedoch nicht ganz dieselben, wie bei LEMAIRE (s. oben!); Arten aus den beiden Gruppen, die er früher getrennt hatte, werden jetzt ohne Unterschied mit einander vermischt; als ein neues *Nidularium* fügt er noch die alte *Bromelia humilis* JACQ. hinzu, von der er doch bemerkt: »es ist leicht möglich, dass diese Art auch den Typus einer neuen Gattung bilden muss».

WAWRA (Die Bromeliaceen-Ausbeute von der Reise der Prinzen August und Ferdinand von Sachsen-Coburg nach Brasilien 1879, Oesterr. botan. Zeitschrift, 1880, S. 69 ff.) steht auf demselben Standpunkt.

Schon früher hatte jedoch E. MORREN (Belg. Hort., 1872, S. 130) aus *Nidularium* seine neue Gattung *Karatas* abgesondert, als eine Gruppe von habituell nahe verwandten Arten. Er bildet die neue Art *Karatas Legrellæ* ab (Belg. Hort., 1872, pl. 11—13); der Typus der neuauferstandenen Gattung ward PLUMIER's alte Art, die jetzt *Karatas Plumieri* genannt wird. Es kommt noch JACQUIN's *Bromelia humilis* hinzu (*Karatas humilis* E. MRN).

Auf diese Weise wird der *Karatas*-Typus s. str. unschwer zu fixiren, obgleich die hinzugefügte Beschreibung MORREN's dem *Nidularium* gegenüber zu wenig markirt ist. Die wichtigsten Merkmale können so zusammengefasst werden:

1. Calyx tubulosus, tripartitus, laciniis longis.
2. Corolla gamopetala, tubulosa, clavata.
3. Filamentorum basis tubo corollæ adnata.
4. Antheræ basifixæ sagittatæ.
5. Herbæ acaules.
6. Inflorescentia capituliformis, nidulans, floribus dense corymbosis.

Die Worte: »corolla tubulosa, clavata; floribus dense corymbosis» deuten an, dass *Karatas* MRN sich am meisten derjenigen Section von *Nidularium* anschliesst, deren Typus REGEL 1859 in *Nidul. fulgens* gefunden hatte. Die Blätter einer *Karatas* werden doch als »longissima, dentato-spinosa» hervorgehoben.

Es war also hiedurch der Grund zu einer Dreiteilung dieser schnell anwachsenden Artengruppe gelegt. Sie ist aus 3 Typen zusammengesetzt: *Nidularium* LEM. s. str., *Regelia* LEM., *Karatas* MRN. Die angegebenen Unterschiede blieben jedoch lange ganz ignorirt. Während dass neue Bromeliaceen-Gattungen aufgestellt wurden, deren Genusmerkmale die geringfügigsten waren, blieb *Nidularium* LEM. (s. lat.) unverrückt, Dank sei der auffallenden habituellen Ähnlichkeit der Pflanzen und der Blütenstände.

BENTHAM und HOOKER (Genera plantarum, III, 1883) nahmen wieder den alten Namen *Karatas* (PLUM.) ADANS. an, liessen ihn aber auch für sowohl *Regelia* als für *Nidularium* s. str. gelten. Der Gattungscharakter der *Karatas* in diesem neuen erweiterten Sinne hätte ein ganz anderer sein sollen, als derjenige, den E. MORREN gegeben hat, ist jedoch bei BENTHAM und HOOKER noch sehr schwebend und teilweise ganz irrig. Er ist kürzlich folgenden Inhalts:

Bromelieæ: *Karatas* ADANS.

1. Sepala supra ovarium libera.
2. Petala basi v. alte in tubum connata, apice obtusa, erecta v. vix patentia.
3. Stamina omnia tubo corollæ affixa, petalis breviora.
4. Folia rosulata, sæpe longissima, spinoso-serrata.
5. Flores in capitulum densum sessile simplex v. compositum terminale conferti.

Von all den Merkmalen, die REGEL, LEMAIRE, E. MORREN mehrfach besprochen hatten wegen einer Spaltung dieser heterogenen Artengruppe, finden BENTHAM und HOOKER sonderbarer Weise nur eine einzige unbedeutende Frage der weiteren Besprechung wert: die basi- oder dorsifixen Antheren — ein Merkmal, das die Verfasser selbst mit gutem Recht für unzureichend als Genuscharakter erklären.

Der schroffe Gegensatz innerhalb dieser grosser Gattung konnte jedoch der Aufmerksamkeit nicht entgehen. Es war zu erwarten, dass ein Gärtner, der diese Arten öfters in der Cultur sah, wie einst LEMAIRE gethan hatte, die wesentliche Verschie-

denheit entdecken sollte, die diese habituell sehr ähnlichen Pflanzen in gut begrenzte Gruppen zergliedert. Es war auch aus den reichen Treibhäusern des K. K. Hofburggartens in Wien, dass FRANZ ANTOINE eine Reihe ausgezeichneter Abbildungen von *Karatas*-Arten u. a. auszusenden begann, und zwar so geordnet, wie es die Untersuchungen LEMAIRE's, REGEL's und MORREN's zu verstehen gegeben hatten. ANTOINE (Phyto-Iconographie der Bromeliaceen des K. K. Hofburggartens in Wien, 1884) stellt die drei Namen *Karatas*, *Regelia*, *Nidularium*, als Sectionen der Gattung *Karatas* s. lat., wieder her. Seine Tafeln sind bisweilen etwas mangelhaft in Betreff der Deutlichkeit oder Vollständigkeit; die sorgfältigen Beschreibungen aber geben die beste Anleitung dieselben zu beurteilen.

Ich habe demnach die Blüten der hieher gehörenden Arten sehr genau analysirt, wo ich sie im lebenden Zustande gesehen habe. Gegenwärtig mit der Bestimmung der Bromeliaceen des Herbarium Regnellianum zu Stockholm beschäftigt, stiess ich mehrmals auf grosse Schwierigkeiten, die Genera nach den Genuscharacteren BENTH. u. HOOKER's zu bestimmen. Glücklicherweise konnte ich das reiche Spiritusmaterial des Reichsmuseums zu Stockholm benutzen; und nachdem ich überdies Gelegenheit gehabt habe in den ersten Treibhäusern Europas eine grosse Anzahl blühender Bromeliaceen zu untersuchen, wie die Bromeliaceen-Sammlungen in Kew, Lüttich (Hort. botan. und Hort. Makoy), Gent (Hort. van Houtte), Flottbek (bei Altona), Wilhelmshöhe u. s. w.[1]), nehme ich keinen Anstand auf eine Zergliederung der grossen Gattung *Karatas* (s. lat.) zu dringen, da Merkmale vorhanden sind, die nicht nur völlig ausreichen, sondern für andere Bromeliaceen-Gattungen sogar als wesentlich benutzt werden.

---

[1]) Für den freundlichen Empfang und freien Zutritt zu den Treibhäusern, wie auch für die gütige Erlaubnis, die Sammlungen der Untersuchungen wegen zu benutzen, bin ich den Herren Garten-Directoren zum grössten Dank verpflichtet.

Die Merkmale, zum Teil nicht vorher angezeigt, die für unsren Zweck in Betracht kommen müssen, sind folgende:

1. Ein grosser Teil der vorliegenden Arten haben einen verwachsenblättrigen Kelch. Hieher gehören alle diejenigen Arten, die sich dem Typus *Nidularium fulgens* anschliessen. Ich habe die meisten Arten von dieser Gruppe im lebenden Zustande untersucht. Die Kelchblätter sind immer deutlich, nicht selten bis an die Mitte des Kelches verwachsen. Innerhalb der Gruppe Bromelieæ ist dieses Merkmal bekanntlich als Genuscharakter sehr brauchbar. *Karatas* (s. lat.) ist doch von BENTHAM und HOOKER (1883) zu der Gruppe »sepalis supra ovarium liberis» geführt worden, was auch J. G. BAKER (Handbook of the Bromeliaceæ, 1889) mit diesen Worten billigt: »sepals free down to the ovary». Es muss besonders bemerkt werden, dass diese Arten (wie die Mehrzahl der Bromeliaceen germine infero) ausserdem eine trichterförmige Aushöhlung (fovea nectarifera) an der Spitze des Fruchtknotens haben; von dem Rande derselben gehen sowohl die Kelchröhre, als die verwachsenblättrige Blumenkrone, ganz von einander abgesondert, aus.

Dasselbe Merkmal, calyx monosepalus, findet sich nach ANTOINE auch bei *Karatas Plumieri* und *humilis*, die Arten, die MORREN ausgesondert hat, um die Gattung *Karatas* im engeren Sinne zu begründen. Bei *K. Plumieri* ist der Kelch bis zu $^1/_4$, bei *K. humilis* bis zu $^1/_3$ der ganzen Länge verwachsenblättrig.

Bei einigen wenigen *Regeliæ* sind die Kelchblätter desgleichen am Boden etwas verwachsen, z. B. bei *Regelia Meyendorffii* (REG.) und *R. Maréchali* (Hort.)[1]. Diese Arten scheinen auch in anderen Verhältnissen, z. B. rücksichtlich der Form der Blumenkrone, sich den echten Nidularium-Arten ein wenig zu nähern.

2. Die Blumenkrone bietet zwei völlig verschiedene Typen dar. Der eine gehört den Gattungen *Nidularium* LEM. (s. str.) und *Karatas* E. MRN an, der zweite dagegen der Gattung *Regelia*

[1]) Die Abbildung des Kelches der *Regelia Meyendorffii* bei ANTOINE, l. cit., tab. 32, ist irrig.

(LEM.). Der Unterschied dieser Typen ist sehr gut von ANTOINE auf folgende Weise angegeben:

a) *Nidularium*: »die Corolle röhrig, oben dreiteilig, die Zipfel kuppelförmig geschlossen, nach dem Verblühen verblassend bleibend.»

b) *Regelia:* »die ephemere Corolle ist aus einer verwachsenen oder nach oben mehr oder weniger verlöteten Röhre gebildet, am Ende ist sie in drei breitlanzettliche, nach aussen übergeneigte Zipfel geteilt. Sie zieht sich .... in den Kelch zurück.»

Durch Untersuchungen zahlreicher lebender Exemplare habe ich diesen Gegensatz so ausgeprägt und durchgeführt gefunden, dass er uns berechtigt, *Nidularium* und *Regelia* generisch zu trennen.

Bei der ersteren, *Nidularium* s. str., ist die Blumenkrone entweder sehr wenig geöffnet, oder (bei den meisten Arten) ganz verschlossen; sie macht den Eindruck, herkogam zu sein; sie ist nur zu $^1/_3$—$^1/_4$ von oben ab freiblättrig; die kurzen, breiten, abgestumpften und schwach ausgerandeten Zipfel sind zusammengeschlossen, um die Staubbeutel zu bedecken. Die Antheren und die Narbe befinden sich dann ganz oben unterhalb der Kuppel der geschlossenen Corolle. Das Blühen dauert einige Tage; nur langsam verwelkt die Blüte, und mehrere Blüten sind deshalb gleichzeitig entwickelt; die Nachblüte erhält ihre ursprüngliche Gestalt und schrumpft langsam zusammen.

Nach der ausdrücklichen Angabe ANTOINE's (l. cit., S. 36, 39) verhält sich die Corolle der Arten *Karatas Plumieri* und *humilis* (wie auch, nach der oben erwähnten Abbildung MORREN's, die der *Karatas Legrellæ*) auf dieselbe Weise, obgleich sie bei *K. humilis* während des Blühens etwas offen ist.

Bei den *Regelia*-Arten dagegen zeigt die Blumenkrone eine ganz andere Gestalt, wie auch das Blühen einen sehr eigenthümlichen Verlauf darbietet. Die 3 Kronenblätter sind nur zur halben Höhe (z. B. *Regelia princeps*), bei mehreren Arten sogar nur am Boden verwachsen (bei *R. Acanthocrater* ist die wirkliche Corollenröhre nur 4 Mm. lang; darüber sind die Petala nur verlötet). Während

des Blühens sind die immer mehr oder weniger zugespitzten Zipfel nach aussen übergeneigt; die Corolle wird dadurch trichterförmig; die Antheren sind völlig ersichtlich, obgleich tief unten im Schlunde beisammenstehend. Zwischen *Nidularium* und *Regelia* findet sich also etwa derselbe Unterschied was den Blüten-Typus betrifft, wie zwischen *Aechmea* und *Billbergia.* Diese Gattungen stehen einander jedoch viel näher im Blütenbau, als *Nidularium* und *Regelia.* Bei allen blühenden Exemplaren, die ich gesehen habe (*Regelia Acanthocrater*, *princeps*, *spectabilis*, *Meyendorffii*, *tristis*, *denticulata* u. a.), blühten die Blumen einzeln auf. Täglich entwickelte sich an der ganzen Pflanze eine einzige Blüte (selten zwei), die nur von sehr kurzer Dauer war, denn schon um 2—3 Uhr nachmittags denselben Tag schloss sie sich durch eine schnelle Bewegung, die oft binnen 5—10 Minuten vollbracht wurde; dabei rollte sich ein jeder der Zipfel spiralig mit grosser Kraft nach links zusammen, und die Blumenkrone wurde zwischen die Kelchblätter hinuntergeschraubt.

3. Der Bau der Inflorescenz ist als Genuscharakter von grosser Bedeutung innerhalb der Gruppe *Bromeliæ*, obgleich dies Merkmal nicht ganz conseqvent benutzt worden ist. Wie schon REGEL dargelegt hat, ist der Blütenstand der Gattung *Karatas* (im weiteren Sinne) von zwei verschiedenen Typen. Bei *Regelia* ist er einfach, racemös: eine gedrängtblütige, ähren- oder köpfchenähnliche Traube mit centripetaler Blütenentwickelung. Dieser Blütenstand ist von den oberen (centralen), gefärbten, dichtgedrängten Stengelblättern ganz wie ein Blütenkörbchen (calathidium) umgeben; die einzelnen Blüten sind im allgemeinen deutlich gestielt. Bei *Nidularium* (s. str.) und *Karatas* (s. str.) dagegen finden sich in der That mehrere Inflorescenzen, und zwar je eine im Winkel eines jeden der oberen (centralen), gefärbten Blätter. Jede einzelne Inflorescenz ist hier eine 2-reihige Ähre, stark zusammengedrückt in radialer Richtung. Mehrere Blüten können hier in jedem Blattwinkel gleichzeitig entwickelt sein. ANTOINE nennt die Gesammtinflorescenz »im ersten Grade botry-

tisch, im zweiten Grade cymös», was irrig ist: sie ist ohne den geringsten Zweifel eine zusammengesetzte Ähre.

Diesen vielen Unähnlichkeiten zufolge ist es wohl unvermeidlich, *Nidularium* LEM. (s. str.) und *Regelia* LEM. als Genera aus einander zu halten. Sie dürfen sogar nicht in derselben Gruppe der Bromelieen stehen, wenn man BENTH. u. HOOKER's Eintheilung dieser Tribus annehmen will. Die Gattung *Karatas* MRN dagegen weicht in wesentlichen Verhältnissen viel weniger von *Nidularium* ab, und diese beiden würden deshalb vielleicht als Subgenera derselben Gattung bleiben können. WITTMACK (ENGLER u. PRANTL, Die nat. Pflanzenfamilien, Lief. 11, 1887) hat sie jedoch getrennt, den von ANTOINE gegebenen Charakteren zufolge, und ich auch ziehe vor, die habituell sehr gut begrenzte Artengruppe *Karatas* E. MORREN als eine besondere Gattung zu erhalten.

Die unter *Karatas* (im weiteren Sinne) bekannten Arten (vgl. J. G. BAKER, Handbook, S. 1—12) müssen darum, meiner Meinung nach, auf folgende Weise aufgestellt werden:

A. Calyx supra foveam nectariferam gamosepalus.

Nidularium (LEMAIRE 1854).

Syn.: *Nidularium* LEM., Sect. B.: REGEL in Gartenfl. 1859.
» *Karatas* (PLUM.) ADANS. p. p.: BENTH. & HOOK., Gen. plant., 1883.
» » » Sect. II: ANTOINE, Phyto-Iconog., 1884.
» *Nidularium* LEM., Sect. I Eunidularium: WITTMACK in ENGL. & PRANTL, 1887.
» *Karatas* (PLUM.) ADANS., Subgenus Nidularium p. p.: BAKER, Handbook, 1889.

Diagn.:

Inflorescentia composita; flores sessiles in spicas distichas dispositi; spicæ singulæ sessiles in axillis foliorum centralium nidulantes

et ad spicam compositam capituliformem constituendam confertæ.

Calyx infra medium gamosepalus.

Corolla supra medium gamopetala, tubulosa, segmentis erecto-conniventibus obtusis, post anthesin forma conservata sensim marcescens.

Filamenta 6 tubo corollæ alte adnata.

Antheræ inclusæ, usque sub apicem petalorum conniventes.

Stigmata spiraliter contorta.

Fructus bacca.

Ovula plurima in summo loculorum angulo aggregata.

Folia late linearia nec incrassata, margine minute spinosa.

1. N. purpureum BEER.** [1])
2. » amazonicum LIND. & MRN.**
3. » Ferdinando-Coburgi WAWRA (non Regelia!).*
4. » Antoineanum WAWRA.*
5. » neglectum BAKER.*
6. » Scheremetiewii REG.*
7. » Innocentii (LEM.) ANT.**
8. » striatum Hort. W. BULL.**
9. » fulgens LEM.**
10. » rutilans MRN.*

Karatas (PLUM.) E. MORREN 1872.

Syn.: *Karatas* WITTMACK l. cit.
» » Subgenus »Karatas proper»: BAKER l. cit.
» » Sect. I Eukaratas: ANTOINE l. cit.

Diagn.:

Ovula pauca, secundum totam placentæ longitudinem disposita, 1—2-seriata.

Folia anguste linearia, longissima, incrassato-rigida, spinis marginalibus maximis horrida.

Cetera Nidularii.

[1]) Mit ** bezeichne ich diejenigen Arten, die ich im lebenden Zustande untersucht habe; mit * diejenigen, von denen ich entweder deutliche und zuverlässliche Abbildungen kenne, oder Herbar-Exemplare gesehen habe.

1. K. Plumieri E. MRN.*
2. » Nidus puellæ ANDRÉ.
3. » Legrellæ E. MRN.*
4. » agavæfolia (BRONGN.) DEVANS.*
5. » humilis (JACQ.) E. MRN.*
6. » Redoutei BAKER.
(7? » albo-rosea (GRISEB.) BAKER).

B. Sepala libera.

Regelia (LEMAIRE 1860).

Syn.: *Nidularium* LEM., Sect. A: REGEL in Gartenfl. 1859.
» *Karatas* (PLUM.) ADANS. p. p.: BENTH. & HOOK., l. cit.
» » Sect. III Regelia: ANTOINE, l. cit.
» *Nidularium* LEM., Sect. II Regelia: WITTM., l. cit.
» *Karatas* (PLUM.) ADANS., Subgen. Nidularium p. p.: Baker, l. cit.

Diagn.:

Inflorescentia racemosa; flores breviter pedicellati in racemum valde contractum capituliformem aggregati, foliis involucrantibus in calathidii formam circumdati.

Calyx supra ovarium 3-phyllus.

Corolla basi vel ad medium gamopetala, plus minus infundibuliformis, segmentis acutis patentibus jam eodem die sese inter sepala raptim retrahentibus.

Filamenta 6 tubo corollæ adnata.

Antheræ inclusæ in fauce corollæ sese præbentes.

Stigmata spiraliter contorta.

Fructus bacca.

Ovula et placenta Nidularii.

Folia Nidularii.

1. R. denticulata (C. KOCH).**
2. » sarmentosa (REG.)*
3. » cyanea (LIND. & ANDRÉ).*
4. » tristis (BEER).**

5. R. chlorosticta (E. MRN).**
6. » ampullacea (REG.).**
7. » Laurentii (REG.).*
8. » coriacea (HORT. LIND.).*
9. » Acanthocrater (E. MRN).**
10. » Carolinæ (BEER).*
11. » Meyendorffii (REG.).**
12. » Morreniana (Hort. MAKOY).**
13. » princeps (E. MRN).**
14. » Maréchali (Hort. Liège).**
15. » cruenta (GRAH.).*
16. » marmorata (E. MRN).*
17. » Johannis (CARRIÈRE).
18. » spectabilis (T. MOORE).**
19. » Makoyana (REG.).
20. » Binoti (E. MRN).*
21. » Carcharodon (E. MRN).*

22? » Regnellii (BAKER).

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 530.)

Kristiania. *Videnskabs-Selskabet.*
Forhandlinger. Aarg. 1889: N:o 1–12. 8:o.
Oversigt over Selskabets Möder. Aar 1889. 8:o.
Bergen. *Museum.*
Aarsberetning. Aar 1889. 8:o.
Bamberg. *Naturforschende Gesellschaft.*
Bericht. 15. 1890. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahr 1889: 20–40. 8:o.
— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1890: H. 1–2. 8:o.
Boston. *Boston society of natural history.*
Memoirs. Vol. 4: N:o 7–9. 1890. 4:o.
Proceedings. Vol. 24: P. 3–4. 1889—90. 8:o.
Cambridge. *Universitetet.*
CAYLEY, A., Collected mathematical papers. Vol. 3. 1890. 4:o.
Danzig. *Naturforschende Gesellschaft.*
Schriften. Neue Folge. Bd. 7: H. 3. 1890. 8:o.
Erlangen. *Physikalisch-medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 22. 1890. 8:o.
Glasgow. *Philosophical Society.*
Proceedings. Vol. 21 (1889/90). 8:o.
Granville, U. S. *Denison university.*
Bulletin of the scientific laboratories. Vol. 5. 1890. 8:o.
Greifswald. *K. Universität.*
Akademiskt tryck. Jahr 1890: $^{1}/_{1}$—$^{14}/_{8}$. 100 Häften. 4:o & 8:o.
Hamburg. *Naturhistorisches Museum.*
Mittheilungen. Jahrg. 7 (1889). 8:o.
Helsingfors. *Finska vetenskaps-societeten.*
Öfversigt af förhandlingarne. 31 (1888—1889). 8:o.
Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. H. 48. 1889. 8:o.
Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 24: H. 2–4. 1890. 8:o.
Kasan. *Meteorologisch-magnetisches Observatorium der K. Universität.*
Beobachtungen über Erdmagnetismus. Jahr 1887. 8:o.
Kew. *Royal gardens.*
Bulletin. 1 (1887); 3 (1889). London. 8:o.
Kiel. *K. Universität.*
Akademiskt tryck. 1889/90. 81 Häften. 4:o & 8:o.
— *K. Sternwarte.*
Publicationen. 4—5. 1890. 4:o.

(Forts. å sid. 565.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

189. Om jodvätesyras inverkan på 1-6-Nitronaftalinsulfonsyreamid.

Af ALFR. EKBOM.

[Meddeladt d. 10 December 1890 genom P. T. CLEVE.]

För kort tid sedan[1]) meddelade jag de resultat, till hvilka jag kommit, då jag lät jodvätesyra inverka på 1-5-nitronaftalinsulfonsyreamid.

Af intresse kunde nu vara att se, om isomera mononitronaftalinmonosulfonsyror vid reduktion med nämda syra följa samma lagar som α-syran.

Emedan 1-6-(β)syran af de hittills framställda nitronaftalinsulfonsyrorna lätt och i stor mängd erhålles, har jag underkastat denna syra samma operationer som α-syran.

Härvid visar sig, att reaktionerna vid β-syran i allt väsentligt förlöpa på det sätt, som vid 1-5-syran är beskrifvet.

1-6-amidonaftalinsulfonsyreamid,

$$C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NH_2\\ \diagdown SO_2 . NH_2 .\end{matrix}$$

5 gr. nitronaftalinsulfonsyreamid — smältpunkt 182° C. — kokades lindrigt öfver asbestbad med jodvätesyra och röd fosfor ungefär 7 tmr. Reaktionsprodukten, jodvätesyradt salt af amidonaftalinsulfonsyreamiden, behandlades med alkohol. Saltet löses

[1]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 4, pag. 189.

däri med största lätthet. Sedan kvarvarande fosfor frånfiltrerats, behandlades filtratet med svafvelsyrlighet och amoniak, hvarvid ett kristalliniskt gult ämne, amidonaftalinsulfonsyreamid, utföll. Amiden tvättades med vatten och omkristalliserades upprepade gånger ur alkohol. Ur alkohollösningen utföllo sidenglänsande, fina nålar, hvilka vid 218—219° C. smälte under förkolning.

Amidonaftalinsulfonsyreamiden är i varm alkohol lättlöslig, i kall svårlöslig samt i vatten olöslig.

Substansen förlorar intet i vikt vid 115° C.

Analyser å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material:

1) 0,3294 gr. gaf vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,6512 gr. CO_2 — motsvarande 0,1776 gr. C — och 0,1402 gr. H_2O — motsvarande 0,015577 gr. H.

2) 0,2045 gr. gaf vid förbränning med CuO 21,7 cm^3 N-gas, mätt öfver kalilut vid 17°,2 C. och 761,9 mm. barometertryck, motsvarande 0,025702 gr. N.

3) 0,1836 gr. gaf vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,1933 gr. $BaSO_4$, motsvarande 0,026547 gr. S.

I procent:

	Beräknadt för $C_{10}H_6<^{SO_2 . NH_2}_{NH_2}$:		Funnet: 1.	2.	3.
C_{10}	120	54,1	53,9	—	—
H_{10}	10	4,5	4,7	—	—
N_2	28	12,6	—	12,6	—
S	32	14,4	—	—	14,5
O_2	32	14,4	—	—	—
	222	100,0			

Utbyte: Af 5 gr. nitronaftalinsulfonsyreamid erhölls 2,5 gr. amidonaftalinsulfonsyreamid.

De nyss omnämda, sidenglänsande nålarne äro ej, som var att vänta, färglösa; de äro mer eller mindre rödbruna till färgen. Denna åstadkommes nämligen af ett i alkohol lättlösligt, rödbrunt färgämne, som vid reduktionen bildas i minimala kvantiteter. Färgämnet influerar ej å smältpunkten.

Hydrokloratet,

$$C_{10}H_6\langle{NH_2 . HCl \atop SO_2 . NH_2},$$

erhölls genom att lösa amiden i varm klorvätesyra. Vid afsvalning utkristalliserade klorhydratet i vackra fjäll.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

Analys:

0,2300 gr. gaf vid förbränning med CaO 0,1295 gr. AgCl, motsvarande 0,032961 gr. HCl.

I procent:

	Beräknadt för $C_{10}H_6<{NH_2 . HCl \atop SO_2 . NH_2}$:	Funnet:
HCl	14,1	14,3.

Hydrojodatet,

$$C_{10}H_6\langle{NH_2 . HJ \atop SO_2 . NH_2},$$

kristalliserar ur en starkt koncentrerad jodvätesyrad alkohollösning af amidonaftalinsulfonsyreamiden i svagt gulaktiga, vackra nålar.

Sulfatet utföll i vackra, centimeterlånga prismer vid koncentration af amidonaftalinsulfonsyreamidens lösning i svafvelsyra.

Monoacetamidonaftalinsulfonsyreamid,

$$C_{10}H_6\langle{NH . CO . CH_3 \atop SO_2 . NH_2}.$$

Behandlas amidonaftalinsulfonsyreamiden med öfverskott af acetanhydrid, och upphettas alltsammans 20′ öfver asbestbad till lindrig kokning, löser sig amiden. Vid tillsats af vatten afskilde sig en rödgul olja — acetanhydrid + acetylderivat. Denna löste

sig så småningom i den bildade ättiksyran. Lösningen neutraliserades med amoniumkarbonat, hvarefter densamma koncentrerades å vattenbad. Härvid utföll ett amorft, ljusrödt pulver. Detta omkristalliserades ur alkohol — är däri tämligen lättlösligt; vid afsvalning utföll acetyldervatet i form af små bollar, hvilka bestodo af en mängd från ett gemensamt centrum utgående, ljusröda kristallnålar. De tvättades med alkohol, utpressades och lufttorkades. Vid 238—239° C. smälte nålarne.

Acetylderivatet förlorar ej något i vikt vid 130° C.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

Analyser:

1) 0,1483 gr. gaf vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,2987 gr. CO_2, motsvarande 0,081463 gr. C, och 0,0667 gr. H_2O, motsvarande 0,007411 gr. H.

2) 0,1834 gr. gaf vid förbränning med CuO 16,8 cm^3 N-gas, mätt öfver kali vid 765 mm. bar.-tr. och 19,3° C., motsvarande 0,019835 gr. N.

I procent:

	Beräknadt för $C_{10}H_6<{NH.CO.CH_3 \atop SO_2.NH_2}$:		Funnet: 1.	2.
C_{12}	144	54,5	54,9	—
H_{12}	12	4,5	5.0	—
N_2	28	10,6	—	10,8
S	32	12,1	—	—
O_3	48	18,3	—	—
	264	100,0.		

Häraf framgår, att acetylderivatet äger ofvanstående formel.

CLEVE har förut framställt monoacetylderivat af 1-3[1])-, 1-7[2])-amidonaftalinsulfonsyreamid, diacetylderivat af 1-4[3])-amido-

[1]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 5, pag. 273 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXI: 2, pag. 3264.

[2]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 5, pag. 283 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXI: 2, pag. 3271.

[3]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 9, pag. 537 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXIII, pag. 958.

naftalinsulfonsyreamid. Af 1-5-amidonaftalinsulfonsyreamid fås, som jag visat[1]), äfven diacetylderivat.

En viss lagbundenhet tycks här råda: Står gruppen $SO_2 . NH_2$ i β-ställning, bildas monoacetylderivat, i α-ställning diacetylderivat.

Omkring 0,5 gr. amidosulfonsyreamid upphettades i slutet rör under $2^1/_2$ timmar vid 156° C. med öfverskott af acetanhydrid i afsikt att erhålla ett diacetylderivat. När röret uttogs, var massan förkolad.

1-6-Diamidodinaftyldisulfid,

$C_{10}H_6(NH_2)S - S(NH_2)H_6C_{10}$.

5 gr. 1-6-nitronaftalinsulfonsyreamid behandlades med jodvätesyra af spec. vikt 1,96 och röd fosfor. När jodvätesyran tillsattes, uppstod en af stark värmeutveckling åtföljd reaktion — sannolikt bildas jodvätesyradt salt af amidonaftalinsulfonsyreamid. Då reaktionen upphört, upphettades alltsammans till lindrig kokning öfver asbestbad under 3 timmar. Reduktionsprodukten behandlades med varm alkohol — produkten är deri svårlöslig. Till den alkoholiska lösningen sattes svafvelsyrlighet och amoniak, hvarvid först en amorf, mörkfärgad massa utföll; däröfver afsatte sig en hvit, flockig fällning. Dessa uttvättades med vatten samt löstes i alkohol. Alkohollösningen behandlades med vatten, hvarigenom en otydligt kristallinisk, gul substans utföll. På samma gång antog vätskan ett emulsionslikt utseende. Sedan fällningen uttvättats, kokades den med en ringa kvantitet alkohol och filtrerades. Fällningen antog nu en ljusgul färg samt var tydligt kristallinisk. Densamma löstes ånyo i alkohol, behandlades med vatten och filtrerades. Genom att upprepa detta förfaringssätt, tills ej någon emulsion vidare uppkom, har jag fått nämda ämne att kristallisera i färglösa — svagt gula nålar, hvilka vid 166° C. smälte till en klar vätska.

---

[1]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1890 N:o 4, pag. 189 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XXIII, pag. 1118.

Reaktionsprodukten — diamidodinaftyldisulfid[1]) — är lättlöslig i alkohol och kristalliserar därur i vackra, långa nålar. I eter löses densamma också, men kristalliserar dåligt ur detta lösningsmedel. Benzol löser basen lätt; någon kristalliserad förening har jag dock ej med benzol lyckats erhålla. Amidodisulfiden är olöslig i vatten, mycket svårlöslig i ligroin. Af isättika löses den lätt.

Behandlas diamidodinaftyldisulfiden, löst i alkohol, med konc. svafvelsyra, iakttages ingen färgförändring.

Substansen förlorar ej något i vikt vid 106° C.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande analys:

0,1429 gr. gaf vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,0661 gr. H_2O, motsvarande 0,007344 gr. H, och 0,3638 gr. CO_2, motsvarande 0,099218 gr. C.

I procent:

	Ber. för $C_{20}H_{16}N_2S_2$:	Funnet:
C	69,0	69,4
H	4,6	5,1.

Utbyte: Af 5 gr. nitronaftalinsulfonsyreamid erhölls omkr. 1,3 gr. diamidodinaftyldisulfid.

Vid reduktionen bildas dessutom dels den omnämda emulsionen, dels ett färgämne, som afsätter sig som en svart tjära, när det alkoholiska filtratet efter β-diamidodinaftyldisulfiden afdunstas till torrhet. Färgämnet löser sig med vacker röd färg i alkohol.

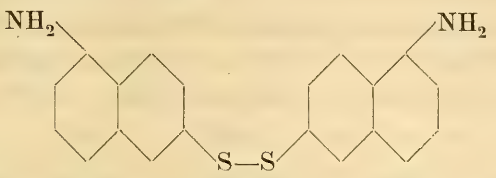
---

5 gr. dinitrodinaftyldisulfid[2]) af β-syran reducerades på vanligt sätt under 5 timmar med jodvätesyra af spec. vikt 1,54 och röd fosfor. Reduktionsprodukten behandlades på sätt nyss beskrifvits. Härigenom har erhållits ett ämne, som smälter vid 166° C. och för öfrigt visar sig äga alla den ofvan anförda föreningens egenskaper. Reduktionsprodukten af β-dinitrodinaftyl-

[1]) Jfr Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 4, pag. 189.

[2]) Öfvers. K. Vet.-Akad. Förh. 1887, N:o 5, pag. 243 och Ber. d. deutschen chem. Ges. XX, pag. 1534 och XXI: 1, pag. 1099.

disulfiden måste följaktligen utgöras af β-diamidodinaftyldisulfid[1]), hvadan dess konstitutionsformel blir:



Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

Analyser: (analyserna 1, 3 och 4 äro gjorda å samma beredning)

1) 0,1763 gr. gaf vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,0783 gr. H_2O, motsvarande 0,008700 gr. H, och 0,4471 gr. CO_2, motsvarande 0,121936 gr. C.

2) 0,1953 gr. gaf vid förbränning på samma sätt 0,0869 gr. H_2O, motsvarande 0,009655 gr. H, och 0,4937 gr. CO_2, motsvarande 0,134645 gr. C.

3) 0,2357 gr. gaf vid förbränning med CuO 16,1 cm³ N-gas, mätt öfver kalilut vid 17° C. och 749,1 mm. bar.-tryck.

4) 0,2221 gr.[2]) gaf vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,2926 gr. $BaSO_4$, d. ä. 0,040188 gr. S.

I procent:

	Ber för $C_{20}H_{16}N_2S_2$:		Funnet:			
			1.	2.	3.	4.
C_{20}	240	69,0	69,2	68,9	—	—
H_{16}	16	4,6	4,9	4,9	—	—
N_2	28	8,0	—	—	8,0	—
S_2	64	18,5	—	—	—	18,1
	348	100,0.				

Utbyte: Af 5 gr. β-dinitronaftyldisulfid erhölls 1,2 gr. diamidodinaftyldisulfid.

Dessutom bildas som förut vid reduktionen en emulsion och ett färgämne, båda antagligen identiska med de ofvan nämda.

---

[1]) Jfr Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 4, pag. 189.

[2]) Liksom α-diamidodinaftyldisulfiden är äfven denna ytterst svårförbränd, hvarför svaflet ej omsatte sig till sulfat, förrän oxidation med brom ägt rum.

Molekylarviktsbestämning å 1-6-diamidodinaftyldisulfiden enligt Raoults frysmetod[1]).

Gr. substans i 100 gr. isättika:	Nedsättning i fryspunkten:	Molekularvikt: Funnen:	Beräknad:
1,894	0,230°	321,2	348

Hydrokloratet,

$(C_{10}H_6(NH_2)S - S(NH_2)H_6C_{10}) . 2HCl$.

Diamidodinaftyldisulfiden löstes i alkohol. Till den alkoholiska lösningen sattes klorvätesyra, hvarvid hydrokloratet så godt som kvantitativt utföll i form af en hvit fällning, som under mikroskopet visade sig bestå af små nålar. Dessa togos på filtrum, tvättades med utspädd klorvätesyra, lufttorkades samt torkades till konstant vikt i exsickator.

Å så behandladt material gjordes följande

Analys: 0,2411 gr. kokades med utspädd amoniak, utfälld bas affiltrerades, och i filtratet bestämdes kloren å vanligt sätt; härvid erhölls 0,15954 gr. AgCl, motsvarande 0,040607 gr. HCl.

I procent:

	Ber. för $C_{20}H_{18}N_2S_2Cl_2$:	Funnet:
HCl	17,3	16,8.

Upphettas hydrokloratet med vatten, sönderdelas detsamma i klorväte och diamidodinaftyldisulfid.

Hydrojodatet,

$(C_{10}H_6(NH_2)S - S(NH_2)H_6C_{10}) . 2HJ$,

är den första reduktionsprodukten. Då jodvätesyra af spec. vikt 1,7 sattes till en alkohollösning af diamidodisulfiden, syntes ej någon fällning. Först efter koncentration å vattenbad utföll hydrojodatet i gula nålar. Dessa tvättades med helt litet alkohol, pressades mellan sugpapper och torkades till konstant vikt öfver svafvelsyra.

[1]) Jfr K. Auwers (Ber. d. deutschen chem. Ges. XXI, pag. 701) och E. Beekmann (Zeitschr. f. phys. Chemie II, pag. 638 och pag. 715).

Analys:

0,1812 gr. behandlades på samma sätt som hydrokloratet och gaf 0,1423 gr. AgJ, motsvarande 0,077558 gr. HJ.

I procent:

	Ber. för $C_{20}H_{18}N_2S_2J_2$:	Funnet:
HJ	42,4	42,8.

Sulfatet faller, då konc. svafvelsyra inverkar på en alkoholisk lösning af basen, i färglösa prismer, liknande β-diamidodinaftyldisulfidens.

Diacetdiamidodinaftyldisulfid,

$$C_{10}H_6(NH \,.\, CO \,.\, CH_3)S - S(NH \,.\, CO \,.\, CH_3)H_6C_{10}.$$

Försättes β-diamidodinaftyldisulfid med öfverskott af acetanhydrid, äger redan i köld omsättning rum. Sedan massan upphettats öfver asbestbad 10′, tillsattes vatten o. s. v. — Se under monoacetamidonaftalinsulfonsyreamid! Den erhållna råprodukten omkristalliserades ur isättika; vid isättikelösningens afkylning utföllo mikroskopiska, hvita nålar. Dessa tvättades med alkohol, utpressades och torkades till konstant vikt i exsickator.

Nålarne smälte vid 276° C. under förkolning. Acetylderivatet förlorar ej något i vikt vid 125° C.

Analys:

0,1049 gr. gaf 6 cm³ N-gas, mätt öfver kali vid 15°,6 C. och 766 mm. bar.-tryck, d. ä. 0,007185 gr. N.

I procent:

	Ber. för $C_{24}H_{20}N_2O_2S_2$:	Funnet:
N	6,5	6,8.

Behandlas 1-6-nitronaftalinsulfonsyreamid äfvensom 1-6-dinitrodinaftyldisulfid med jodvätesyra af spec. vikt 1,96 och upphettas öfver asbestbad till häftig kokning under 3—4 tim., bildas en produkt, som är tämligen lättlöslig i alkohol. Vid den

alkoholiska lösningens behandling med amoniak utfaller en grön-hvit, klibbig fällning. Denna uttvättades med vatten och löstes i alkohol. Vid denna lösnings behandling med vatten erhölls en emulsion, påminnande om den förut omnämda. Ur emulsionen afsatte sig om ett par dagar ett klibbigt, illaluktande ämne, sannolikt β-amidotionaftol.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 10.
Stockholm.

Sur la notion de l'énergie libre.

Par A. Rosén.

[Note présentée le 10 Decembre 1890 par B. Hasselberg.]

Dans les mémoires »Die Thermodynamik chemischer Vorgänge» (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882 et 1883; Wissenschaftliche Abhandlungen, t. II, p. 958), M. v. Helmholtz a introduit une nouvelle fonction thermodynamique qu'il a appelée l'énergie libre. Pour le cas d'un corps dont l'état peut être déterminé par deux variables, par exemple la température et le volume du corps, cette fonction est la même que la fonction étudiée par M. Duhem dans son livre »Le potentiel thermodynamique et ses applications» (Paris, 1886) sous le nom de potentiel thermodynamique sous volume constant. Dans le cas de deux variables il existe une fonction analogue appelée par M. Duhem potentiel thermodynamique sous pression constante. Ces fonctions jouissent de propriétés analogues, si l'on prend pour variables indépendantes dans l'une le volume et la température du corps, et dans l'autre la pression et la température. M. v. Helmholtz a employé pour variables, déterminant l'état du corps, la température et un certain nombre d'autres paramètres tels que la variation de la température seule, les autres paramètres restant constants, ne cause aucun travail effectué par le corps ou sur le corps. On n'a pas, que je sais, examiné s'il existait quelque fonction ayant des propriétés analogues pour un autre choix des variables. Je montrerai qu'il y a de telles fonctions pour diverses autres manières de choisir les

variables. Il faut pour cela que je rappelle aussi la manière dont M. v. HELMHOLTZ a défini l'énergie libre.

1. Supposons qu'on ait un corps ou un système de corps dont on peut déterminer l'état par un nombre fini de variables $x_0, x_1 \dots x_n$. Nous supposons que toutes les parties du système aient la même température, et que toutes les modifications du système se fassent d'une manière réversible. Soit dQ la quantité de chaleur absorbée par le système pendant qu'il subit une modification infiniment petite telle que les valeurs des variables indépendantes augmentent de $dx_0, dx_1 \dots dx_n$. Alors on peut écrire:

$$dQ = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 \dots + A_n dx_n,$$

où $A_0 \dots A_n$ sont des fonctions de $x_0 \dots x_n$.

Pendant que le corps subit cette modification, il aura en général effectué un travail extérieur positif ou negatif. La quantité du travail est infiniment petite. Désignons-la par dW. On peut alors écrire:

$$dW = p_0 dx_0 + p_1 dx_1 \dots + p_n dx_n,$$

où $p_0 \dots p_n$ sont des fonctions de $x_0, \dots x_n$. Nous supposons la chaleur et le travail mesurés par la même unité.

Selon le premier principe fondamental de la thermodynamique, $dQ - dW$ est l'accroissement que l'énergie du corps a reçu pendant qu'il a subi la modification. Si l'on désigne l'énergie par U, on a donc:

$$dQ - dW = dU,$$

où U est une fonction des variables $x_0 \dots x_n$. Par conséquent on a ces relations entre les quantités A_i et p_i:

$$\frac{d(A_i - p_i)}{dx_j} = \frac{d(A_j - p_j)}{dx_i}, \tag{1}$$

où i et j sont des nombres quelconques de la série $0, 1, \dots n$.

Selon le second principe fondamental de la thermodynamique (le principe de CARNOT et CLAUSIUS), si T est la température du système comptée du zéro absolu, $\frac{dQ}{T}$ est l'accroissement que

l'entropie du système a reçu dans la modification. L'entropie, que nous désignerons par S, est une nouvelle fonction de l'état du système, c'est-à-dire des variables $x_0 \dots x_n$. Par là, on obtient ces relations:

$$T\left(\frac{dA_i}{dx_j} - \frac{dA_j}{dx_i}\right) = A_i\frac{dT}{dx_j} - A_j\frac{dT}{dx_i}. \tag{2}$$

Des équations (1) et (2), on obtient un système d'équations de cette forme:

$$T\left(\frac{dp_i}{dx_j} - \frac{dp_j}{dx_i}\right) = A_i\frac{dT}{dx_j} - A_j\frac{dT}{dx_i}. \tag{3}$$

Ces formules sont beaucoup simplifiées, lorsqu'on choisit T pour variable indépendante. Supposons par exemple que $x_0 = T$. Alors $\frac{dT}{dx_0} = 1$ et $\frac{dT}{dx_1} = \dots \frac{dT}{dx_n} = 0$. Donc, au lieu de chacune des équations (2) où n'entrent pas de dérivées par rapport à x_0, on obtient une équation de cette forme:

$$\frac{dA_i}{dx_j} - \frac{dA_j}{dx_i} = 0. \tag{2a}$$

Au lieu de celles des équations (2) où entrent des dérivées par rapport à x_0, on obtient des équations de cette forme:

$$T\left(\frac{dA_i}{dT} - \frac{dA_0}{dx_i}\right) = A_i. \tag{2b}$$

De même, on obtient au lieu des équations (3):

$$\frac{dp_i}{dx_j} - \frac{dp_j}{dx_i} = 0, \tag{3a}$$

$$T\left(\frac{dp_i}{dT} - \frac{dp_0}{dx_i}\right) = A_i. \tag{3b}$$

En éliminant A_i des équations (2b) et (3b), on obtient:

$$\frac{dA_0}{dx_i} = T\frac{d}{dT}\left(\frac{dp_i}{dT} - \frac{dp_0}{dx_i}\right). \tag{3c}$$

Supposons enfin que les variables $x_1 \dots x_n$ soient choisies de telle sorte que le corps n'effectue aucun travail lorsque T varie

$x_1, \ldots x_n$ restant constants; c'est-à-dire qu'on ait $p_0 = 0$. L'expression du travail est alors:

$$dW = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

Les équations (3b) donnent:

$$A_i = T\frac{dp_i}{dT}.$$

Pour dQ on a donc cette expression:

$$dQ = A_0 dT + T\left(\frac{dp_1}{dT}dx_1 \ldots + \frac{dp_n}{dT}dx_n\right).$$

Les équations (3c) donnent enfin:

$$\frac{dA_0}{dx_i} = T\frac{d^2p_i}{dT^2}.$$

Les fonctions A_0, $p_1 \ldots p_n$, qui entrent dans les expressions de dQ et de dW, peuvent dans ce cas être exprimées à l'aide d'une seule fonction. On a:

$$dU = dQ - dW = TdS - dW,$$

$$d(U - TS) = -SdT - dW = -SdT - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n.$$

$U - TS$ est une fonction des variables T, $x_1 \ldots x_n$. Donc si l'on pose:

$$F = U - TS, \tag{4}$$

on a:

$$S = -\frac{dF}{dT}, \tag{4a}$$

$$p_i = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{4b}$$

Comme

$$TdS = dQ = A_0 dT + \ldots,$$

on a:

$$A_0 = T\frac{dS}{dT} = -T\frac{d^2F}{dT^2}. \tag{4c}$$

La fonction F est celle que M. v. HELMHOLTZ a appelée l'énergie libre du système.

Si les paramètres $x_1 \ldots x_n$ restent constants, on a:

$$dQ = A_0 dT.$$

On peut donc appeler A_0 la capacité calorifique du système pour les paramètres $x_1 \ldots x_n$ constants. Les p_i peuvent être appelés des forces par lesquelles le système tend à augmenter les x_i. Elles sont égales aux forces extérieures tendant à diminuer les x_i. Ce ne sont pas nécessairement des forces au sens de la mécanique.

2. Supposons maintenant qu'au lieu des paramètres $x_1 \ldots x_r$ on prend pour variables indépendantes les forces correspondantes $p_1, \ldots p_r$, en retenant comme variables indépendantes les quantités $x_{r+1} \ldots x_n$.

Nous avons:

$$dF = - SdT - p_1 dx_1 \ldots - p_r dx_r - p_{r+1} dx_{r+1} \ldots - p_n dx_n,$$
$$d(p_1 x_1 \ldots + p_r x_r) = p_1 dx_1 + x_1 dp_1 \ldots + p_r dx_r + x_r dp_r.$$

En additionnant, on a:

$$d(F + p_1 x_1 \ldots + p_r x_r) = - SdT + x_1 dp_1 \ldots + x_r dp_r - \\ - p_{r+1} dx_{r+1} \ldots - p_n dx_n.$$

L'expression $F + p_1 x_1 \ldots + p_r x_r$ est une fonction des quantités T, $x_1 \ldots x_n$, ou, ce qui revient au même, des quantités T, $p_1, \ldots p_r$, $x_{r+1}, \ldots x_n$. Donc si l'on pose

(5) $$F' = F + p_1 x_1 + \ldots + p_r x_r,$$

on a:

(5a) $$S = -\frac{dF'}{dT},$$

(5b) $$x_i = \frac{dF'}{dp_i},$$

(i un nombre ne dépassant pas r),

(5b') $$p_j = -\frac{dF'}{dx_j},$$

(j un nombre plus grand que r et ne dépassant pas n).

On a

$$(6) \qquad dQ = TdS = -Td\frac{dF'}{dT} = -T\frac{d^2F'}{dT^2}dT -$$

$$-T\left(\frac{d^2F'}{dTdp_1}dp_1 \ldots + \frac{d^2F'}{dTdp_r}dp_r\right) -$$

$$-T\left(\frac{d^2F'}{dx_{r+1}dT}dx_{r+1} \ldots + \frac{d^2F'}{dTdx_n}dx_n\right) =$$

$$= BdT - T\left(\frac{dx_1}{dT}dp_1 \ldots + \frac{dx_r}{dT}dp_r\right) + T\left(\frac{dp_{r+1}}{dT}dx_{r+1} \ldots + \frac{dp_n}{dT}dx_n\right),$$

si l'on pose

$$(5c) \qquad B = -T\frac{d^2F'}{dT^2}.$$

La quantité B peut être appelée la capacité calorifique du système, les quantités $p_1, \ldots p_r, x_{r+1}, \ldots x_n$ restant constantes.

La fonction F', ou $F + p_1x_1 \ldots + p_rx_r$, a donc pour les variables indépendantes $p_1, \ldots p_r, x_{r+1}, \ldots x_n, T$ des propriétés complètement analogues à celles de la fonction F pour les variables indépendantes $x_1, \ldots x_n, T$.

On peut spécialement échanger toutes les variables $x_1, \ldots x_n$ avec les quantités $p_1 \ldots p_n$. Si alors on pose:

$$F'' = F + p_1x_1 \ldots + p_nx_n,$$

on a:

$$S = -\frac{dF''}{dT},$$

$$x_i = \frac{dF''}{dp_i},$$

pour toute valeur de i.

L'expression de dQ peut s'écrire:

$$dQ = CdT - T\left(\frac{dx_1}{dT}dp_1 \ldots + \frac{dx_n}{dT}dp_n\right),$$

où l'on a posé:

$$C = -T\frac{d^2F''}{dT^2}.$$

C est la capacité calorifique du système, les forces $p_1 \ldots p_n$ restant constantes.

3. On a une relation remarquable entre A_0 et B.

Si, dans l'expression (6) de dQ, on suppose tous les x_i constants, cette expression doit être égale à $A_0 dT$. Donc

$$A_0 dT = B dT - T\left(\frac{dx_1}{dT}dp_1 \ldots + \frac{dx_r}{dT}dp_r\right).$$

Si $\frac{dp_1}{dT}, \ldots \frac{dp_r}{dT}$ désignent les dérivées de $p_1 \ldots p_r$, prises en regardant $p_1 \ldots p_r$ comme des fonctions de T, $x_1 \ldots x_n$, nous avons dans l'égalité que nous venons d'écrire:

$$dp_1 = \frac{dp_1}{dT}dT, \ldots \quad dp_r = \frac{dp_r}{dT}dT.$$

Les dérivées $\frac{dx_1}{dT}, \ldots \frac{dx_r}{dT}$ sont prises en regardant $x_1 \ldots x_r$ comme des fonctions de T, $p_1 \ldots p_r$, $x_{r+1}, \ldots x_n$. Pour indiquer la différence des variables indépendantes, écrivons ces dérivées $\left[\frac{dx_1}{dT}\right], \ldots \left[\frac{dx_r}{dT}\right]$. On a alors:

$$B = A_0 + T\left(\left[\frac{dx_1}{dT}\right]\frac{dp_1}{dT} \ldots\ldots + \left[\frac{dx_r}{dT}\right]\frac{dp_r}{dT}\right).$$

$\left[\frac{dx_1}{dT}\right], \ldots \left[\frac{dx_r}{dT}\right]$ satisfont évidemment à ces équations:

$$\frac{dp_1}{dx_1}\left[\frac{dx_1}{dT}\right] \ldots + \frac{dp_1}{dx_r}\left[\frac{dx_r}{dT}\right] + \frac{dp_1}{dT} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dp_r}{dx_1}\left[\frac{dx_1}{dT}\right] \ldots + \frac{dp_r}{dx_r}\left[\frac{dx_r}{dT}\right] + \frac{dp_r}{dT} = 0$$

Ces équations peuvent s'écrire ainsi:

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}\left[\frac{dx_1}{dT}\right] \ldots + \frac{d^2F}{dx_1 dx_r}\left[\frac{dx_r}{dT}\right] = \frac{dp_1}{dT}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2F}{dx_1 dx_r}\left[\frac{dx_1}{dT}\right] \ldots + \frac{d^2F}{dx_r^2}\left[\frac{dx_r}{dT}\right] = \frac{dp_r}{dT}.$$

Si l'on désigne par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F}{dx_1^2} & \cdots\cdots & \frac{d^2F}{dx_1 dx_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^2F}{dx_1 dx_r} & \cdots\cdots & \frac{d^2F}{dx_r^2} \end{vmatrix}$$

et par $A_{11}, \ldots A_{1r}$ etc les mineurs de D, on a:

$$D\left[\frac{dx_1}{dT}\right] = A_{11}\frac{dp_1}{dT} \ldots + A_{1r}\frac{dp_r}{dT},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{dx_r}{dT}\right] = A_{1r}\frac{dp_1}{dT} \ldots + A_{rr}\frac{dp_r}{dT}.$$

On obtient donc:

$$B = A_0 + \frac{T}{D}\left\{A_{11}\left(\frac{dp_1}{dT}\right)^2 + \ldots + A_{rr}\left(\frac{dp_r}{dT}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2A_{12}\frac{dp_1}{dT}\frac{dp_2}{dT} \ldots + 2A_{1r}\frac{dp_1}{dT}\frac{dp_r}{dT} \ldots\ldots \right\}.$$

4. Dans les mémoires cités au commencement de cette note, M. v. Helmholtz a traité, à l'aide de la thermodynamique, les courants de concentration et la polarisation galvanique. Comme application de quelques-unes des formules données ci-dessus, je traiterai l'endosmose électrique et les courants de diaphragme.

Supposons qu'on ait un vase rempli d'un fluide conducteur, et divisé en deux parties par une paroi poreuse non conductrice, et que des fils de platine plongent dans les deux parties. Alors si l'on fait traverser le fluide par un courant électrique, le fluide se meut à travers la paroi poreuse, ordinairement dans la direction du courant. Si le fluide est soumis à des pressions différentes dans les deux parties du vase, un courant électrique est produit dans la même direction que celle où le fluide tend à se mouvoir.

Afin d'avoir affaire avec des phénomènes réversibles, il faut que l'intensité du courant soit toujours infiniment petite. Pour cela, nous pouvons nous imaginer les deux fils de platine mis en

communication avec les pôles d'une machine magnétoélectrique, dont on règle la vitesse de rotation afin d'avoir toujours la même force électromotrice, à infiniment peu près, que la force électromotrice produite par la pression. Dans ce cas, la quantité de chaleur de Joule dégagée par le courant est un infiniment petit du second ordre.

Désignons par A et B les deux parties du vase. Le volume total du liquide soit 1, dont la partie x se trouve dans A, $1-x$ dans B. Supposons que la pression dans A excède celle dans B par p, et que la force électromotrice produite par la pression soit E. Enfin nous désignerons par e la quantité d'électricité ayant, à partir d'un certain moment, traversé le circuit dans la direction de la force électromotrice du vase.

Si le volume x croît de dx, la pression extérieure effectue un travail $-pdx$, ou le corps lui-même un travail pdx. Lorsque e croît de de, c'est-à-dire lorsque le circuit est traversé par la quantité d'électricité de dans le sens de la force électromotrice du vase, cette force électromotrice effectue un travail Ede. Si la température varie sans que x ou e varient, il n'y a pas de travail effectué. x, e forment donc un système de paramètres de la sorte considérée ci-dessus dans le § 1 et désignés par x_i. Les p_i correspondants sont p et E.

Nous pouvons regarder comme variables indépendantes p, e et la température du système. Il y a alors une fonction F' de ces variables telle que:

$$x = \frac{dF'}{dp},$$

$$E = -\frac{dF'}{de}.$$

Ces équations correspondent aux équations (5b) et (5b') ci-dessus. On en déduit:

$$\frac{dE}{dp} = -\frac{dx}{de}.$$

Cette équation montre la relation qui existe entre l'endosmose électrique et les courants de diaphragme. Si nous comptons

la force électromotrice E positive lorsqu'elle agit dans la direction de A à B, e doit être compté positif, lorsque l'électricité passe dans la même direction. Si le liquide est tel qu'il est transporté par un courant dans la direction du courant, $\frac{dx}{de}$ est négatif; $\frac{dE}{dp}$ doit donc être positif, c'est-à-dire la pression inégale produit une force électromotrice dans la direction de A à B. Si le liquide est transporté dans la direction opposée à celle du courant, $\frac{dx}{de}$ est positif et $\frac{dE}{dp}$ négatif; donc, dans un tel liquide, la force électromotrice produite par l'excés de la pression en A doit être dans la direction de B à A. Ce sont peu de liquides qui sont transportés dans la direction opposée à celle du courant; on n'a pas encore, que je sais, produit de courants de diaphragme avec ces liquides. Le fait que j'ai indiqué reste donc à vérifier par l'expérience.

On a observé (voir WIEDEMANN, Elektricität, II, p. 169) que la quantité du liquide transportée par le courant est proportionnelle à l'intensité du courant et indépendante de l'épaisseur de la paroi et de la grandeur de sa surface. Si l'on fait varier le liquide, la quantité transportée est à peu près proportionnelle à la résistance du liquide. $\frac{dx}{de}$ est donc une constante, tant qu'on ne fait pas varier le liquide, et si l'on fait varier le liquide $\frac{dx}{de}$ est proportionnel à la résistance du liquide. Il en est donc de même de $\frac{dE}{dp}$. La force électromotrice des courants de diaphragme doit donc être proportionelle à la différence de pression et indépendante de l'épaisseur et de la grandeur de la surface de la paroi; pour des liquides différents elle doit être à peu près proportionnelle à la résistance du liquide. Ce sont aussi là les lois trouvées par les expériences sur les courants de diaphragme.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 544.)

Krakau. *Akademia umiejętności.*

Pamiętnik:

Wydziały matem.-przyr. T. 16—17. 1889—90. 4:o.

» filolog. i hist.-filoz. T. 7. 1889. 4:o.

Rozprawy i sprawozdania z posiedzen:

Wydziały matem.-przyr. T. 19—20. 1889—90. 8:o.

» hist.-filoz. T. 22—24. 1888—90. 8:o.

» filologiczny. T. 13. 1889. 8:o.

Sprawozdanie komisyi fizyjograficznéj. T. 22—24. 1888—89. 8:o.

Sbiór wiadomości do antropologii Krajowéj . . . T. 13. 1889. 8:o.

Rocznik zarzadu. R. 1888. l. 8:o.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 4: Z. 1—3. 1888—89. 4:o.

Atlas geologiczny Galicyi. Zes. 1—2. Tekst & Atlas. 1887—88. 8:o & Tvfol.

Starodawne prawa Polskiego pomniki. T. 9—10: Cz. 1. 1889—88. 4:o.

Archiwum do dziejów literatury i oświaty. T. 6. 1889. 8:o.

Biblijoteka pisarzów Polskich. 1—8. 1889—90. l. 8:o.

Editiones collegii historici. N:o 42—43, 45. 1889—90. 4:o.

Leeds. *Philosophical and literary society.*

Annual report. Year 1889/90. 8:o.

London. *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 50 (1889/90): N:o 1—9 & Appendix. 8:o.

— *Nautical almanac office.*

Nautical almanac. Year 1894. 8:o.

— *Geologists' association.*

Proceedings. Vol. 11: N:o 6—8. 1890. 8:o.

— *Geological society.*

Quarterly journal. Vol. 46: 181—184. 8:o.

List of the society. $1890^{1}/_{11}$. 8:o.

— *Zoological society.*

Proceedings of the scientific meetings. Year 1890: P. 3. 8:o.

— **(Ontario.)** *Entomological society of Ontario.*

Annual report. 20 (1889). Toronto. 8:o.

Melbourne. *Government of Victoria.*

McCoy, F., Prodromus of the zoology of Victoria. Dec. 19—20. 1889—90. 8:o.

Müller, F. v., Second systematic census of Australian plants, with chronologic, literary and geographic annotations. P. 1. Vasculares. 1889. Tv. 4:o.

Milano. *R. Osservatorio di Brera.*

Pubblicazioni. N:o 37. 1890. 4:o.

Moskwa. *Société Imp. des naturalistes.*

Mémoires. T. 15: L. 6. 1889. 4:o.

Bulletin. (2) T. 3 (1889): N:o 4; 4 (1890): 1—2. 8:o.

München. *K. Sternwarte in Bogenhausen.*
Neue Annalen, hrsg. von H. Seeliger. Bd. 1. 1890. 4:o.

Newcastle upon Tyne. *Natural history society of Northumberland, Durham and Newcastle upon Tyne.*
Natural history transactions. Vol. 10: P. 2. 1890. 8:o.

New Haven. *Observatory of Yale university.*
Report. Year 1889/90. 8:o.

New York. *New York microscopical society.*
Journal. Vol. 6 (1890): N:o 1—4. 8:o.
— *American museum.*
Bulletin. Vol. 3: N:o 1 & Pag. 117—122. 1890. 8:o.

Oxford. *Radcliffe observatory.*
Results of astronomical and meteorological observations. Vol. 44 (1886). 8:o.

Paris. *Ministère de la marine et des colonies.*
PIERRE, L., Flore forestière de Cochinchine. Fasc. 14—15. 1889. F.
— *Ministère des travaux publics.*
Annales des mines. (8) T. 17: L. 1—3. 1890. 8:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Rapport aux gouvernements signataires de la convention du mètre. 13 (1889). 4:o.
Procès-verbaux des séances. Année 1889. 8:o.
— *Societe géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 16 (1887/88): N:o 9—11; 17 (1888/89): 1—7; 9. 8:o.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Spisův potěných jubilejni cenou. Cislo 3—5. 1890. 8:o.
— *Böhmiska kemiska sällskapet.*
Listy chemické. Ročník 14 (1889/90): Č. 1—10. 8:o.

Riga. *Naturforscher-Verein.*
Correspondenzblatt. 33. 1890. 8:o.

Rom. *Biblioteca nazionale Vittorio Emanuele.*
Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche . . . d'Italia. Vol. 4 (1889): N:o 3—6. 8:o.
— *Società Italiana delle scienze.*
Memorie di matematica e di fisica. (3) T. 7. 1890. 4:o.

S:t Petersburg. *Comité géologique.*
Bulletins. T. 8 (1889): 9—10; 9 (1890): 1—6. 8:o.
Bibliothèque géologique Russe, composée sous la rédaction de S. Nikitin. Année 5 (1889). 8:o.
— *Académie Imp. des sciences.*
Memoires. (7) T. 27: N:o 3—13; 28: 1. 1889—90. 4:o.
Bulletin. (2) 1: N:o 3—4. 1890. st. 8:o.
— *K. Botanischer Garten.*
Trudi. — Acta. T. 11: F. 1. 1890. 8:o.

Strassburg. *K. Wilhelms-Universität.*
Akademiskt tryck. 1888/90. 49 Häften. 4:o & 8:o.

Sydney. *Government observatory.*
Results of meteorological observations made in New S. Wales. Year 1888. 8:o.
Results of rain, river, and evaporation » » » » » » Year 1889. 8:o.
— *Department of mines.*
Annual report. Year 1889. F.
New S. Wales. Geological survey:
Records. Vol. 2: P. 1. 1890. 4:o.
Memoirs: Palæontology. N:o 3—4; 8. 1890, 4:o.
— *Australian museum.*
Report. Year 1889. F.
Records. Vol. 1: N:o 2. 1890. 8:o.
Catalogue of the Australian birds by E. P. RAMSAY. P. 2. 1890. 8:o.
» » » » Accipitres by E. P. RAMSAY: Supplement. 1890. 8:o.
» » » » Scyphomedusæ and Hydromedusæ by R. v. LENDENFELD: List of errata. 1890. 8:o.

Tokio. *Imp. University of Japan.*
Journal of the College of science. Vol. 3: P. 4. 1890. 4:o.
— *Seismological society of Japan.*
Transactions. Vol. 13: P. 2; 15. Yokohama. 1890. 8:o.

Venezia. *Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Atti. (7) T. 1 (1888/89): Disp. 1—9. 8:o

Washington. *U. S. Department of agriculture.*
North American fauna. N:o 3—4. 1890. 8:o.
— *U. S. National museum.*
Proceedings. Vol. 12 (1889). 8:o.
— *U. S. Bureau of ethnology.*
Annual report. 6 (1884/85). st. 8:o.

Wellington. *Colonial museum and geological survey of N. Zealand.*
Annual report. 24 (1888/89). 8:o.
Studies in biology for New Zealand students. N:o 4. PARKER, T. J., The skeleton of the N. Zealand Crayfishes (Palinurus and Paranephrops). 1890. 8:o.
Catalogue of the Colonial museum library. 1890. 8:o.
Reports of geological explorations. 20 (1888/89). 8:o.

Wien. *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.*
Schriften. Bd. 30 (1889/90). 1. 8:o.

Generalkonsuln, m. m. Hr E. Fränckel.
Description de l'Égypte, ou recueil des observations et des recherches qui ont été faites en Égypte pendant l'expédition de l'armée Française. Ed. 2. Texte. T. 1—18: 1—3; 19—24. Atlas 11 Tomes. Paris 1819—29. 8:o & Fol.

Professorn, Hr J. A. Ouchterlony i Louisville, U. S.
NETTELROTH, H., Kentucky fossil shells. Frankfort, Kent. 1889. 4:o.

Författarne.

WESTERLUND, C. A., Fauna der in der paläarctischen Region . . . lebenden Binnenconchylien. H. 7; Suppl. 1; Allgemeines Register. Lund & Karlshamn 1890. 8:o.

— Catalog » » » » » » » Karlshamn 1890. 8:o.

MAXIMOWICS, C. J., Flora Tangutica. F. 1. Petropoli 1889. 4:o.

— Enumeratio plantarum hucusque in Mongolia nec non in adjacente parte Turkestaniæ Sinensis lectarum. F. 1. Petropoli 1889. 4:o.

MORENO, F. P., Le musée de La Plata. Rapide coup d'oeil sur sa fondation et son developpement. 1890. 8:o.

NORRLIN, J. P., Minnesord öfver Sextus Otto Lindberg. Hfors 1890. 4:o.

PETERSEN, C. G. J., Det videnskabelige Udbytte af Kanonbaaden »Hauchs» Togter. 3: Text & Atlas. Kjöbenhavn 1890. 4:o.

SCHNEIDER, J. SPARRE, Undersögelser af Dyrelivet i de arktiske Fjorde. 3. Tromsö 1886. 8:o.

— Oversigt over de i Norges arktiske region hidtil fundne Coleoptera. Tromsö 1889. 8:o.

— Småskrifter. 4 st. 8:o.

TOULA, F., Geologische Untersuchung im östlichen Balkan und in den angrenzenden Gebieten. Wien 1890. 4:o.

Stockholm 1891. Kongl. Boktryckeriet.





